

В. Т. Волков, А. Г. Ягола

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

(курс лекций)

Предисловие

Учебное пособие "Интегральные уравнения. Вариационное исчисление (курс лекций)." написано на основе опыта чтения авторами одноименного курса для студентов физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

Лекционный курс "Интегральные уравнения. Вариационное исчисление." включает 14 лекций и разбит на 3 части: интегральные уравнения, вариационное исчисление и введение в методы решения некорректно поставленных задач. Первые две лекции носят вводный характер и содержат изложение ряда вопросов функционального анализа, необходимых для понимания последующего лекционного материала. Затем (6 лекций) подробно рассмотрены линейные интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра и некоторые связанные с ними вопросы, например, задача Штурма-Лиувилля и основы вариационного исчисления (4 лекции). Две заключительные лекции посвящены изучению основ методов регуляризации некорректно поставленных задач на примере интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода. По каждой теме приведено подробное изложение теоретического материала, сопровождаемое примерами с подробными решениями и упражнениями для самостоятельной работы. В конце каждой лекции приводится список вопросов и теоретических задач, разъясняющих и углубляющих некоторые аспекты читаемого курса и включенных в экзаменационные билеты.

Курс "Интегральные уравнения. Вариационное исчисление." является достаточно сложным и включает ряд вопросов, трудных для понимания студентами. Главной проблемой является то, что к началу чтения курса студенты еще не знакомы с основами функционального анализа в объеме, который требуется для понимания теорем, доказываемых на лекциях. Чтобы помочь студентам максимально быстро освоить необходимый материал, две первые лекции посвящены изучению ряда вопросов теории линейных операторов в бесконечномерных нормированных пространствах. Обращаем внимание читателя на то, что в книге рассмотрены лишь некоторые вопросы функционального анализа, а желающие получить более основательную и глубокую подготовку по этому предмету могут обратиться к хорошо известным учебникам и задачникам, например, изданиям [1-3] из списка дополнительной литературы.

Лекционный курс "Интегральные уравнения. Вариационное исчисление." читается на физическом факультете МГУ в 4-ом семестре и сопровождается практическими занятиями. Материал для решения задач можно найти, например, в учебном пособии тех же авторов (Волков В.Т., Ягола А.Г. "Интегральные уравнения. Вариационное исчисление (методы решения задач)". М.: КДУ, 2007), изданном одновременно с настоящей книгой.

Авторы выражают глубокую благодарность А.Б. Васильевой, Н.А. Тихонову, Г.Н. Медведеву и другим преподавателям кафедры математики физического факультета МГУ за полезные обсуждения и замечания.

Программа курса

1. Классификация линейных интегральных уравнений.
Уравнения Фредгольма и Вольтерра первого и второго рода. Примеры физических задач, приводящих к интегральным уравнениям.
2. Линейные пространства. Линейные операторы в бесконечномерных нормированных пространствах. Вполне непрерывный оператор.
3. Теорема существования собственного значения и собственного вектора у вполне непрерывного самосопряженного оператора. Построение последовательности собственных значений и собственных векторов.
4. Однородное уравнение Фредгольма второго рода.
Существование собственных значений и собственных функций у интегрального оператора с симметричным ядром. Вырожденные ядра. Теорема Гильберта-Шмидта.
5. Принцип сжимающих отображений. Уравнение Фредгольма с “малым λ ”. Метод последовательных приближений.
6. Линейное уравнение Вольтерра. Метод последовательных приближений.
7. Неоднородное уравнение Фредгольма второго рода.
Уравнения Фредгольма с вырожденными ядрами. Уравнение Фредгольма с произвольным непрерывным ядром. Теоремы Фредгольма.
8. Краевая задача на собственные значения и собственные функции (задача Штурма-Лиувилля).
Сведение задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля. Теорема Стеклова.
9. Понятие функционала. Первая вариация функционала. Необходимое условие экстремума.
10. Вариационная задача с закрепленными концами. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера, необходимое условие экстремума..
11. Поле экстремалей, функция Вейерштрасса, достаточные условия экстремума.
12. Задачи на условный экстремум. Изопериметрическая задача и задача Лагранжа (постановки задач, необходимое условие экстремума).
13. Задачи с подвижными границами. Постановки задач, условие трансверсальности, необходимое условие экстремума.
14. Понятие о корректно и некорректно поставленных задачах.
Уравнение Фредгольма первого рода как пример некорректно поставленной задачи. Метод А.Н. Тихонова регуляризации решения уравнения Фредгольма первого рода.