Лекция №7

§12. Уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденными ядрами.

Этот случай отличается тем, что решение интегрального уравнения сводится к решению линейной алгебраической системы и может быть легко получено известными из курса линейной алгебры методами.

Рассмотрим уравнения Фредгольма 2-го рода

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds + f(x), \qquad x,s \in [a,b]$$

где ядро $K(x,s)$ имеет вид $K(x,s) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) b_j(s)$. Напомним, что ядро такого вида называется вырожденным.

Предположим, что функции $a_j(x), b_j(s)$ - непрерывны по своим аргументам на отрезке $[a,b]$; $a_1(x),...,a_n(x)$ – линейно независимы; $b_1(s),...,b_n(s)$ - линейно независимы (эти предположения не ограничивают общность), а $f(x)$ - заданная непрерывная функция.

Покажем, что решение интегрального уравнения Фредгольма может быть сведено к решению системы линейных алгебраических уравнений. Обозначив $c_j = \int_a^b b_j(s)\, y(s)\, ds$, где c_j - неизвестные пока числа, перепишем исходное интегральное уравнение в виде

$$y(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j\, a_j(x) + f(x).$$

Далее, умножая обе части этого равенства на $b_i(x)$, $i = 1,...,n,$ и интегрируя от a до b, имеем:

$$c_i = \int_a^b y(x)\, b_i(x)\, dx = \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j \underbrace{\int_a^b a_j(x)\, b_i(x)\, dx}_{k_{ij}} + \underbrace{\int_a^b f(x)\, b_i(x)\, dx}_{f_i}.$$

Итак, мы получили систему линейных алгебраических уравнений

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} k_{ij}\, c_j = f_i, \quad i = 1,...,n.$$

В качестве упражнения, докажите сами, что задача решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и задача решения неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром эквивалентны.

Рассмотрим определитель полученной системы линейных алгебраических уравнений:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & ... & -\lambda k_{1n} \\ -\lambda k_{21} & 1-\lambda k_{22} & ... & -\lambda k_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & ... & 1-\lambda k_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель $D(\lambda)$ не равен нулю тождественно, т.к. $D(0) = 1$, причем $D(\lambda)$ - полином степени n от параметра λ. Число его корней не превосходит n. Вещественные корни полинома $D(\lambda)$ - это характеристические числа интегрального уравнения с вырожденным ядром.

Для каждого заданного значения λ возможны два случая: 1) $D(\lambda) \neq 0$; 2) $D(\lambda) = 0$.

Рассмотрим первый случай $D(\lambda) \neq 0$.

Теорема. Если λ не является характеристическим числом (т.е. $D(\lambda) \neq 0$), то интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода имеет, и притом единственное, решение для любой непрерывной функции $f(x)$.

Решение находится по формулам Крамера: $c_i = \dfrac{1}{D(\lambda)} \sum\limits_{k=1}^{n} D_{ki}(\lambda) f_k$, где $D_{ki}(\lambda)$ - алгебраические дополнения i-го столбца определителя $D(\lambda)$. Таким образом

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{k=1}^{n} D_{ki}(\lambda)\; a_i(x) \int_a^b f(s) b_k(s)\, ds .$$

Так как в выражении для $y(x)$ суммы конечные, то можно поменять местами операции суммирования и интегрирования. Получим интегральное представление решения в виде $y(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b R(x,s,\lambda)\, f(s)\, ds$, где обозначено $R(x,s,\lambda) = \dfrac{1}{D(\lambda)} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{n} D_{ki}(\lambda)\; a_i(x)\; b_k(s)$, а $D(\lambda)$ и $D_{ki}(\lambda)$ называются определителями Фредгольма.

<u>Замечание</u>. Формула $R(x,s,\lambda) = \dfrac{1}{D(\lambda)} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{n} D_{ki}(\lambda)\; a_i(x)\; b_k(s)$ дает представление для резольвенты оператора Фредгольма в случае непрерывного вырожденного ядра. Ранее нами уже были получены представления для резольвенты при других предположениях относительно ядра $K(x,s)$.

Перейдем ко второму случаю, т.е. $D(\lambda) = 0$.

Рассмотрим сначала однородное уравнение, т.е. положим $f(x) \equiv 0$. Тогда, используя введенные выше обозначения, получим $y(x) = \lambda \sum\limits_{j=1}^{n} c_j\; a_j(x)$ и однородную СЛАУ для определения неизвестных c_j: $\qquad c_i - \lambda \sum\limits_{j=1}^{n} k_{ij}\, c_j = 0 \qquad i, j = \overline{1,n}$.

Так как λ – характеристическое число, то однородная система имеет нетривиальное решение (вообще говоря, может быть несколько линейно независимых решений). Пусть данному λ соответствует p линейно независимых решений, где $1 \le p \le n$ (число линейно независимых решений – это кратность характеристического числа), причем $p = n - r$, r – ранг матрицы $I - \lambda K$, где $K = \{k_{ij}\}$, $i, j = 1,...n$.

Пусть $\left(c_1^{(l)},...,c_n^{(l)}\right)$, $l = 1,2,...,p$ - нетривиальные решения однородной СЛАУ. Тогда нетривиальные решения однородного уравнения Фредгольма 2-го рода можно записать в виде

$$\varphi_l(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i^{(l)}\, a_i(x), \qquad l = 1,2,...,p .$$

Так как векторы $\left(c_1^{(l)},...,c_n^{(l)}\right)$, $l = 1,2,...,p$, линейно независимы, и функции $a_1(x),...,a_n(x)$ также линейно независимы, то однородное уравнение Фредгольма 2-го рода имеет p линейно независимых решений, а общее решение его представимо в виде $y(x)=\sum_{l=1}^{p}\alpha_l\,\varphi_l(x)$, где α_l - любые вещественные числа.

Напомним некоторые сведения из линейной алгебры. Пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$BX=F\ ; \qquad X=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in R^n; \quad F=\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix}\in R^n.$$

B - линейный оператор: $R^n\to R^n$, его ранг $r(B)$ равен размерности $R(B)$. Однородное уравнение $BX=0$ имеет $(n-r)$ линейно независимых решений.

Рассмотрим теперь СЛАУ $B^*X=G$, B^* - транспонированная матрица. В курсе линейной алгебры было доказано, что ранг В равен рангу В*. Следовательно, однородное уравнение $BX=0$ с матрицей B и однородное уравнение $B^*X=0$ с матрицей B^* имеют одинаковое число линейно независимых решений.

<u>Определение</u>. <u>Сопряженным</u> (<u>союзным</u>) интегральным уравнением называется уравнение с ядром $K^*(x,s)=K(s,x)$.

Наряду с уравнением $y(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds+f(x)$ или, в операторной форме $y=\lambda Ay+f$, мы будем рассматривать <u>союзное</u> с ним интегральное уравнение $\psi(x)=\lambda\int_a^b K^*(x,s)\psi(s)\,ds+g(x)$ ($g(x)$- непрерывная функция), или в операторной форме $\psi=\lambda A^*\psi+g$. Подставляя в последнее соотношение выражение для ядра, получим $\psi(x)=\lambda\int_a^b\sum_{j=1}^{n}a_j(s)b_j(x)\psi(s)\,ds+g(x)$ или $\psi(x)=\lambda\sum_{j=1}^{n}\tilde c_j\,b_j(x)+g(x)$, где $\tilde c_j=\int_a^b\psi(s)\,a_j(s)\,ds$.

Запишем СЛАУ, эквивалентную союзному интегральному уравнению:

$$\tilde c_i-\lambda\sum_{j=1}^{n}k_{ji}\,\tilde c_j=g_i, \qquad \text{или} \qquad (I-\lambda K^*)\widetilde C=G,$$

где $K^*=\{k_{ij}^*\}$, $k_{ij}^*=\int_a^b a_i(s)\,b_j(s)\,ds=k_{ji}$, $i,j=1,2,\dots,n$; $\tilde C=\begin{pmatrix}\tilde c_1\\ \vdots\\ \tilde c_n\end{pmatrix}$, $G=\begin{pmatrix}g_1\\ \vdots\\ g_n\end{pmatrix}$,

$g_i=\int_a^b g(s)\,a_i(s)\,ds,\quad i=1,\dots,n$.

Легко видеть, что мы получили СЛАУ с транспонированной матрицей, т.е. однородному исходному уравнению соответствует СЛАУ $(I-\lambda K)C=0$, а однородному союзному уравнению $(I-\lambda K^*)\widetilde C=0$.

Рассмотрим однородную систему $(I-\lambda K^*)\widetilde C=0$. Определитель ее $D(\lambda)=0$; линейно независимых решений $\left(\tilde c_1^{(l)},\dots,\tilde c_n^{(l)}\right)$, $l=1,2,\dots,p$, - ровно столько же, сколько и для исходной системы, т.е. p. При этом решения однородного союзного интегрального уравнения Фредгольма имеют вид $\psi_l(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j^{(l)} b_j(x), \quad l = 1, 2, ..., p$.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема. Для любого λ число линейно независимых решений однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода и союзного с ним однородного уравнения одинаково.

Перейдем теперь к изучению неоднородного уравнения в случае $D(\lambda) = 0$. Возникает вопрос: когда разрешима неоднородная система линейных алгебраических уравнений, определитель которой равен нулю?

Рассмотрим СЛАУ

$$BX = F, \quad B: \ R^n \to R^n, \qquad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Лемма (о разложении пространства R^n): $\quad R^n = R(B) \oplus Ker\, B^*$.

Перед тем, как доказывать лемму, выясним, как решать вопрос о разрешимости уравнения $BX = F$. Ответ очень простой: разрешимость означает, что $F \in R(B)$. Таким образом, чтобы убедиться в существовании решения, надо в соответствии с леммой доказать, что $F \perp Ker\, B^*$. Для этого достаточно найти базис пространства $Ker\, B^*$ и проверить ортогональность F базисным векторам $Ker\, B^*$.

Доказательство. Заметим, что $R(B) = \overline{R(B)}$ и $Ker\, B^* = \overline{Ker\, B^*}$ - это замкнутые линейные подпространства R^n (докажите их замкнутость самостоятельно).

1) Докажем, что из того, что $Y \in R(B)$ следует $Y \perp Ker\, B^*$. Так как $Y \in R(B)$, то существует элемент $X \in R^n$ такой, что $Y = BX$. Тогда для любого вектора $\psi \in Ker\ B^*$ выполнено $(Y, \psi) = (BX, \psi) = (X, B^*\psi) = 0$, т.е. $Y \perp Ker\, B^*$.

2) Докажем, что если $\psi \perp R(B)$, то $\psi \in Ker\, B^*$. В самом деле, $\psi \perp R(B)$ означает, что $0 = (\psi, BX) = (B^*\psi, X) \quad \forall X \in R^n$. Отсюда вытекает, что $B^*\psi = 0$ или $\psi \in Ker\, B^*$. Лемма доказана.

Пусть $BX = F$. Как определить, есть ли решения? Надо найти все нетривиальные линейно независимые решения уравнения $B^*\psi = 0$. Если F ортогональна всем этим решениям, то неоднородная система имеет решения; если F не ортогональна всем нетривиальным решениям уравнения $B^*\psi = 0$, то уравнение $BX = F$ не имеет решений.

Получаем следующие условие разрешимости СЛАУ для уравнения Фредгольма 2-го рода в случае $D(\lambda) = 0$:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} \tilde{c}_1^{(l)} \\ \vdots \\ \tilde{c}_n^{(l)} \end{pmatrix} \qquad l = 1, ..., p.$$

Чтобы СЛАУ для неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы вектор правой части был ортогонален всем линейно независимым решениям СЛАУ для однородного союзного уравнения, т.е. $\sum_{i=1}^{n} f_i \tilde{c}_i^{(l)} = 0, \quad l = 1, ..., p$ или $\int_a^b f(x) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i^{(l)} b_i(x)}_{\psi_l(x)} dx = 0$, где $\psi_l(x)$ -

решения однородного союзного уравнения Фредгольма. Таким образом $\int\limits_a^b f(x)\psi_l(x)\,dx = 0, \qquad l = 1,\dots,p$, и доказаны следующие утверждения.

Теорема. Неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром разрешимо тогда и только тогда, когда неоднородность $f(x)$ ортогональна всем линейно независимым решениям однородного союзного уравнения.

Теорема. Неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром разрешимо для любой неоднородности $f(x)$ тогда и только тогда, когда однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

§13. Уравнение Фредгольма 2-го рода с произвольными непрерывными ядрами. Теоремы Фредгольма.

Перейдем теперь к общему случаю непрерывного (несимметрического) ядра. Оказывается, что для каждого фиксированного λ неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода с невырожденным ядром можно заменить эквивалентным интегральным уравнением с вырожденным ядром.

Теорема. Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода $y = \lambda A y + f$ с невырожденным ядром при фиксированном λ можно заменить эквивалентным интегральным уравнением с вырожденным ядром.

<u>Доказательство</u>. Для любого $\varepsilon > 0$ ядро интегрального уравнения можно представить в виде суммы $K(x,s) = K_в(x,s) + K_\varepsilon(x,s)$, где $K_в(x,s) = \sum\limits_{k=1}^{N(\varepsilon)} a_k(x) b_k(s)$ - вырожденное ядро, $K_\varepsilon(x,s)$ - невырожденное ядро такое, что

$$\max_{x,s\in[a,b]} \left|K_\varepsilon(x,s)\right| = \max_{x,s\in[a,b]} \left|K(x,s) - K_в(x,s)\right| \le \varepsilon .$$

Аппроксимировать ядро вырожденным с любой заданной точностью можно хотя бы потому, что в двумерном случае верна теорема Вейерштрасса о равномерной аппроксимации на квадрате $[a,b]\times[a,b]$ непрерывной по совокупности переменных функции полиномами, зависящими от двух переменных: $P_N(x,s) = \sum\limits_{\substack{n+k\le N \\ n,k=\overline{0,N}}} a_{nk} x^n s^k$.

Вернемся к интегральному уравнению и запишем его в виде $y = \lambda T_\varepsilon y + \lambda S_\varepsilon y + f$, где T_ε - интегральный оператор с вырожденным ядром $K_в(x,s)$, а S_ε - интегральный оператор с невырожденным ядром $K_\varepsilon(x,s)$. Будем считать, что λ фиксировано и перепишем уравнение в виде $\left(I - \lambda S_\varepsilon\right) y = \lambda T_\varepsilon y + f$.

Если по заданному λ выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $|\lambda| < \dfrac{1}{\varepsilon\,(b-a)}$, то λ станет “малым” для оператора S_ε, и оператор $\left(I - \lambda S_\varepsilon\right)$ будет обратимым: $\left(I - \lambda S_\varepsilon\right)^{-1} = I + \lambda R_\varepsilon$, где R_ε - интегральный оператор с ядром $R_\varepsilon(x,s,\lambda)$. Введем новую функцию: $\left(I - \lambda S_\varepsilon\right) y = Y$.

В силу обратимости оператора $\left(I - \lambda S_\varepsilon\right)$ имеет место взаимно однозначное соответствие: $y \Leftrightarrow Y$. Отсюда $Y = \lambda (T_\varepsilon + \lambda T_\varepsilon R_\varepsilon) Y + f$.

Покажем, что уравнение для Y является уравнением с вырожденным ядром. Ядро интегрального оператора $T_\varepsilon + \lambda T_\varepsilon R_\varepsilon$ вырождено так как ядро оператора T_ε вырождено, и

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} a_k(x)\, b_k(\xi)\, R_\varepsilon(\xi,s,\lambda)\, d\xi = \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} a_k(x)\, \widetilde{b}_k(s,\lambda), \quad \text{где} \quad \widetilde{b}_k(s,\lambda) = \int_a^b b_k(\xi)\, R_\varepsilon(\xi,s,\lambda)\, d\xi .$$

Тем самым, мы показали, что любому интегральному уравнению с невырожденным ядром эквивалентно некоторое интегральное уравнение с вырожденным ядром. На основании этого можно получить результаты, аналогичные полученным выше для уравнений с вырожденными ядрами.

Сформулируем теперь 4 **теоремы Фредгольма**.

Теорема 1. Однородное уравнение

$$(1) \qquad \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\, \varphi(s)\, ds = 0$$

и союзное с ним однородное уравнение

$$(2) \qquad \psi(x) - \lambda \int_a^b K^*(x,s)\, \psi(s)\, ds = 0, \qquad K^*(x,s) = K(s,x)$$

при любом фиксированном λ имеют либо только тривиальные решения, либо одинаковое конечное число линейно независимых решений $\varphi_1,...,\varphi_n$ и $\psi_1,...,\psi_n$ соответственно.

Теорема была доказана для интегральных уравнений с вырожденными и симметрическими ядрами. В общем случае она доказывается путем сведения интегрального уравнения с невырожденным ядром к интегральному уравнению с вырожденным ядром. То, что любое характеристическое число имеет конечную кратность, также было доказано ранее.

Теорема 2. Для разрешимости неоднородного уравнения

$$(3) \qquad \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\, \varphi(s)\, ds = f(x)$$

необходимо и достаточно, чтобы неоднородность $f(x)$ была ортогональна всем линейно независимым решениям однородного союзного уравнения (2) ($f(x) \perp \psi_1, \psi_2, ..., \psi_p$, если λ - характеристическое число).

Теорема была доказана для случаев симметрических и вырожденных ядер. В общем случае она доказывается путем сведения интегрального уравнения с невырожденным ядром к интегральному уравнению с вырожденным ядром.

Теорема 3 (**Альтернатива Фредгольма**).

Либо неоднородное уравнение (3) разрешимо для любой неоднородности $f(x)$ либо однородное уравнение (1) имеет нетривиальное решение.

Теорема была доказана для случаев симметрических и вырожденных ядер. В общем случае она доказывается путем сведения интегрального уравнения с невырожденным ядром к интегральному уравнению с вырожденным ядром.

Теорема 4. Множество характеристических чисел однородного уравнения (1) не более, чем счетно, с единственной возможной предельной точкой ∞.

Этот результат справедлив для любого вполне непрерывного оператора. Нами он был получен для вполне непрерывных самосопряженных операторов и, тем самым, доказан для случая симметрических ядер. Для интегральных операторов с вырожденными ядрами результат тривиален.

Замечание. Все эти теоремы мы доказали для случая, когда $K(x,s)$ - непрерывная функция по совокупности переменных на $[a,b]\times[a,b]$; $f(x)$, $y(x)$ - непрерывные на $[a,b]$ функции; $K(x,s)$, $f(x)$, $y(x)$ - вещественные функции.

Экзаменационные вопросы

1) Определения и формулировки теорем.

1. Записать интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром.
2. Сформулировать определение союзного интегрального уравнения.
3. Сформулировать условие разрешимости неоднородной системы линейных алгебраических уравнений.
4. Сформулировать теорему о числе линейно независимых решений однородного уравнения Фредгольма 2-го рода и союзного с ним (1-я теорема Фредгольма). При каких условиях на ядра интегральных операторов эта теорема была доказана в лекционном курсе?
5. Сформулировать теорему о необходимом и достаточном условии разрешимости неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода (2-я теорема Фредгольма). При каких условиях на ядра интегральных операторов эта теорема была доказана в лекционном курсе?
6. Сформулировать альтернативу Фредгольма (3-я теорема Фредгольма). При каких условиях на ядра интегральных операторов эта теорема была доказана в лекционном курсе?
7. Сформулировать теорему о характеристических числах интегрального оператора Фредгольма (4-я теорема Фредгольма). При каких условиях на ядра интегральных операторов эта теорема была доказана в лекционном курсе?

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Доказать, что если λ не является характеристическим числом, то интегральное уравнение Фредгольма 2 рода с вырожденным ядром имеет и притом единственное решение для любой непрерывной функции $f(x)$.
2. Доказать, что для любого λ число линейно независимых решений однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром и союзного с ним однородного уравнения одинаково.
3. Доказать, что неоднородное уравнение Фредгольма 2 рода с вырожденным ядром разрешимо тогда и только тогда, когда неоднородность $f(x)$ ортогональна всем линейно независимым решениям однородного союзного уравнения.
4. Доказать, что неоднородное уравнение Фредгольма 2 рода с вырожденным ядром разрешимо для любой неоднородности - непрерывной функции $f(x)$ - тогда и только тогда, когда однородное уравнение имеет только тривиальное решение.
5. Доказать эквивалентность задачи решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и задачи решения неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром.
6. Получить уравнение для отыскания характеристических чисел интегрального оператора Фредгольма с вырожденным ядром.
7. Получить интегральное представление решения неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром через определители Фредгольма при условии, что λ не является характеристическим числом.
8. Доказать, что любое интегральное уравнение Фредгольма 2 рода $y = \lambda A y + f$ с невырожденным ядром при фиксированном λ можно заменить эквивалентным интегральным уравнением с вырожденным ядром.