Лекция №12

§6. Достаточные условия экстремума в задаче с закрепленными концами.

Вернемся к задаче с закрепленными концами: найти минимум функционала

$$V\left[y\right]=\int_a^b F\left(x,y,y'\right)dx$$

при условии, что

$$y(a)=A\,,\qquad y(b)=B\,.$$

Необходимое условие экстремума было сформулировано в §3. Получим теперь достаточное условие минимума (достаточное условие максимума получается аналогично). Конечно, можно попытаться исследовать знак производной $\left.\frac{d^2}{dt^2}V\left[y+th\right]\right|_{t=0}$ для всех допустимых $h(x)$. Здесь же мы будем использовать другой подход.

Пусть на функции $y=\bar{y}(x)$ достигается минимум функционала $V[y]$ для задачи с закрепленными концами:

$$\bar{y}(a)=A\,,\qquad \bar{y}(b)=B\,.$$

Это означает, что $V\left[\tilde{y}\right]-V\left[\bar{y}\right]\geq 0$ для всех $\tilde{y}(x)$ из окрестности $\bar{y}(x)$ таких, что $\tilde{y}(a)=A$, $\tilde{y}(b)=B$. Функционал $V\left[\tilde{y}\right]$ мы можем рассматривать как криволинейный интеграл второго рода

$$V\left[\tilde{y}\right]=\int_a^b F\left(x,\tilde{y},\tilde{y}'\right)dx=\int_{\tilde{C}} F\left(x,y,y'\right)dx$$

по кривой $\tilde{C}=\left\{(x,y):\ y=\tilde{y}(x),\ x\in\left[a,b\right]\right\}$.

Рассмотрим кривую $\bar{C}=\left\{\left(x,y\right):\ y=\bar{y}\left(x\right),\ x\in\left[a,b\right]\right\}$ и обозначим $V[\tilde{y}]=I(\tilde{C})$, $V[\bar{y}]=I(\bar{C})$. Нужно оценить знак выражения

$$I(\tilde{C})-I(\bar{C})=\int_{\tilde{C}} F\left(x,y,y'\right)dx-\int_{\bar{C}} F\left(x,y,y'\right)dx\,,$$

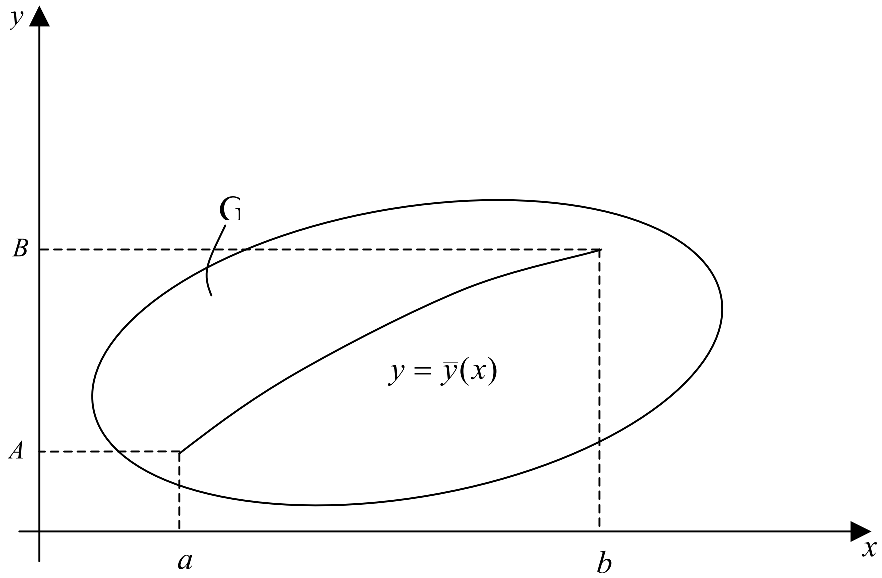
точнее получить условия, при которых это выражение неотрицательно. Для этой цели преобразуем разность интегралов по двум, вообще говоря, различным кривым в интеграл по одной кривой.

Будем считать, что функция $y=\bar{y}(x)$ содержится в <u>центральном</u> или <u>собственном</u> поле экстремалей. Напомним, что <u>экстремалью</u> называется решение уравнения Эйлера.

Пусть область G на плоскости (x,y) содержит кривую, заданную функцией $\bar{y}(x)$. Если через каждую точку области G проходит и при том единственная кривая, являющаяся решением уравнения Эйлера, то говорят, что множество таких экстремалей образует <u>собственное поле</u>.

Поле экстремалей называется <u>центральным</u>, если выполнены те же условия, но все экстремали пересекаются в одной точке ((a,A) или (b,B)).

В обоих случаях можно однозначно определить функцию $p(x,y)$: $p(x,y)$ - производная в точке x той экстремали $y(x)$, которая проходит через точку (x, y). В случае центрального поля функция $p(x, y)$ определена везде в области G, кроме одной из точек пересечения экстремалей (a, A) или (b, B).



Рассмотрим интеграл

$$J(\tilde{C}) = \int_{\tilde{C}} \left\{ F\left(x, y, p(x, y)\right) + \left(\frac{d}{dx} y(x) - p(x, y) \right) F_p\left(x, y, p(x, y)\right) \right\} dx$$

по кривой $\tilde{C} \subseteq G$. Заметим, что $J(\bar{C}) = I(\bar{C}) = V[\bar{C}]$, так как $\bar{y}(x)$ принадлежит полю экстремалей и, следовательно, $\dfrac{d}{dx} y(x) - p(x, y) = 0$ на кривой $\bar{C}$.

Перепишем исследуемый интеграл в виде $J(\tilde{C}) = \int_{\tilde{C}} \left[F\left(x, y, p\right) - pF_p \right] dx + F_p dy$ и заметим, что это криволинейный интеграл второго рода.

Покажем, что под знаком интеграла стоит полный дифференциал. Для этого достаточно убедиться в том, что

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(F - pF_p\right) = \frac{\partial}{\partial x} F_p .$$

Поскольку $F \equiv F\left(x, y, p(x, y)\right)$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} F_p = F_{px} + F_{pp} p_x ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(F - pF_p\right) = F_y + F_p p_y - F_p p_y - p\left(F_{py} + F_{pp} p_y\right).$$

Через каждую точку (x, y) области G проходит экстремаль, поэтому в каждой точке (x, y) выполняется соотношение (уравнение Эйлера)

$$\left. \left(F_y - \frac{d}{dx} F_p\left(x, y, p(x, y)\right) \right) \right|_{y = y(x)} = 0 ,$$

где $y = y(x)$ - экстремаль (т.е. решение уравнения Эйлера), проходящая через заданную точку (x, y). Или

$$F_y - F_{px} - F_{py}p - F_{pp}\left(p_x + p_y p\right) = 0,$$

то есть равенство $\frac{\partial}{\partial y}\left(F - pF_p\right) = \frac{\partial}{\partial x}F_p$ выполняется.

Итак, интеграл $J(\tilde{C})$ не зависит от выбора пути интегрирования, и

$$V[\overline{y}] = J(\tilde{C}) = \int\limits_{\tilde{C}}\left\{F\left(x, y, p\right) + \left(y' - p\right)\cdot F_p\left(x, y, p\right)\right\}dx = I(\overline{C}).$$

Поэтому

$$\Delta V = I(\tilde{C}) - I(\overline{C}) = I(\tilde{C}) - J(\tilde{C}) = \int\limits_{\tilde{C}}\left\{F\left(x, y, y'\right) - F\left(x, y, p\right) - \left(y' - p\right)\cdot F_p\left(x, y, p\right)\right\}dx.$$

Определим теперь функцию Вейерштрасса:

$$E(x, y, y', p) \equiv F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)\cdot F_p(x, y, p).$$

Очевидно достаточное условие минимума: $E \geq 0$ в окрестности $\overline{y}(x)$. В зависимости от того, какая выбирается окрестность – слабая или сильная, мы получим слабый или сильный минимум.

Сформулируем еще раз достаточное условие сильного (слабого) минимума:

1) $y = \overline{y}(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера;

2) $y = \overline{y}(x)$ может быть включена в собственное или центральное поле экстремалей;

3) $E(x, y, y', p) \geq 0$ в сильной (слабой) окрестности $y = \overline{y}(x)$.

В случае сильного (слабого) максимума достаточно выполнение условия $E \leq 0$.

Получим еще одно достаточное условие минимума, которое легко проверить. Будем предполагать, что $F(x, y, y')$ дважды непрерывно дифференцируема по y'. Разложим эту функцию в ряд Тейлора в точке p (по третьему аргументу) с остаточным членом в форме Лагранжа

$$F\left(x, y, y'\right) = F\left(x, y, p\right) + \left(y' - p\right)\cdot F_{y'}\left(x, y, p\right) + \frac{\left(y' - p\right)^2}{2}F_{y'y'}\left(x, y, q\right),$$

$$q \in \left[p, y'\right] \quad \text{или} \quad q \in \left[y', p\right].$$

Тогда функция Вейерштрасса примет имеет вид

$$E(x, y, y', p) = \frac{(y' - p)^2}{2}F_{y'y'}(x, y, q).$$

Чтобы было выполнено условие $E \geq 0$, можно потребовать $F_{y'y'} \geq 0$ в (слабой или сильной) окрестности экстремали $y = \overline{y}(x)$. Это условие Лежандра для (слабого или сильного) минимума. Для слабого минимума достаточно выполнения неравенства $F_{y'y'} > 0$ на самой экстремали $y = \overline{y}(x)$. Сформулируйте самостоятельно условия Лежандра для сильного и слабого максимума.

Рассмотрим пример. Пусть требуется исследовать на экстремум функционал

$$V[y]=\int_0^a (y')^3 dx$$

с граничными условиями $y(0)=0$, $y(a)=b$, $a>0$, $b>0$.

Из уравнения Эйлера $y''=0$ получаем $y=C_1x+C_2$. Используя граничные условия, находим кривую, для которой выполняется необходимое условие экстремума:

$$y=\bar{y}(x)=\frac{b}{a}x .$$

Эта кривая может быть включена в центральное поле экстремалей – множество функций вида $y=Cx$, или собственное поле экстремалей - множество функций вида $y=\frac{b}{a}x+C$ (C – произвольная постоянная).

Функция Вейерштрасса имеет вид

$$E(x,y,y',p)=(y')^3-p^3-(y'-p)3p^2=(y'-p)^2(y'+2p)$$

и обращается в нуль при $y'=p$, $y'=-2p$.

На рассматриваемой кривой $y=\bar{y}(x)=\frac{b}{a}x$ имеем $p=\frac{b}{a}>0$. Поэтому в слабой окрестности $\bar{y}(x)$ выполнено неравенство $E\geq 0$; в сильной окрестности это неравенство, очевидно, не выполняется. Тем самым, функция $\bar{y}(x)$ реализует слабый минимум функционала $V[y]$.

Еще легче проверить условие Лежандра:

$$F_{y'y'}=6y'\Big|_{y=\frac{b}{a}x}=6\frac{b}{a}>0 .$$

В заключение скажем несколько слов о численных методах в вариационном исчислении:

1) Прежде всего уравнение $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$ с граничными условиями $y(a)=A$, $y(b)=B$ можно решать численными методами.

2) Можно использовать также следующий подход. Экстремум функционала $V[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx$ ищется на множестве функций вида $y_n=\sum_{n=1}^{N}\alpha_n w_n(x)$, где $w_n(x)$ - заданные функции. Задача сводится к отысканию минимума (или максимума) функции N переменных. Очевидно, что

$$\max\ V[y]\geq \max\ \varphi(\alpha_1,...\alpha_n)\geq \min\ \varphi(\alpha_1,...\alpha_n)\geq \min\ V[y].$$

Можно применять и другие подходы. Из-за недостатка времени мы не можем рассмотреть их подробно. Эти методы изучаются в курсе “Численные методы”, а также в специальных курсах, посвященных численным методам решения экстремальных задач.

Экзаменационные вопросы

1) Определения и формулировки теорем.

1. Сформулировать определение центрального поля экстремалей.
2. Сформулировать определение собственного поля экстремалей.
3. Сформулировать достаточные условия сильного минимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
4. Сформулировать достаточные условия слабого минимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
5. Сформулировать достаточные условия Лежандра сильного минимума в задаче с закрепленными концами.
6. Сформулировать достаточные условия Лежандра слабого минимума в задаче с закрепленными концами.
7. Сформулировать достаточные условия сильного максимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
8. Сформулировать достаточные условия слабого максимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
9. Сформулировать достаточные условия Лежандра сильного максимума в задаче с закрепленными концами.
10. Сформулировать достаточные условия Лежандра слабого максимума в задаче с закрепленными концами.

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Обосновать достаточные условия сильного минимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
2. Обосновать достаточные условия слабого минимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
3. Обосновать достаточные условия Лежандра сильного минимума в задаче с закрепленными концами.
4. Обосновать достаточные условия Лежандра слабого минимума в задаче с закрепленными концами.
5. Обосновать достаточные условия сильного максимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
6. Обосновать достаточные условия слабого максимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
7. Обосновать достаточные условия Лежандра сильного максимума в задаче с закрепленными концами.
8. Обосновать достаточные условия Лежандра слабого максимума в задаче с закрепленными концами.
9. Найти экстремали функционала $V[y]=\int_0^a \left(y'\right)^3 dx$ с граничными условиями $y(0)=0$, $y(a)=b$, $a>0$, $b>0$ и определить тип экстремума (слабый или сильный, минимум или максимум) в зависимости от значений параметров a и b.