Лекция №2

§3. Элементы теории линейных операторов.

Перейдем теперь к определению линейного оператора. Оператор A, действующий из линейного пространства L_1 в линейное пространство L_2 называется линейным, если для любых элементов y_1 и y_2 из L_1 и любых вещественных чисел α_1 и α_2 выполнено равенство $A(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A y_1 + \alpha_2 A y_2$.

Будем обозначать область определения оператора A как $D(A)$. Для простоты будем считать $D(A) = L_1$. Множество значений оператора A обозначим $R(A)$. В данном случае $R(A) \subseteq L_2$ - линейное подпространство пространства L_2.

Будем называть нуль-пространством оператора A множество $Ker\, A = \{x \in L_1 : \ Ax = 0\}$. Очевидно, что $Ker\, A$ – линейное подпространство L_1, причем $0 \in Ker\, A$. Если $Ker\, A \neq \{0\}$ (в этом случае говорят, что нуль-пространство нетривиально), то оператор A называется вырожденным.

Если оператор A взаимно однозначный, то можно ввести обратный оператор A^{-1} с областью определения $D(A^{-1}) = R(A)$ и множеством значений $R(A^{-1}) = D(A) = L_1$. Для линейного оператора вопрос о существовании обратного решается следующим образом: обратный оператор существует тогда и только тогда, когда оператор A не является вырожденным (докажите это самостоятельно).

В качестве основного примера линейного оператора рассмотрим интегральный оператор Фредгольма

$$Ay \equiv \int_a^b K(x,s)y(s)ds, \qquad x,s \in [a,b].$$

Если ядро $K(x,s)$ непрерывно по совокупности аргументов, что мы будем предполагать в течение всего курса, то в соответствии с теоремой о непрерывной зависимости от параметра собственного интеграла, доказанной в курсе математического анализа, оператор A действует в линейном пространстве функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$ и, очевидно, является линейным.

В дальнейшем мы будем рассматривать линейные операторы, действующие в нормированных пространствах. Пусть оператор A отображает нормированное пространство N_1 в нормированное пространство N_2 (для простоты будем считать, что $D(A) = N_1$).

Определение А. Оператор A называется непрерывным в точке $y_0 \in D(A)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $y \in D(A)$ и удовлетворяющих неравенству $\| y - y_0 \| \leq \delta$ выполняется неравенство $\| Ay - Ay_0 \| \leq \varepsilon$.

Как и в курсе математического анализа можно сформулировать второе определение непрерывности оператора в точке.

Определение Б. Оператор A называется непрерывным в точке $y_0 \in D(A)$, если для любой последовательности $y_n \in D(A),\ n = 1,2,3,\ldots,\ y_n \to y_0$, последовательность Ay_n сходится к Ay_0.

Доказательство эквивалентности этих определений практически дословно повторяет аналогичное из курса математического анализа и предоставляется читателю.

Оператор A называется непрерывным на множестве $D(A)$ (на пространстве N_1), если он непрерывен в каждой точке этого множества. Оказывается, что линейный оператор непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен в нуле. В самом деле, если $y_n \to y_0$, то $y_n - y_0 \to 0$, а из линейности оператора вытекает, что $Ay_n \to Ay_0$ тогда и только тогда, когда $A(y_n - y_0) \to 0$.

Определение. Нормой оператора A называется

$$\|A\|_{N_1 \to N_2} = \sup_{\|y\|_{N_1}=1} \|Ay\|_{N_2}$$

Если это не будет вызывать разночтений, то для сокращения записи будем обозначать $\|A\|_{N_1 \to N_2} = \|A\|$.

Если $\|A\| < +\infty$, то оператор A называется ограниченным. Докажите самостоятельно, что в конечномерных пространствах любой линейный оператор является ограниченным.

Пример линейного неограниченного оператора. Рассмотрим пространство $C[0,1]$, которое, очевидно, является бесконечномерным пространством, и оператор дифференцирования $A = \dfrac{d}{ds}$, определенный на линейном подпространстве непрерывно дифференцируемых функций из $C[0,1]$.

Покажем, что A - неограниченный линейный оператор. Возьмем последовательность функций $y_n = \cos ns$. Тогда $\|y_n\| = \max\limits_{s\in[0,1]} |\cos\ ns| = 1$, но $\|Ay_n(s)\| = \|n \cdot \sin\ ns\| \to \infty$ при $n \to \infty$, что противоречит определению ограниченного оператора.

Теорема. Для любого $y \in N_1$ выполнено неравенство $\|Ay\| \le \|A\| \|y\|$, где A – линейный ограниченный оператор, действующий из нормированного пространства N_1 в нормированное пространство N_2.

Доказательство. 1). Для $y = 0$ (нулевой элемент пространства) теорема верна, так как $\|Ay\| = \|A0\| = 0 = \|A\| \cdot \|y\| = \|A\| \cdot 0$.

2). Рассмотрим теперь случай $y \ne 0$. Возьмем элемент $z = \dfrac{y}{\|y\|}$ - единичный вектор, т.к. $\|z\| = 1$. Тогда $\|Az\| = \left\| A \dfrac{y}{\|y\|} \right\| \le \|A\|$, из чего и следует утверждение теоремы.

Теорема. Линейный оператор $A : N_1 \to N_2$ является непрерывным тогда и только тогда, когда он ограничен.

Доказательство. Поскольку оператор A линейный мы будем исследовать непрерывность только в точке *0*.

1) Докажем, что из ограниченности следует непрерывность. Возьмем последовательность $y_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $\|Ay_n\| \le \|A\| \cdot \|y_n\| \to 0$ и, следовательно, оператор A является непрерывным.

2) Докажем, что из непрерывности следует ограниченность. Предположим, что оператор A неограниченный. Тогда существует последовательность y_n, $n = 1,2,3,...$ такая, что $\|y_n\| = 1$, а $\|Ay_n\| \ge n$. Следовательно, при $n \to \infty$ имеем $\left\| \dfrac{Ay_n}{n} \right\| \ge 1$, в то время как $\dfrac{y_n}{n} \to 0$, что противоречит определению непрерывности оператора *A*.

Покажем теперь, что интегральный оператор Фредгольма $Ay \equiv \int_a^b K(x,s)\cdot y(s)\,ds$, $x \in [a,b]$, является ограниченным из $h[a,b]$ в $h[a,b]$. Действительно, пусть $\|y\| = \sqrt{\int_a^b y^2(s)\,ds} = 1$ и $z = Ay$, тогда $|z(x)|^2 = |Ay|^2 = \left|\int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds\right|^2$.

Из неравенства Коши-Буняковского следует, что для каждого фиксированного $x \in [a,b]$ верно $\left|\int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds\right|^2 \le \int_a^b K^2(x,s)\,ds \cdot \int_a^b y^2(s)\,ds = \int_a^b K^2(x,s)\,ds.$

Интегрируя по x, получим $\|Ay\|^2 \le \int_a^b\int_a^b K^2(x,s)\,dx\,ds$. Поскольку правая часть неравенства не зависит от y, то

$$\|A\| \le \sqrt{\int_a^b\int_a^b K^2(x,s)\,dx\,ds} < +\infty,$$

что и требовалось доказать.

Докажите самостоятельно, что интегральный оператор Фредгольма является ограниченным также и при действии из $C[a,b]$ в $C[a,b]$, из $h[a,b]$ в $C[a,b]$ и из $C[a,b]$ в $h[a,b]$. Найдите оценки сверху для нормы оператора в каждом из этих случаев.

В дальнейшем нам потребуется следующая

Лемма. Пусть линейный ограниченный оператор A действует из нормированного пространства N_1 в нормированное пространство N_2, а линейный ограниченный оператор B действует из нормированного пространства N_2 в нормированное пространство N_3.

Тогда $\| BA \| \le \| B \| \cdot \| A \|$.

Доказательство. Для любого элемента $y \in N_1$ такого, что $\| y \| = 1$, имеет место неравенство $\| BAy \| \le \| B \| \cdot \| Ay \| \le \| B \| \cdot \| A \| \cdot \| y \| = \| B \| \cdot \| A \|$. Отсюда, с учетом определения нормы линейного оператора следует утверждение леммы.

Определение. Последовательность y_n, $n = 1,2,3,...$ элементов нормированного пространства N называется ограниченной, если существует константа C такая, что $\| y_n \| \le C$ для всех $n = 1,2,3,...$.

Предлагаем читателю самостоятельно доказать, что любая сходящаяся последовательность является ограниченной, и любая фундаментальная последовательность также является ограниченной.

Определение. Последовательность y_n, $n = 1,2,3,...$ элементов нормированного пространства N, обладающая тем свойством, что из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся, называется компактной.

Легко доказать, что любая компактная последовательность является ограниченной. На самом деле, если последовательность y_n, $n = 1,2,3,...$ не является ограниченной, то найдется подпоследовательность y_{n_k} такая, что $\|y_{n_k}\| \ge k$, $k = 1,2,...$, из которой нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность.

Замечание. В пространстве R^1 критерий компактности последовательности определяется теоремой Больцано-Вейерштрасса: из любой ограниченной последовательности вещественных чисел можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Аналогичное утверждение имеет место и в пространстве R^n. Для бесконечномерных пространств это не так.

Примеры некомпактных последовательностей.

1) Последовательности вещественных чисел $x_n = n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$ является некомпактной, так как ясно, что из этой последовательности нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность.

2) Числовая последовательность $1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ \ldots$ также некомпактна. Несмотря на то, что из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, однако нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность из *любой ее подпоследовательности*.

Примеры ограниченных некомпактных последовательностей в бесконечномерном пространстве.

3) Рассмотрим пространство $h[a,b]$. В курсе математического анализа было доказано существование в $h[a,b]$ ортонормированной системы, состоящей из бесконечного числа элементов (например, тригонометрической системы функций):

$$e_n,\ n = 1,2,\ldots\ ,\ \left\| e_j \right\| = 1,\quad (e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0,\ i \neq j \\ 1,\ i = j \end{cases}.$$

Покажем, что из последовательности членов ортонормированной системы (эта последовательность, очевидно, является ограниченной) нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность. В самом деле, $\left\| e_i - e_j \right\|^2 = (e_i - e_j, e_i - e_j) = 2$, $i \neq j$ $\Rightarrow \left\| e_i - e_j \right\| = \sqrt{2}$, если $i \neq j$. Поэтому никакая подпоследовательность этой последовательности не может быть фундаментальной, а, следовательно, и сходящейся.

4) Рассмотрим теперь последовательность $e_1, c, e_2, c, e_3, c, \ldots$ (c – фиксированный вектор из $h[a,b]$). Эта последовательность также некомпактна – из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, но нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность из любой ее подпоследовательности.

В качестве упражнения постройте самостоятельно пример ограниченной, но некомпактной последовательности элементов пространства $C[a,b]$.

Сформулируем теперь определение вполне непрерывного линейного оператора, действующего из нормированного пространства N_1 в нормированное пространство N_2.

Определение. Линейный оператор A называется вполне непрерывным, если для любой ограниченной последовательности элементов y_n из N_1 последовательность $z_n = Ay_n$ элементов N_2 такова, что из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Таким образом, вполне непрерывный оператор преобразует любую ограниченную последовательность в компактную.

Теорема. Вполне непрерывный оператор является ограниченным (а, следовательно, непрерывным).

Доказательство. Предположим, что вполне непрерывный оператор A не является ограниченным. Тогда найдется последовательность $y_n \in N_1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\left\| y_n \right\| = 1$, такая, что $\left\| Ay_n \right\| \geq n$. Но тогда из последовательности $z_n = Ay_n$ нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, что противоречит тому, что A – вполне непрерывный оператор.

Заметим, что не любой непрерывный линейный оператор является вполне непрерывным.

Пример. Рассмотрим единичный оператор $I : h[a,b] \to h[a,b]$, т.е. такой, что $Iy = y$ для любого $y \in h[a,b]$. Очевидно, указанный оператор является ограниченным.

Докажем, что он не является вполне непрерывным. Для этого достаточно рассмотреть последовательность членов ортонормированной системы из разобранного выше примера 3) и заметить, что последовательность $Ie_n = e_n$ некомпактна.

Теорема. Пусть A - оператор Фредгольма, действующий из $h[a,b]$ в $h[a,b]$. Тогда A - вполне непрерывный оператор.

Доказательство. Докажем сначала, что A - вполне непрерывный оператор при действии $h[a,b] \to C[a,b]$.

Критерий компактности последовательности элементов пространства $C[a,b]$ определяется теоремой Арцела, доказанной в курсе математического анализа: если последовательность элементов $C[a,b]$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна, то из нее можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность.

Рассмотрим последовательность $y_n \in h[a,b]$ такую, что $\|y_n\| \le M$, $n = 1,2,3,\ldots$, и последовательность $z_n(x) = Ay_n = \int_a^b K(x,\ s) \cdot y_n(s)\,ds$. Доказательство сформулированной нами теоремы состоит в проверке условий теоремы Арцела, т.е. нужно показать, что последовательность $z_n(x)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна.

1) Докажем сначала равномерную ограниченность. Обозначим $K_0 = \sup\limits_{x,s\in[a,b]} |K(x,s)|$. Поскольку функция $K(x,s)$ непрерывна по совокупности аргументов $x,\ s$ на замкнутом ограниченном множестве (квадрате) $[a,b]\times[a,b]$, то $K_0 < +\infty$. Более того, $K_0 = \max\limits_{x,s\in[a,b]} |K(x,s)|$. Тогда

$$|z_n(x)| = \left|\int_a^b K(x,s)\, y_n(s)\,ds\right| \le \sqrt{\underbrace{\int_a^b K^2(x,s)\,ds}_{\le K_o^2\cdot(b-a)} \cdot \underbrace{\int_a^b y_n^2(s)\,ds}_{\le M^2}} \le M \cdot K_0 \cdot \sqrt{b-a}$$

для всех $x \in [a,b]$ и всех $n = 1,2,3,\ldots$, а это и есть равномерная ограниченность.

2) Докажем теперь равностепенную непрерывность последовательности $z_n(x)$. Выберем произвольные точки $x_1, x_2 \in [a,b]$. Имеем

$$|z_n(x_1) - z_n(x_2)| = \left|\int_a^b [K(x_1,s) - K(x_2,s)] \cdot y_n(s)\,ds\right| \le \sqrt{\int_a^b [\ K(x_1,s) - K(x_2,s)]^2\,ds \ \cdot \ \int_a^b y_n^2(s)\,ds}\ .$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Функция $K(x,s)$ непрерывна по совокупности аргументов $x,\ s$ на замкнутом ограниченном множестве $[a,b]\times[a,b]$ и, следовательно, равномерно непрерывна на этом множестве. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $s \in [a,b]$ имеет место оценка $|K(x_1,s) - K(x_2,s)| \le \dfrac{\varepsilon}{M\sqrt{b-a}}$, если $|x_1 - x_2| \le \delta$. Тем самым, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|z_n(x_1) - z_n(x_2)| \le \varepsilon$ для всех $n = 1,2,3,\ldots$ и всех $x_1, x_2 \in [a,b]$, удовлетворяющих условию $|x_1 - x_2| \le \delta$, т.е. последовательность $z_n(x)$ равностепенно непрерывна.

Итак, последовательность функций $z_n(x)$, непрерывных на сегменте $[a,b]$, равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Согласно теореме Арцела, из последовательности $z_n(x)$ можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность непрерывных функций которая, как было доказано в курсе математического анализа, сходится к непрерывной функции.

Очевидно, что этим же свойством обладает и любая подпоследовательность последовательности $z_n(x)$, т.е. из любой из них можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность. Следовательно, оператор A является вполне непрерывным при действии $h[a,b] \to C[a,b]$. Но, т.к. из равномерной сходимости следует сходимость в среднем, то та же самая подпоследовательность непрерывных функций, которая сходится равномерно к некоторой непрерывной функции, сходится и в среднем к той же функции. Тем самым, оператор Фредгольма является вполне непрерывным и при действии $h[a,b] \to h[a,b]$. Теорема доказана.

В дальнейшем нам потребуется аналогичное утверждение и для интегрального оператора типа Вольтерра. Читателям предлагается доказать его самостоятельно.

Пусть линейный оператор A действует $A: E \to E$ (E - бесконечномерное евклидово пространство).

Определение. Оператор $A^*: E \to E$ будем называть сопряженным к оператору A, если для любых $y_1,\ y_2 \in E$ имеет место $(Ay_1, y_2) = (y_1, A^* y_2)$.

В качестве упражнения докажите, что A^* также является линейным оператором.

Пусть A - ограниченный оператор. Покажем, что $\|A\| = \|A^*\|$. Пусть y - любой элемент из E такой, что $\|y\| = 1$. Тогда

$$\|Ay\|^2 = (Ay, Ay) = (A^* Ay, y) \le \|A^* Ay\| \cdot \|y\| \le \|A^*\| \cdot \|Ay\| \le \|A^*\| \cdot \|A\| \cdot \|y\| = \|A^*\| \|A\|.$$

Поэтому для любого $y \in E$, такого, что $\|y\| = 1$, выполнено неравенство $\|Ay\|^2 \le \|A^*\| \cdot \|A\|$. Отсюда $\|A\|^2 \le \|A^*\| \cdot \|A\|$.

Проведя аналогичные рассуждения для оператора A^*, получим $\|A^*\|^2 \le \|A^*\| \cdot \|A\|$. Из этих двух неравенств получаем, что $\|A\| = \|A^*\|$.

Определение. Если $A = A^*$, то оператор A называется самосопряженным (или симметрическим).

Рассмотрим оператор Фредгольма $Ay \equiv \int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds$, действующий из $E = h[a,b]$ в $E = h[a,b]$. Для любых $y_1,\ y_2 \in E$ имеем

$$(Ay_1, y_2) = \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b K(x,s)\, y_1(s)\, ds \right) y_2(x)\ dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b K(x,s)\, y_2(x)\, dx \right) y_1(s)\ ds = (y_1, A^* y_2).$$

В то же время $(y_1, A^* y_2) = \int\limits_a^b \left(\int\limits_a^b K^*(s,x)\, y_2(x)\, dx \right) y_1(s)\, ds$, поэтому $K^*(s,x) = K(x,s)$.

Итак, A^*- оператор, сопряженный к оператору Фредгольма с ядром $K(x,s)$, также является оператором Фредгольма с ядром $K^*(x,s) = K(s,x)$, $x, s \in [a,b]$.

Если $K(x,s) = K(s,x)$ для любых $x, s \in [a,b]$, то ядро $K(x,s)$ называется симметрическим. В этом случае интегральный оператор является самосопряженным (при действии из E в E). Докажите сами, что если ядро интегрального оператора не является симметрическим, то оператор не является самосопряженным. Напомним, что ядра рассматриваемых нами интегральных операторов непрерывны по совокупности аргументов.

Экзаменационные вопросы

1) Определения и формулировки теорем.

1. Сформулировать определение линейного оператора.
2. Сформулировать два определения непрерывности в точке оператора, действующего в нормированных пространствах.
3. Сформулировать определение нормы линейного оператора, действующего в нормированных пространствах.
4. Сформулировать определение ограниченного линейного оператора.
5. Сформулировать определение ограниченной последовательности элементов нормированного пространства.
6. Сформулировать определение компактной последовательности элементов нормированного пространства.
7. Сформулировать определение вполне непрерывного оператора.
8. Сформулировать необходимое и достаточное условие компактности последовательности векторов конечномерного евклидового пространства R^n.
9. Сформулировать теорему Арцела.
10. Сформулировать определение оператора, сопряженного к линейному оператору, действующему в евклидовом пространстве.
11. Сформулировать определение самосопряженного (симметрического) оператора, действующего в евклидовом пространстве.
12. Сформулировать определение интегрального оператора Фредгольма с симметрическим ядром.

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Доказать, что оператор, обратный к линейному оператору, является линейным оператором.
2. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма отображает линейное пространство $h[a,b]$ в себя и является линейным оператором.
3. Доказать, что интегральный оператор Вольтерра отображает линейное пространство $h[a,b]$ в себя и является линейным оператором.
4. Доказать, что линейный оператор, действующий в нормированных пространствах, непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен в нуле.
5. Доказать, что линейный оператор, действующий в нормированных пространствах, непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.
6. Доказать эквивалентность двух определений непрерывности в точке оператора, действующего в нормированных пространствах.
7. Доказать, что оператор дифференцирования, действующий из $C^{(1)}[a,b]$ в $C[a,b]$, является ограниченным.
8. Доказать, что оператор дифференцирования, определенный на подпространстве непрерывно дифференцируемых функций пространства $C[a,b]$ и действующий из $C[a,b]$ в $C[a,b]$, является неограниченным.
9. Доказать, что если A - линейный ограниченный оператор, $A\colon N_1 \to N_2$, N_1 и N_2 – нормированные пространства, $A \neq 0$, то $\|A\| > 0$.
10. Доказать, что для любого $y \in N_1$ выполнено неравенство $\|Ay\| \le \|A\| \|y\|$, где A – линейный ограниченный оператор, действующий из нормированного пространства N_1 в нормированное пространство N_2.

11. Доказать, что если $B : N_2 \to N_3$ является непрерывным оператором, а оператор $A : N_1 \to N_2$ – вполне непрерывный, то $BA : N_1 \to N_3$ – вполне непрерывный оператор (N_1, N_2, N_3 – нормированные пространства).
12. Доказать следующее утверждение: пусть линейный ограниченный оператор A действует из нормированного пространства N_1 в нормированное пространство N_2, линейный ограниченный оператор B действует из нормированного пространства N_2 в нормированное пространство N_3. Тогда $\| BA \| \le \| B \| \cdot \| A \|$.
13. Построить пример бесконечной ортонормированной системы в пространстве $h[a,b]$.
14. Доказать существование ограниченных некомпактных последовательностей в пространстве $h[a,b]$.
15. Доказать, что если взаимно однозначный оператор, действующий в бесконечномерном евклидовом пространстве, является вполне непрерывным, то обратный оператор неограничен.
16. Доказать, что единичный оператор, действующий в пространстве $h[a,b]$, не является вполне непрерывным.
17. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий из $C[a,b]$ в $C[a,b]$, ограничен, и найти оценку сверху нормы оператора.
18. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий из $h[a,b]$ в $h[a,b]$, ограничен, и найти оценку сверху нормы оператора.
19. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий из $h[a,b]$ в $C[a,b]$, является вполне непрерывным оператором.
20. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий из $h[a,b]$ в $h[a,b]$, является вполне непрерывным оператором.
21. Доказать, что интегральный оператор Фредгольма с симметрическим ядром, действующий из $h[a,b]$ в $h[a,b]$, является самосопряженным оператором.