<u>Лекция №8</u>

§14. Задача Штурма-Лиувилля.

Рассмотрим начально-краевую задачу для дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, описывающего малые поперечные колебания струны. Струна рассматривается как гибкая упругая нить. Если колебаний нет, то струна занимает отрезок $[0,l]$ на оси x. Колебания струны происходят в плоскости *(x,u)* и описываются функцией $u = u(x,t)$, $t \ge 0$ – время. В случае отсутствия внешних сил уравнение имеет следующий вид (так называемое однородное волновое уравнение):

$$\rho(x)u_{tt} = C_0 u_{xx}$$

(u_{tt} и u_{xx} - частные производные второго порядка по t и x соответственно).

Вывод этого уравнения можно найти в любом учебнике по уравнениям математической физики. Здесь $\rho(x)$ – линейная плотность, C_0 – натяжение струны, которое предполагается постоянным в процессе малых колебаний.

Для однозначного определения решения требуется задать начальные условия

$$u(x,0) = \phi(x); \quad u_t(x,0) = \psi(x);$$

($\phi(x)$ – начальное смещение, $\psi(x)$ – начальная скорость) и граничные условия

$$u(0,t) = 0; \quad u(l,t) = 0$$

(такие условия называются однородными граничными условиями первого рода).

Для решения поставленной начально-краевой задачи применим метод разделения переменных. Будем искать все неравные тождественно нулю решения однородного волнового уравнения, удовлетворяющие однородным граничным условиям и представимые в виде произведения $u = X(x)T(t)$. Подставляя это произведение в исходное уравнение, получаем

$$\rho(x)X(x)T''(t) = C_0 X''(x)T(t)$$

и разделяем переменные:

$$\frac{X''(x)}{\rho(x)X(x)} = \frac{T''(t)}{C_0 T(t)}.$$

Последнее равенство возможно лишь в том случае, если

$$\frac{X''(x)}{\rho(x)X(x)} = \frac{T''(t)}{C_0 T(t)} = -\lambda,$$

где λ - константа. Поэтому для функции $X(x)$ получаем уравнение

$$X''(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0.$$

Подставив произведение $X(x)T(t)$ в граничные условия, получим дополнительные условия для определения $X(x)$: $\quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0$.

Поскольку мы ищем нетривиальные решения, то необходимо решать задачу на собственные значения и собственные функции, т.е. найти все значения параметра λ, при которых существует нетривиальное решение уравнения

$$X''(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0,$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям первого рода

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

Эта задача является частным случаем задачи Штурма-Лиувилля, которую мы исследуем ниже. Сейчас же мы выпишем решение в простейшем случае $\rho(x) = \rho_0 = const$.

Обозначив $\dfrac{C_0}{\rho_0} = a^2$, после разделения переменных получим уравнение

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda$$

и краевую задачу на собственные значения и собственные функции для $X(x)$:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0; \qquad X(0) = 0, \quad X(l) = 0.$$

В дальнейшем будем считать, что $X(x)$ – вещественная функция. Можно доказать (см. ниже), что собственные значения могут быть только вещественными даже, если $X(x)$ – комплекснозначная функция. Легко убедиться также в том, что если λ отрицательное число или нуль, то краевая задача для $X(x)$ имеет только тривиальное решение. Рекомендуем читателю проделать соответствующие выкладки самостоятельно.

Итак, будем искать собственные значения только среди положительных λ. Общее решение уравнения в этом случае имеет вид $X(x) = C_1 \sin(x\sqrt{\lambda}) + C_2 \cos(x\sqrt{\lambda})$. Подставляя это выражение в первое граничное условие, найдем $C_2 = 0$. Подставляя его же во второе граничное условие и сокращая на C_1 (заметим, что $C_1 \neq 0$, т.к. мы ищем нетривиальное решение), получаем уравнение для собственных значений: $\sin(l\sqrt{\lambda}) = 0$. Отсюда собственные значения $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $n = 1, 2, \ldots$, а собственные функции $X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x$.

Эти функции хорошо знакомы из курса математического анализа. Там было доказано, что данная система функций является замкнутой в пространстве $h[0,l]$. Заметим, что $\| X_n \|^2 = \frac{l}{2}$. Заметим также, что записанная задача является задачей на собственные значения и собственные функции для одномерного оператора Лапласа (взятого со знаком минус), поскольку $X''(x) \equiv \Delta_1 X(x)$, где Δ_1 - одномерный оператор Лапласа.

Для временной составляющей получаем уравнение $T_n'' + a^2 \lambda_n T_n = 0$. Отсюда $T_n = A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at$, где A_n, B_n - произвольные постоянные.

Решение начально-краевой задачи ищем теперь в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at \right) \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x,$$

т.е. в виде ряда Фурье по собственным функциям $X_n(x)$ с коэффициентами Фурье $T_n(t)$ (именно поэтому метод разделения переменных называют также методом Фурье). Каждый член ряда удовлетворяет как уравнению, так и однородным граничным условиям первого рода и представляет собой стоячую волну. Поэтому, если можно менять местами дифференцирование и суммирование, то записанный ряд удовлетворяет как уравнению, так и граничным условиям.

Попытаемся удовлетворить теперь и начальным условиям. Подставляя $t = 0$, получаем $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l}x = \varphi(x)$, где $A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\frac{\pi n}{l}x\,dx$ - коэффициент Фурье функции $\varphi(x)$.

Дифференцируя по t и полагая $t = 0$, имеем $u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a \cdot B_n \cdot \sin\frac{\pi n}{l}x$, где $B_n = \frac{2}{l}\frac{l}{\pi n a}\int_0^l \psi(x) \sin\frac{\pi n}{l}x\,dx$ - коэффициент Фурье функции $\psi(x)$.

Поскольку поведение ряда для решения определяется коэффициентами A_n и B_n, то возможность менять местами дифференцирование и суммирование определяется свойствами функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Этот вопрос подробно исследуется в курсе методов математической физики.

Рассмотренная задача на собственные значения и собственные функции является частным случаем задачи Штурма-Лиувилля, к изучению которой мы и приступаем.

Рассмотрим первую краевую задачу на собственные значения и собственные функции для оператора Штурма-Лиувилля (сокращенно задачу Штурма-Лиувилля):

$$\begin{cases} Ly + \lambda\rho(x)y = 0 \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases},$$

где оператор L имеет вид $Ly = \dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy}{dx}\right) - q(x)y$, а функции $p(x),\ q(x),\ \rho(x)$ удовлетворяют следующим условиям: $p(x)$ непрерывно дифференцируемая, а $q(x)$ и $\rho(x)$ непрерывные на $[a,b]$ функции, причем $\rho(x), p(x) > 0$, а $q(x) \ge 0$ при $x \in [a,b]$.

Замечание. Возможны и другие типы краевых условий.

Докажем, что оператор L является симметрическим на подпространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций из $h[a,b]$, удовлетворяющих однородным граничным условиям первого рода. Из этого результата сразу следует, что при изучении задачи Штурма-Лиувилля достаточно ограничиться лишь вещественными λ.

Возьмем произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции $y(x)$ и $z(x)$, удовлетворяющие граничным условиям $y(a) = y(b) = z(a) = z(b) = 0$.

Покажем, что $(Ly, z) = (y, Lz)$, где скалярное произведение берется в пространстве $h[a,b]$. Легко видеть, что

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)z(x)dx = p(x)\frac{dy}{dx}z(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{dy}{dx}\cdot\left(p(x)\frac{dz}{dx}\right)dx = -y\,p\frac{dz}{dx}\Big|_a^b + \int_a^b y\,\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dz}{dx}\right)dx.$$

Подстановки обращаются в нуль в силу граничных условий. Отсюда сразу же следует симметричность оператора L.

Рассмотрим теперь краевую задачу

$$\begin{cases} Ly = f(x) \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}.$$

Если существует функция Грина, то решение этой задачи для заданной непрерывной функции $f(x)$, может быть представлено в виде $y(x) = \int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi$, где $G(x,\xi)$ - функция Грина, которая непрерывна по совокупности аргументов и симметрична, т.е. $G(x,\xi) = G(\xi,x)$ для любых $x,\ \xi \in [a,b]$.

Как было доказано в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений, для существования функции Грина достаточно доказать, что однородная краевая задача

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

имеет только тривиальное решение.

Допустим, что это не так. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что в некоторой точке $x_0 \in (a,b)$ решение имеет максимальное положительное значение $y(x_0) > 0$, причем $y'(x_0) = 0$ (если решение не принимает положительных значений, то домножим его на –1). Поскольку $y(b)=0$, то найдется точка $x_1 \in (a,b),\ \ x_0 < x_1$, такая что $y(x) > 0$ для любого $x \in [x_0, x_1]$ и $y'(x_1) < 0$.

Запишем однородное уравнение в виде $\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy}{dx}\right) = q(x)y$ и проинтегрируем его в пределах от x_0 до x_1. Учитывая знаки функций $p(x)$ и $q(x)$, получаем противоречие: $0 > py'\,|_{x_0}^{x_1} = \int\limits_{x_0}^{x_1} q(x)y(x)dx \ge 0.$

Итак, функция Грина существует. Интегрируя от *a* до *b* уравнение в задаче Штурма-Лиувилля, домножив его предварительно на функцию Грина, имеем

$$\begin{cases} Ly = -\lambda\rho(x)y \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = -\lambda \int\limits_a^b G(x,\xi)\,\rho(\xi)\,y(\xi)\ d\xi$$

В качестве упражнения, докажите, что задача Штурма-Лиувилля эквивалентна задаче на характеристические числа и собственные функции

$$y(x) = -\lambda \int\limits_a^b G(x,\xi)\rho(\xi)y(\xi)\ d\xi$$

для интегрального оператора с непрерывным ядром $G(x,\xi)\rho(\xi)$.

Ясно, что если $\rho(\xi) \neq 1$ тождественно, то ядро интегрального оператора не является симметрическим. Симметризуем его. Для этого умножим записанное выше уравнение слева и справа на $\sqrt{\rho(x)}$ и введем новую функцию $\varphi(x) = y(x)\sqrt{\rho(x)}$ и новое ядро $K(x,\xi) = \sqrt{\rho(x)}\,G(x,\xi)\sqrt{\rho(\xi)}$, которое является непрерывным и симметрическим.

Получаем задачу на характеристические числа и собственные функции для интегрального оператора с непрерывным симметрическим ядром

$$\varphi(x) = -\lambda \int\limits_a^b K(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi\ .$$

Докажем, что ядро *K(x,ξ)* является замкнутым. Для этого достаточно показать, что из равенства $\int\limits_a^b K(x,\xi)\,z(\xi)\,d\xi = 0$ следует, что $z(\xi) \equiv 0$. Заметим, что предыдущее равенство имеет вид $\int\limits_a^b \sqrt{\rho(x)}\,G(x,\xi)\sqrt{\rho(\xi)}\,z(\xi)\,d\xi = 0$ или $\int\limits_a^b G(x,\xi)\sqrt{\rho(\xi)}\,z(\xi)\,d\xi = 0$.

Действуя оператором L на левую и правую часть этого равенства, получим, что для всех x имеет место $\sqrt{\rho(x)}\ z(x) = 0$, что и требовалось доказать.

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема. Задача Штурма-Лиувилля эквивалентна задаче на характеристические числа и собственные функции для интегрального оператора с непрерывным симметрическим замкнутым ядром.

Используя эквивалентность задачи Штурма-Лиувилля задаче на характеристические числа и собственные значения для интегрального оператора с симметрическим непрерывным и не равным тождественно нулю ядром, докажем следующие теоремы.

Теорема. Существует бесконечно много собственных значений λ_n.

<u>Доказательство</u>. Существование хотя бы одного характеристического числа λ_n для интегрального оператора с симметрическим непрерывным и не равным тождественно нулю ядром следует из результатов §4. Предположим, что характеристических чисел конечное число. Тогда, как было доказано в §6, ядро можно представить в виде

$K(x,s) = -\sum_{n=1}^{N} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(s)}{\lambda_n}$, где $\varphi_n(x)$ - ортонормированные собственные функции. Таким образом, ядро вырождено, а поэтому не может быть замкнутым. Теорема доказана.

Теорема. Каждое собственное значение задачи Штурма-Лиувилля имеет кратность единица.

Доказательство. Заметим, что собственное значение кратности единица называется простым собственным значением. Докажем, что каждое собственное значение является простым. Предположим, что это не так. Тогда некоторому собственному значению λ соответствуют две линейно независимые собственные функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Поскольку дифференциальное уравнение в задаче Штурма-Лиувилля является линейным уравнением второго порядка, то $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную систему решений. Поэтому любое решение дифференциального уравнения $Ly + \lambda\rho(x)y = 0$ представимо в виде $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Поскольку функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ обращаются в нуль в точках a и b, то этим же свойством обладает и любое другое решение. Но это противоречит теореме существования решения задачи Коши для уравнения $Ly + \lambda\rho(x)y = 0$ с условиями Коши, имеющими, например, вид $y(a) = 1,\quad y'(a) = 0$. Теорема доказана.

Теорема. Собственные функции задачи Штурма-Лиувилля ортогональны с весом $\rho(x)$.

Доказательство. По доказанному в § 5 собственные функции $\varphi_n(x)$ ортогональны. Более того, что их можно выбрать так, что они образуют ортонормированную систему, т.е.

$$\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_n(x)\,dx = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}.$$

Учитывая, что $\varphi_n(x) = y_n(x)\sqrt{\rho(x)}$, получим $\int_a^b y_k(x)\,y_n(x)\,\rho(x)\,dx = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$,

что и требовалось доказать.

Теорема. Собственные значения задачи Штурма-Лиувилля положительны.

Доказательство. Запишем уравнение в задаче Штурма-Лиувилля, которому удовлетворяет собственная функция $y_n(x)$, считая, что $y_n(x)$ нормирована с весом $\rho(x)$, т.е. $\int_a^b y_n^2(x)\,\rho(x)\,dx = 1$.

Умножим теперь уравнение на $y_n(x)$ и проинтегрируем от a до b по частям с учетом граничных условий. Получим

$$Ly_n + \lambda_n\,\rho\,y_n = 0 \Rightarrow \int_a^b y_n\left(Ly_n + \lambda_n\,\rho\,y_n\right)dx = \int_a^b y_n \frac{d}{dx}\left(p\frac{dy_n}{dx}\right)dx - \int_a^b q\,y_n^2\,dx + \lambda_n\int_a^b \rho\,y_n^2\,dx =$$

$$= -\int_a^b p\left(\frac{dy_n}{dx}\right)^2 dx - \int_a^b q\,y_n^2\,dx + \lambda_n = 0.$$

Отсюда $$\lambda_n = \int_a^b \left[q\,y_n^2 + p\left(\frac{dy_n}{dx}\right)^2\right]dx.$$

Поскольку $q(x) \ge 0,\ p(x) > 0$, а $y_n(x)$ не равно постоянной, то собственное значение λ_n строго положительно. Теорема доказана.

<u>*Следствие*</u>. Имеет место следующая оценка снизу для наименьшего собственного значения ($\tilde{x} \in [a,b]$):

$$\lambda_1 = \int_a^b \left[q\, y_1^2 + p\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 \right] dx \ge \int_a^b \frac{q(x)}{\rho(x)} \rho(x)\, y_1^2(x) dx \ge \frac{q(\tilde{x})}{\rho(\tilde{x})} \int_a^b \rho(x)\, y_1^2(x) dx = \frac{q(\tilde{x})}{\rho(\tilde{x})} \ge \min_{x\in[a,b]} \frac{q(x)}{\rho(x)} \ge 0 .$$

Следующая теорема имеет исключительно важное значение в теории дифференциальных уравнений.

Теорема. (Стеклова). Любая дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ и обращающаяся в нуль на концах отрезка функция $f(x)$ раскладывается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по ортонормированной с весом $\rho(x)$ системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, y_n(x)$, где коэффициенты Фурье вычисляются по формуле $f_n = \int_a^b f(x)\, \rho(x)\, y_n(x) dx$.

<u>Доказательство</u>. Подействуем на функцию $f(x)$ оператором L. Получим непрерывную функцию $h(x)$. Тогда функция $f(x)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} L\, f(x) = h(x) \\ f(a) = f(b) = 0 \end{cases}.$$

Используя функцию Грина, получаем:

$$f(x) = \int_a^b G(x,s)\, h(s)\, ds = \int_a^b K(x,s) \frac{h(s)}{\sqrt{\rho(x)}\sqrt{\rho(s)}} ds .$$

Введем новые функции $f(x)\sqrt{\rho(x)} = F(x)$ и $\frac{h(s)}{\sqrt{\rho(s)}} = H(s)$. Очевидно, что обе эти функции непрерывны на отрезке $[a,b]$, а $F(x)$ истокопредставима через симметрическое непрерывное ядро $K(x,s)$: $F(x) = \int_a^b K(x,s)\, H(s)\, ds$.

По теореме Гильберта-Шмидта $F(x)$ раскладывается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по ортонормированной системе собственных функций интегрального оператора с ядром $K(x,s)$, т.е. $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n\, \varphi_n(x)$, причем коэффициенты Фурье вычисляются по формулам $F_n = \int_a^b F(x)\, \varphi_n(x) dx$.

Поскольку $\varphi_n(x) = y_n(x)\sqrt{\rho(x)}$, то $\sqrt{\rho(x)}\, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n\, y_n(x)\sqrt{\rho(x)}$, и после сокращения на $\rho(x)$ получим, что $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n y_n(x)$. Докажите самостоятельно, что и после сокращения ряд сходится равномерно и абсолютно в силу свойств $\rho(x)$.

Для коэффициентов Фурье имеем

$$F_n = \int_a^b f(x)\sqrt{\rho(x)}\, y_n(x)\sqrt{\rho(x)}\, dx = \int_a^b f(x)\, y_n(x)\, \rho(x) dx = f_n .$$

Теорема Стеклова доказана.

В заключение параграфа заметим, что все полученные в данном параграфе результаты остаются справедливыми для второй краевой задачи (граничные условия имеют вид $y'(a)=0,\ \ y'(b)=0$), третьей краевой задачи (граничные условия имеют вид $y'(a)-h_1 y(a)=0,\ \ y'(b)+h_2 y(b)=0$, $h_1,\ h_2$ – положительные постоянные), а также для смешанных краевых задач, когда левом конце задается условие одного рода, а на правом другого. Необходимо помнить только, что у второй краевой задачи в случае $q(x)\equiv 0$, существует нулевое собственное значение.

Экзаменационные вопросы

1) Определения и формулировки теорем.

1. Записать оператор Штурма-Лиувилля.
2. Сформулировать задачу Штурма-Лиувилля в случае однородных граничных условий первого рода.
3. Описать свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля в случае однородных граничных условий первого рода.
4. Сформулировать теорему Стеклова.

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Доказать, что оператор Штурма-Лиувилля является симметрическим в пространстве $h[a,b]$, если в качестве области его определения рассматривать подпространство дважды непрерывно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль на концах отрезка $[a,b]$.
2. Доказать, что задача Штурма-Лиувилля с однородными граничными условиями первого рода эквивалентна задаче на характеристические числа и собственные функции для интегрального оператора с непрерывным симметрическим и замкнутым ядром.
3. Доказать, что задача Штурма-Лиувилля с однородными граничными условиями первого рода имеет бесконечно много собственных значений.
4. Доказать, что собственные значения задачи Штурма-Лиувилля с однородными граничными условиями первого рода простые (имеют кратность единица).
5. Доказать, что собственные функции задачи Штурма-Лиувилля с однородными граничными условиями первого рода ортогональны с весом $\rho(x)$
6. Доказать, что собственные значения задачи Штурма-Лиувилля с однородными граничными условиями первого рода положительны.
7. Доказать теорему Стеклова.
8. Доказать, что для минимального собственного значения задачи Штурма-Лиувилля с однородными граничными условиями первого рода имеет место неравенство $\lambda_1 \ge \min\limits_{x\in[a,b]} \dfrac{q(x)}{\rho(x)} \ge 0$.