Лекция №11

§5. Задачи с подвижной границей.

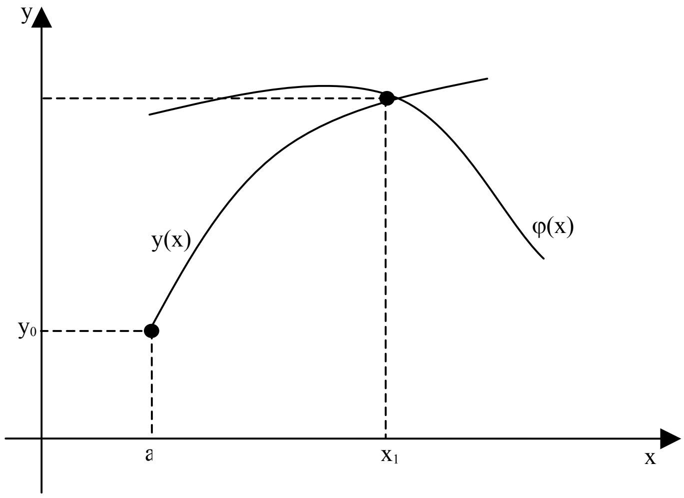
Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$V\left[y\right]=\int\limits_{a}^{x_1} F(x,y,y')\,dx$$

при условии, что левый конец функции, на которой достигается экстремум, закреплен:

$$y(a)=y_0\,,$$

а правый может перемещаться вдоль заданной кривой $y=\varphi(x)$ (см. рисунок, x_1 - абсцисса точки пересечения кривых $y(x)$ и $\varphi(x)$, $x\in[a,b]$).



Пример: пусть требуется найти расстояние от точки на плоскости с координатами (a,y_0) до кривой $y=\varphi(x)$. Задача сводится к минимизации функционала $\int\limits_{a}^{x_1}\sqrt{1+(y')^2}\,dx$.

Введем функционал $B[y]$, полагая $x_1=B[y]$.

Теорема (Необходимые условия экстремума для задачи с левым закрепленным и правым подвижным концами).

Пусть

1) $y(x)$ осуществляет экстремум в поставленной выше задаче с подвижной границей и дважды непрерывно дифференцируема;
2) F – функция, непрерывная со своими частными производными до второго порядка включительно;
3) $\varphi(x)$ непрерывна с первой производной.

Тогда:

1) $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера $F_y-\dfrac{d}{dx}F_{y'}=0$;
2) при $x=x_1$ выполнено условие трансверсальности $\left(F-(y'-\varphi')F_{y'}\right)\Big|_{x=x_1}=0$.

Доказательство. Прежде всего, докажем, что выполняется уравнение Эйлера. В самом деле, если $y(x)$ такова, что на ней реализуется экстремум функционала $V[y]$ в классе функций, у которых один конец закреплен, а другой подвижен, то на ней реализуется экстремум и в классе функций, когда оба конца закреплены (т.е. задано граничное условие на правом конце $y(x_1)=\varphi(x_1)$, где x_1 – абсцисса точки пересечения функции, на которой достигается экстремум, с кривой $y=\varphi(x)$). Как доказано в параграфе 3 для задачи с закрепленными концами, в этом случае выполняется уравнение Эйлера.

Вычислим теперь вариацию функционала $V[y]$. Зададим приращение $h(x)$ и рассмотрим функцию переменной t:

$$V\left[y+th\right]=\int\limits_a^{B[y+th]} F(x,y+th,y'+th')\,dx .$$

Вычислим ее производную по t:

$$\frac{d}{dt}V\left[y+th\right]=\int\limits_a^{B[y+th]}\left[F_y h+F_{y'}h'\right]dx+F\left(B\left[y+th\right],y(B)+th(B),y'(B)+th'(B)\right)\cdot\frac{d}{dt}B\left[y+th\right].$$

Положим $t=0$, тогда $y+th=y(x)$, $B\left[y+th\right]\Big|_{t=0}=x_1$, а вариация функционала $V[y]$ равна

$$\delta V=\frac{d}{dt}V\left[y+th\right]_{t=0}=\int\limits_a^{x_1}\left[F_y\left(x,y,y'\right)h+F_{y'}\left(x,y,y'\right)h'\right]dx+F\left(x_1,y(x_1),y'(x_1)\right)\cdot\frac{d}{dt}B\left[y+th\right]_{t=0} .$$

Интегрируя второй член в подынтегральном выражении по частям, используя граничное условие на левом конце $h(a)=0$ и равенство $\int\limits_a^{x_1}\left(F_y(x,y,y')-\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y')\right)h\ dx=0$, являющееся следствием уравнения Эйлера, получим выражение для вариации и приравняем его нулю:

$$\delta V=F_{y'}\left(x_1,y(x_1),y'(x_1)\right)h(x_1)+F\left(x_1,y(x_1),y'(x_1)\right)\cdot\left.\frac{dB}{dt}\right|_{t=0}=0 .$$

Обозначим $B\left[y+t\cdot h\right]=B(t)$ и заметим, что $B(0)=x_1$. По определению $B(t)$ имеем $y\left(B(t)\right)+t\cdot h\left(B(t)\right)\equiv\varphi\left(B(t)\right)$, так как абсцисса точки пересечения кривой, записанной в левой части, с кривой $y=\varphi(x)$ есть $B(t)$. Продифференцируем записанное тождество по t и получим

$$y'\left(B(t)\right)B'(t)+t\cdot h'\left(B(t)\right)B'(t)+h\left(B(t)\right)=\varphi'\left(B(t)\right)B'(t) ,$$

откуда

$$B'(t)=\frac{h\left(B(t)\right)}{\varphi'\left(B(t)\right)-y'\left(B(t)\right)-t\cdot h'\left(B(t)\right)}$$

Рассмотрим два случая:

1) Если $\varphi'(x_1)\neq y'(x_1)$, т.е. $\varphi'\left(B(t)\right)-y'\left(B(t)\right)\Big|_{t=0}\neq 0$, то можно выполнить предельный переход при $t\to 0$:

$$B'(0)=\frac{h\left(x_1\right)}{\varphi'\left(x_1\right)-y'\left(x_1\right)} .$$

В этом случае выражение для вариации примет вид

$$\delta V=\left\{F_{y'}\Big|_{x=x_1}+F\Big|_{x=x_1}\cdot\frac{1}{\varphi'\left(x_1\right)-y'\left(x_1\right)}\right\}h(x_1)=0 .$$

Учитывая, что $h(x_1)$ – произвольное число, и сокращая на $h(x_1)$, получаем

$$\left(F-(y'-\varphi')F_{y'}\right)\Big|_{x=x_1}=0 ,$$

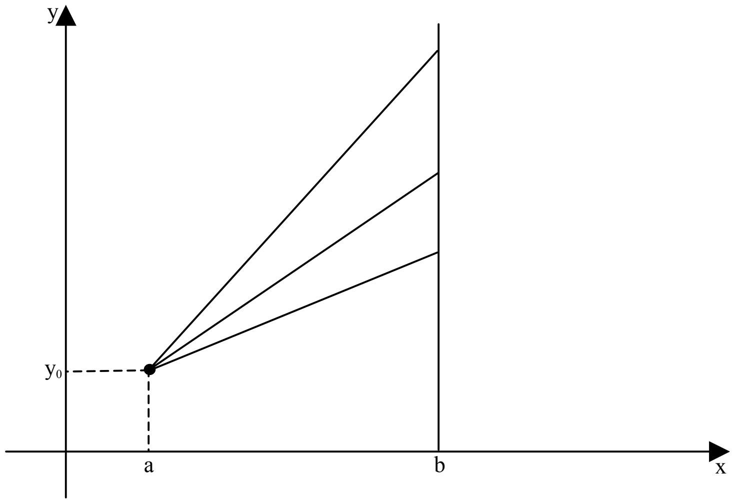
т.е. условие трансверсальности, сформулированное в теореме.

2) Если $\varphi'(x_1)=y'(x_1)$, то $B'(t)\xrightarrow[t\to 0]{}\infty$. В этом случае равенство нулю вариации

$$\delta V = F_{y'}\cdot h + F\cdot \left.\frac{dB}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

возможно тогда и только тогда, если $F\big(x_1, y(x_1), y'(x_1)\big)=0$. Легко видеть, что это и есть условие трансверсальности в случае $\varphi'(x_1)=y'(x_1)$. Теорема доказана.

Рассмотрим важный частный случай – задачу со свободным правым концом.



Пусть $B(t)=b$, т.е. левый конец закреплен, а правый может перемещаться по прямой $x=b$ (см. рисунок). В этом случае мы не можем ввести функцию $\varphi(x)$, т.к. уравнение границы $x=b$. Понятно, что $\left.\frac{dB}{dt}\right|_{t=0}=0$. Повторяя рассуждения, приведшие нас к получению вариации в предыдущей теореме, имеем

$$\delta V = F_{y'}\cdot h(b)=0.$$

Отсюда $\left.F_{y'}\right|_{x=b}=0$ - граничное условие в случае, когда правый конец свободен.

Рассмотрим теперь случай, когда функционал имеет вид

$$V[y]=\int_a^{B[y]} A(x,y)\sqrt{1+(y')^2}\,dx,$$

где функция $A(x,y)\neq 0$ и дифференцируема по x, y. В частности, если $A\equiv 1$, то функционал $V[y]$ определяет длину кривой. Условие трансверсальности в этом случае переходит в условие ортогональности кривых $y=y(x)$ к $y=\varphi(x)$.

В самом деле,

$$A(x_1,y(x_1))\sqrt{1+(y'(x_1))^2}-\big(y'(x_1)-\varphi'(x_1)\big)\frac{A(x_1,y(x_1))y'(x_1)}{\sqrt{1+(y'(x_1))^2}}=0.$$

Приводя к общему знаменателю и сокращая на ненулевые множители, имеем

$$1+\varphi'(x_1)y'(x_1)=0,$$

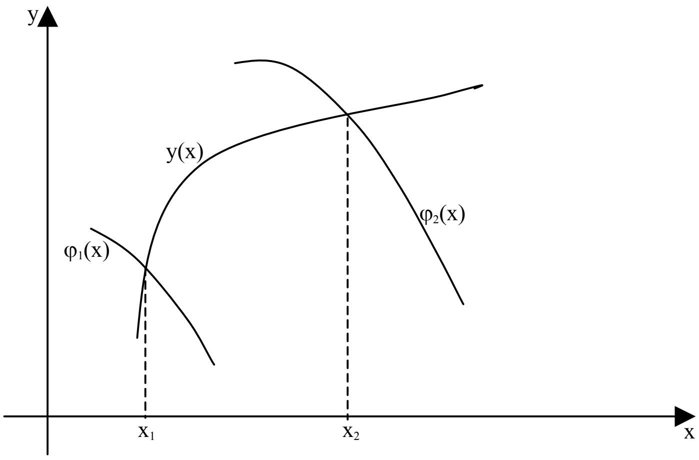
откуда

$$y'(x_1)=-\frac{1}{\varphi'(x_1)},$$

т.е. условие ортогональности.

Если рассматривать задачу с подвижной границей, в которой правый конец закреплен, а левый – подвижен, то получим тот же результат, только с условием трансверсальности на левом конце.

Теперь рассмотрим задачу, в которой оба конца являются подвижными: пусть левый конец функции, на которой осуществляется экстремум функционал $V[y]$, может перемещаться вдоль кривой $y=\varphi_1(x)$, а правый конец вдоль кривой $y=\varphi_2(x)$ (см. рисунок). В этом случае должны выполнятся условия трансверсальности на правом и на левом концах.



Действительно, если функция $y(x)$ такова, что на ней реализуется экстремум в классе функций, когда оба конца подвижны, то на ней реализуется экстремум и в классе функций, когда левый конец «правильно» закреплен, а правый подвижен. Из этого следует, что выполняется условие трансверсальности на правом конце (аналогичное утверждение справедливо и для левого конца). Очевидно (см. доказательство теоремы), что функция, на которой достигается экстремум, удовлетворяет уравнению Эйлера.

В заключение параграфа рассмотрим пример. Пусть требуется найти экстремум функционала

$$V[y]=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}dx$$

при условии, что левый конец закреплен, а правый может перемещаться вдоль заданной прямой, т.е. $y(0)=0$, $y_1=x_1-5$.

Запишем первый интеграл уравнения Эйлера

$$F-y'F_{y'}=C,$$

или

$$\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}-y'\frac{y'}{y\sqrt{1+(y')^2}}=C,$$

или

$$1=C\cdot y\sqrt{1+(y')^2}\ .$$

Введем параметр t, полагая $y'=\operatorname{tg}t$. Тогда $y=\tilde{C}_1\cos t$, и для определения $x(t)$ запишем

$$dx=\frac{dy}{y'}=-\frac{\tilde{C}_1\sin t\,dt}{\operatorname{tg}t}=-\tilde{C}_1\cos t,$$

откуда

$$x=-\tilde{C}_1\sin t+\tilde{C}_2.$$

Исключая параметр t, получаем $(x-C_1)^2+y^2=C_2{}^2$ - уравнение окружности с центром в точке $(C_1,0)$ и радиусом C_2, а условие на левом конце $y(0)=0$ дает $(x-C)^2+y^2=C^2$.

Чтобы найти константу C заметим, что для данного функционала условие трансверсальности совпадает с условием ортогональности кривых $y=y(x)$ к $y=\varphi(x)$. Окружность ортогональна прямой лишь в том случае, когда диаметр окружности лежит на этой прямой. Отсюда получаем, что $C=5$, т.е. $(x-5)^2+y^2=25$, или $y=\pm\sqrt{10x-x^2}$.

<u>Экзаменационные вопросы</u>

1) Определения и формулировки теорем.

1. Записать условие трансверсальности.
2. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума простейшего функционала вариационного исчисления, считая, что левый конец закреплен, а правый подвижен, и записать необходимые условия экстремума в этой задаче.
3. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума простейшего функционала вариационного исчисления, считая, что левый конец свободен, а правый подвижен, и записать необходимые условия экстремума в этой задаче.
4. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума простейшего функционала вариационного исчисления, считая, что оба конца подвижны, и записать необходимые условия экстремума в этой задаче.
5. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума простейшего функционала вариационного исчисления, считая, что оба конца свободны, и записать необходимые условия экстремума в этой задаче.

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Получить необходимые условия экстремума простейшего функционала вариационного исчисления, считая, что левый конец закреплен, а правый подвижен.
2. Получить необходимые условия экстремума простейшего функционала вариационного исчисления, считая, что левый конец свободен, а правый подвижен.
3. Получить необходимые условия экстремума простейшего функционала вариационного исчисления, считая, что оба конца подвижны.
4. Получить необходимые условия экстремума простейшего функционала вариационного исчисления, считая, что оба конца свободны.
5. Показать, что в задаче поиска экстремума функционала $V[y]=\int\limits_a^{B[y]} A(x,y)\sqrt{1+(y')^2}\,dx$ с левым закрепленным и правым подвижным концами, где функция $A(x,y)$ дифференцируема, и $A(x,y)\neq 0$, условие трансверсальности совпадает с условием ортогональности.
6. Найти экстремум функционала $V[y]=\int\limits_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}dx$ при условии, что левый конец закреплен, т.е. $y(0)=0$, а правый может перемещаться вдоль прямой $y_1=x_1-5$.