Глава 3. ПОНЯТИЕ О МЕТОДАХ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

Лекции №№ 13-14

§1. Интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода как пример некорректно поставленной задачи.

Эта тема по предмету рассмотрения примыкает к первой главе, однако, помещена в конец курса, поскольку существенно использует методы вариационного исчисления.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$Ay \equiv \int_a^b K(x,s)y(s)\,ds = f(x), \qquad x \in [c,d].$$

Как и ранее, будем предполагать, что ядро $K(x,s)$ - функция, непрерывная по совокупности аргументов $x \in [c,d]$, $s \in [a,b]$, а решение $y(s)$ - непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция. Тем самым, мы можем рассматривать оператор A как действующий в следующих пространствах:

$$A: C[a,b] \to h[c,d]$$
$$A:\ h[a,b] \to h[c,d].$$

Остановимся подробнее на первом случае и покажем, что задача решения уравнения Фредгольма первого рода при условии $A: C[a,b] \to h[c,d]$ является некорректно поставленной.

Напомним определение корректной постановки задачи.

1) Решение существует для любой непрерывной на $[c,d]$ функции $f(x)$.

На самом же деле, это не так: существует бесконечно много непрерывных функций, для которых решения нет. Мы не можем доказать это утверждение в общем виде. Для доказательства необходимо использовать некоторые сведения из функционального анализа, знание которых выходит за рамки данного курса. Поэтому поясним это утверждение только на примере.

Пусть ядро $K(x,s)$ таково, что существует $K'_x(x_0,s)$, $x_0 \in (c,d)$, для любого $s \in [a,b]$. Тогда существует производная $\left.\left(\int_a^b K(x,s)y(s)ds\right)'\right|_{x=x_0}$ для любой непрерывной функции $y(s)$. А теперь в качестве $f(x)$ возьмём непрерывную функцию такую, что $\left.f'(x)\right|_{x=x_0}$ не существует. Тогда очевидно, что решение интегрального уравнения также не существует.

2) Единственность решения.

Будем требовать, чтобы ядро было замкнуто. Тогда, если решение есть, то оно единственно.

Первые два условия корректности эквивалентны условию существования обратного оператора A^{-1} с областью определения $D(A^{-1}) = h[c,d]$. Если ядро замкнуто, то обратный оператор существует, однако область его определения не совпадает с $h[c,d]$.

3) Устойчивость решения.

Это означает, что для любой последовательности $f_n \to \bar{f}$, $Ay_n = f_n, A\bar{y} = \bar{f}$, последовательность $y_n \to \bar{y}$. Устойчивость эквивалентна непрерывности обратного оператора A^{-1} при условии, что обратный оператор существует.

Покажем, что это не так. Рассмотрим следующий пример. Пусть последовательность непрерывных функций $y_n(s)$, $n = 1,2,3,...$ такова, что $y_n(s) \neq 0$ на промежутке $\left[\frac{a+b}{2} - d_n, \frac{a+b}{2} + d_n\right]$ и обращается в нуль вне данного интервала. Пусть также $\max\limits_{s\in[a,b]} |y_n(s)| = 1$, а последовательность чисел $d_n \to 0+0$. Такая функция может быть выбрана, например, кусочно-линейной. Тогда для любого $x \in [c,d]$

$$|f_n(x)| = \left|\int_a^b K(x,s)y_n(s)ds\right| = \left|\int_{\frac{a+b}{2}-d_n}^{\frac{a+b}{2}+d_n} K(x,s)y_n(s)ds\right| \le K_0 \cdot 1 \cdot 2d_n \to 0$$

при $n \to \infty$, где $K_0 = \max|K(x,s)|$, $x \in [c,d]$, $s \in [a,b]$.

Последовательность функций $f_n(x)$ равномерно, а, следовательно, и в $h[c,d]$, сходится к пределу $\bar{f} = 0$. Решение уравнения $A\bar{y} = \bar{f}$ в этом случае $\bar{y} = 0$, однако последовательность y_n не стремится к $\bar{y}$, так как $\|y_n - \bar{y}\|_{C[a,b]} = 1$.

Ранее мы доказали, что оператор Фредгольма является вполне непрерывным при действии из $h[a,b]$ в $h[c,d]$ и при действии из $C[a,b]$ в $h[c,d]$. Мы также привели пример последовательности y_n, $\|y_n\|_{h[a,b]} = 1$, из которой нельзя выделить сходящуюся в $h[a,b]$ подпоследовательность. В качестве такой последовательности можно выбрать, например,

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\frac{\pi n(x-a)}{b-a}, \qquad n = 1,2,3,... \,.$$

Очевидно, что эта последовательность равномерно, т.е. по норме $C[a,b]$, ограничена, но из нее нельзя выделить сходящуюся в $C[a,b]$ подпоследовательность.

Предположим теперь, что оператор A^{-1} является непрерывным. Нетрудно показать (сделайте это самостоятельно), что, если оператор B: $h[c,d] \to C[a,b]$ является непрерывным, а оператор A вполне непрерывный, то $BA: C[a,b] \to C[a,b]$ - вполне непрерывный оператор. Отсюда следует, что поскольку для любого n выполнено

$$A^{-1}Ay_n = y_n,$$

то последовательность y_n компактна, что неверно. Таким образом, оператор, обратный к вполне непрерывному оператору, не может быть непрерывным.

Итак, поскольку задача решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода некорректно поставлена, то даже при очень малых ошибках в задании $f(x)$ решение может либо отсутствовать, либо очень сильно отличаться от искомого точного решения. Некорректно поставленные задачи очень часто встречаются при обработке результатов физического эксперимента, в частности, в астрофизике, геофизике, ядерной физике и т. д., следовательно, функция $f(x)$ находится в результате эксперимента, поэтому неизбежно содержит ошибки.

§2. Метод регуляризации А.Н. Тихонова.

А. Н. Тихонов в 1963 году заложил основы теории решения некорректно поставленных задач, введя понятие регуляризирующего алгоритма (оператора).

Оператор $R(f_\delta,\delta)\equiv R_\delta(f_\delta)$ называется регуляризирующим алгоритмом (РА) для решения операторного уравнения $Ay=f$; $A: C[a,b]\to h[c,d]$, если:

1) оператор $R_\delta(f_\delta)$ определен для любого $f_\delta\in h[c,d]$ и любого $0<\delta<+\infty$ и отображает $h[c,d]\to C[a,b]$ при каждом фиксированном $\delta>0$;

2) для любой функции $\bar y\in C[a,b]$ и любой функции $f_\delta\in h[c,d]$ такой, что $\left\|f_\delta-\bar f\right\|_{h[c,d]}\le\delta$, $\delta>0$, $A\bar y=\bar f$, приближенное решение $y_\delta=R_\delta(f_\delta)\xrightarrow{C[a,b]}\bar y$ при $\delta\to 0$.

Точно также можно определить регуляризирующий алгоритм решения операторного уравнения $Ay=f$, $A: N_1\to N_2$, где N_1 и N_2 – нормированные пространства.

Некорректно поставленная задача называется регуляризируемой, если существует хотя бы один регуляризирующий алгоритм ее решения. Все математические задачи, сводящиеся к решению операторного уравнения $Ay=f$, могут быть классифицированы следующим образом:

1) корректно поставленные;
2) некорректно поставленные, регуляризируемые;
3) некорректно поставленные, нерегуляризируемые.

Понятно, что корректно поставленные задачи являются регуляризируемыми, поскольку в качестве регуляризирующего алгоритма можно выбрать обратный оператор.

Рассмотрим регуляризирующий алгоритм решения интегрального уравнения первого рода, предложенный А. Н. Тихоновым.

Введем функционал Тихонова

$$M^\alpha[y]=\left\|Ay-f\right\|^2_{h[c,d]}+\alpha\left(\|y\|^2_{h[a,b]}+\|y'\|^2_{h[a,b]}\right),$$

где $y(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция, $f\in h[c,d]$, а число $\alpha>0$ называется параметром регуляризации.

Теорема (А. Н. Тихонов). Для любой функции $f\in h[c,d]$ и любого параметра регуляризации $\alpha>0$ существует и притом единственная функция $y^\alpha(s)$, реализующая минимум функционала $M^\alpha[y]$ и являющаяся решением краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения Эйлера.

Доказательство. Для упрощения опустим обозначения функциональных пространств при записи норм в функционале Тихонова, т.е.

$$M^\alpha[y]=\left\|Ay-f\right\|^2+\alpha\left(\|y\|^2+\|y'\|^2\right),$$

где $\quad \left\|y\right\|^2=\int\limits_a^b y^2(s)\,ds,\qquad \left\|y'\right\|^2=\int\limits_a^b\left(y'(s)\right)^2ds,\qquad \left\|Ay-f\right\|^2=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b K(x,s)y(s)ds-f(x)\right)^2dx.$

Далее мы вычислим вариацию функционала Тихонова и приравняем ее нулю. При этом будет найдена так называемая сильная вариация, а читателям предлагается посчитать и приравнять нулю так называемую слабую вариацию

$$\left.\frac{d}{dt}M^\alpha[y+th]\right|_{t=0}=0,$$

и убедиться, что результат не изменится.

Определим сначала граничные условия. Будем предполагать, что мы не знаем значения $y(s)$ на концах отрезка $[a,b]$, поэтому рассмотрим задачу со свободными концами. В параграфе 2.5 для этого случая были получены граничные условия в задаче поиска экстремума функционала $V[y]=\int\limits_a^b F(x,y,y')\,dx$, а именно

$$F_{y'}\Big|_a=0, \qquad F_{y'}\Big|_b=0.$$

Заметим, что в функционале Тихонова от y' зависит только слагаемое $\alpha\|y'\|^2=\alpha\int\limits_a^b\left(y'(s)\right)^2ds$. Поэтому $F_{y'}=2\alpha y'$, и мы получаем однородные граничные условия второго рода

$$y'(a)=0, \qquad y'(b)=0.$$

Вычислим вариацию функционала Тихонова. Для этого зададим приращение аргумента δy и выделим линейную по δy часть разности $M^\alpha[y+\delta y]-M^\alpha[y]$. Для получения уравнения Эйлера приравняем линейную часть приращения к нулю.

Итак, рассмотрим разность

$$M^\alpha[y+\delta y]-M^\alpha[y]=\|A(y+\delta y)-f\|^2+\alpha\left(\|y+\delta y\|^2+\|y'+\delta y'\|^2\right)-M^\alpha[y],$$

где δy непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая граничным условиям

$$\delta y'(a)=0, \quad \delta y'(b)=0.$$

Заметим, что

$$\|A(y+\delta y)-f\|^2=\|(Ay-f)+A\delta y\|^2=\left((Ay-f)+A\delta y,(Ay-f)+A\delta y\right)=$$
$$=(Ay-f,Ay-f)+2((Ay-f),A\delta y)+(A\delta y,A\delta y)=\|(Ay-f)\|^2+2\left(A^*Ay-A^*f,\delta y\right)+\|A\delta y\|^2.$$

Последний член в этом выражении удовлетворяет неравенству $\|A\delta y\|^2\le\|A\|^2\|\delta y\|^2$, из которого следует, что $\|A\delta y\|^2=o(\|\delta y\|)$.

Далее
$$\|y+\delta y\|^2=(y+\delta y,y+\delta y)=\|y\|^2+2(y,\delta y)+\|\delta y\|^2;$$
$$\|y'+\delta y'\|^2=(y'+\delta y',y'+\delta y')=\|y'\|^2+2(y',\delta y')+\|\delta y'\|^2.$$

Преобразуем $(y',\delta y')=\int\limits_a^b y'(s)\delta y'(s)ds=y'\delta y\Big|_a^b-\int\limits_a^b y''(s)\delta y(s)ds=-(y'',\delta y)$, причем $y'\delta y\Big|_a^b=0$, так как $y'(a)=y'(b)=0$.

Итак,

$$M^\alpha[y+\delta y]-M^\alpha[y]=$$
$$=2\left(A^*Ay-A^*f,\delta y\right)+\|A\delta y\|^2+2\alpha\left((y,\delta y)-(y'',\delta y)\right)+\alpha\|\delta y\|^2+\alpha\|\delta y'\|^2=$$
$$=2\left(A^*Ay-A^*f+\alpha(y-y''),\delta y\right)+\|A\delta y\|^2+\alpha\left(\|\delta y\|^2+\|\delta y'\|^2\right).$$

Выделим линейную по δy часть приращения и приравняем ее нулю:

$$\left(A^*Ay-A^*f+\alpha(y-y''),\delta y\right)=\int\limits_a^b\left(A^*Ay-A^*f+\alpha(y-y'')\right)\delta y(s)ds=0.$$

Читателям предлагается самим сформулировать и доказать необходимый вариант основной леммы вариационного исчисления (параграф 2.3) и вывести уравнение Эйлера

$$A^*Ay-A^*f+\alpha(y-y'')=0.$$

Окончательно получаем, что функция, на которой достигается экстремум функционала Тихонова, является решением второй краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} A^*Ay + \alpha\left(y - y''\right) = A^*f; \\ y'(a) = 0\ , \quad y'(b) = 0. \end{cases}$$

На решении этой задачи достигается минимум функционала Тихонова потому, что, если y является решением этой задачи, то

$$M^{\alpha}\left[y + \delta y\right] - M^{\alpha}\left[y\right] = \left\|A\delta y\right\|^2 + \alpha\left(\left\|\delta y\right\|^2 + \left\|\delta y'\right\|^2\right) \geq 0$$

для любого допустимого приращения δy.

Перепишем краевую задачу в следующем виде:

$$\begin{cases} y'' - y = \dfrac{1}{\alpha}\left(A^*Ay - A^*f\right); \\ y'(a) = 0\ , \quad y'(b) = 0. \end{cases}$$

Как известно из курса дифференциальных уравнений, если существует функция Грина задачи

$$\begin{cases} y'' - y = F; \\ y'(a) = 0\ , \quad y'(b) = 0 \end{cases},$$

то ее решение представимо в виде $y(\tau) = \int\limits_a^b G(\tau,\xi)F(\xi)\,d\xi$.

Докажем, что функция Грина существует. Для доказательства достаточно показать, что однородная краевая задача

$$\begin{cases} y'' - y = 0; \\ y'(a) = 0\ , \quad y'(b) = 0 \end{cases}$$

имеет только тривиальное решение.

Общее решение уравнения $y'' - y = 0$ можно записать в виде

$$y = \tilde{C}_1 e^{\tau} + \tilde{C}_2 e^{-\tau} = C_1 \mathrm{ch}(\tau - a) + C_2 \mathrm{ch}(\tau - b).$$

Из первого граничного условия получаем $C_2 = 0$, а из второго - $C_1 = 0$. Поэтому указанная краевая задача имеет только тривиальное решение, и, следовательно, функция Грина существует. В качестве упражнения рекомендуем построить функцию Грина.

Если мы подействуем интегральным оператором с ядром - функцией Грина (мы обозначим этот оператор G) - на левую и правую часть интегро-дифференциального уравнения Эйлера, то получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y = \frac{1}{\alpha}\left(GA^*Ay - GA^*f\right),$$

эквивалентное второй краевой задаче для уравнения Эйлера. Докажите самостоятельно (рассуждая, как и в параграфе 1.14) эквивалентность этих двух задач.

Ядро оператора A^*A имеет вид

$$\tilde{K}(\xi,s) = \int\limits_c^d K(\eta,\xi)K(\eta,s)\,d\eta,$$

а ядро оператора GA^*A -

$$\tilde{G}(\tau,s) = \int\limits_a^b G(\tau,\xi)\tilde{K}(\xi,s)\,d\xi.$$

Ядра $\tilde{K}(\eta,s)$, $K(\xi,s)$, $G(\tau,\xi)$ непрерывны по совокупности аргументов, следовательно, ядро $\tilde{G}(\tau,s)$ также непрерывно по совокупности аргументов. Столь же очевидно, что неоднородность $-\dfrac{1}{\alpha}\left(GA^*f\right)$ в полученном уравнении Фредгольма второго рода также является непрерывной функцией. Поэтому, чтобы доказать существование и единственность решения уравнения Фредгольма, в силу альтернативы Фредгольма достаточно доказать, что однородное уравнение

$$y = \frac{1}{\alpha} G A^* A y$$

имеет только тривиальное решение.

Однородное уравнение эквивалентно следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} \alpha\left(y - y''\right) + A^* A y = 0; \\ y'(a) = y'(b) = 0. \end{cases}$$

Пусть y – любое ее решение. Домножим уравнение слева и справа на y и проинтегрируем в пределах от a до b, заметив, что

$$\left(y, y\right) = \|y\|^2, \quad \left(A^* A y, y\right) = \|Ay\|^2, \quad -\left(y'', y\right) = -\int_a^b y''(\tau) y(\tau)\, d\tau = -y'y\Big|_a^b + \int_a^b \left(y'\right)^2 d\tau = \|y'\|^2.$$

Получим, что решение краевой задачи удовлетворяет равенству

$$\|Ay\|^2 + \alpha\|y\|^2 + \alpha\|y'\|^2 = 0.$$

Поскольку $\alpha > 0$, то $y \equiv 0$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Лемма. Рассмотрим множество функций $y(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ и таких, что

$$\|y\|^2_{h[a,b]} + \|y'\|^2_{h[a,b]} \le C^2, \quad C > 0.$$

Тогда это множество равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Доказательство. Заметим, что из неравенства в условии леммы следует, что $\|y\| \le C$, $\|y'\| \le C$.

Докажем сначала равностепенную непрерывность. Возьмем произвольную фенкцию $y(x)$, удовлетворяющую условиям леммы, и любые $x_1, x_2 \in [a,b]$. Тогда

$$\left|y(x_2) - y(x_1)\right| = \left|\int_{x_1}^{x_2} y' dx\right| \le \sqrt{\left|\int_{x_1}^{x_2} 1 \cdot dx\right|} \cdot \sqrt{\left|\int_{x_1}^{x_2} \left(y'(x)\right)^2 dx\right|} \le \sqrt{|x_2 - x_1|}\sqrt{\int_a^b \left(y'(x)\right)^2 dx} \le C\sqrt{|x_2 - x_1|}.$$

Из этого неравенства следует, что множество функций является равностепенно непрерывным.

Докажем теперь равномерную ограниченность.

Из неравенства $\int_a^b y^2(x)dx \le C^2$, $C > 0$, применяя теорему о среднем, получим

$$y^2(\xi)\int_a^b dx \le C^2, \ \xi \in [a,b],$$

откуда $\left|y(\xi)\right| \le \dfrac{C}{\sqrt{b-a}}$.

Выберем произвольную точку $x \in [a,b]$. Тогда

$$\left|y(x)\right| = \left|y(\xi) + y(x) - y(\xi)\right| \le \left|y(\xi)\right| + \left|y(x) - y(\xi)\right| \le \frac{C}{\sqrt{b-a}} + C\sqrt{|x-\xi|} \le \frac{C}{\sqrt{b-a}} + C\sqrt{b-a} \equiv \widetilde{C},$$

где $\widetilde{C}$ не зависит ни от x, ни от y. Следовательно, множество функций равномерно ограничено. Лемма доказана.

Следствие. Пусть $\{y_n(x)\}$, $n = 1,2,3,...$ - последовательность непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций, удовлетворяющих неравенству

$$\|y_n\|^2_{h[a,b]} + \|y'_n\|^2_{h[a,b]} \le C^2, \quad C > 0,$$

тогда эта последовательность является компактной в пространстве $C[a,b]$.

Доказательство. По доказанной выше лемме, эта последовательность является равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной. По теореме Арцела из неё можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность. Равномерно сходящаяся последовательность непрерывных функций сходится к непрерывной функции.

Теорема (А. Н. Тихонов). Пусть

$f_\delta(x)$ - непрерывная на сегменте $[c,d]$ функция, причем $\|f_\delta - \bar{f}\|_{h[c,d]} \le \delta$, где $\delta \in (0,\delta_0]$, $\delta_0 > 0$;

функция $\bar{f}$ такова, что $A\bar{y} = \bar{f}$, где A - интегральный оператор с ядром $K(x,s)$, $x \in [c,d]$, $s \in [a,b]$, непрерывным по совокупности аргументов и замкнутым, а $\bar{y}(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a,b]$.

Пусть параметр регуляризации $\alpha(\delta) > 0$ удовлетворяет следующим требованиям: $\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ и для любого $\delta \in (0,\delta_0]$ имеет место $\dfrac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \le C$, где $C > 0$.

Тогда $y_\delta^{\alpha(\delta)} = \arg\min M^{\alpha(\delta)}[y]$, т.е. функция, на которой достигается минимум функционала Тихонова

$$M^\alpha[y] = \|Ay - f_\delta\|^2_{h[c,d]} + \alpha\left(\|y\|^2_{h[a,b]} + \|y'\|^2_{h[a,b]}\right), \quad \alpha=\alpha(\delta),$$

обладает тем свойством, что $y_\delta^{\alpha(\delta)} \xrightarrow{C[a,b]} \bar{y}$ при $\delta \to 0$.

Перед тем, как перейти к доказательству теоремы, заметим, что мы получим регуляризирующий алгоритм Тихонова для случая, когда интегральный оператор действует $A: C[a,b] \to h[c,d]$ при дополнительном условии непрерывной дифференцируемости точного решения интегрального уравнения, т.е. $\bar{y} \in C^{(1)}[a, b]$.

Доказательство. Заметим, что функция $y_\delta^{\alpha(\delta)}$ существует и единственна, как было доказано выше. Предположим, что $y_\delta^{\alpha(\delta)}$ не стремится к $\bar{y}$ в $C[a,b]$ при $\delta \to 0$. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и последовательность $\delta_k \to 0$ такие, что $\|y_{\delta_k}^{\alpha(\delta_k)} - \bar{y}\|_{C[a,b]} \ge \varepsilon > 0$.

Заметим, что

$$M^\alpha[y_\delta^\alpha] = \min M^\alpha[y] \le M^\alpha[\bar{y}] = \|A\bar{y} - f_\delta\|^2 + \alpha\left(\|\bar{y}\|^2 + \|\bar{y}'\|^2\right) \le \delta^2 + \alpha\left(\|\bar{y}\|^2 + \|\bar{y}'\|^2\right),$$

откуда получаем

$$\|Ay_\delta^\alpha - f_\delta\|^2 + \alpha\left(\|y_\delta^\alpha\|^2 + \|(y_\delta^\alpha)'\|^2\right) \le \delta^2 + \alpha\left(\|\bar{y}\|^2 + \|\bar{y}'\|^2\right).$$

В левой части этого соотношения оба слагаемые неотрицательны. Поэтому мы можем получить два неравенства:

1) $\quad \|y_\delta^\alpha\|^2 + \|(y_\delta^\alpha)'\|^2 \le \dfrac{\delta^2}{\alpha} + \|\bar{y}\|^2 + \|\bar{y}'\|^2$

2) $\quad \|Ay_\delta^\alpha - f_\delta\|^2 \le \delta^2 + \alpha\left(\|\bar{y}\|^2 + \|\bar{y}'\|^2\right).$

Если $\alpha=\alpha(\delta)$, то так как $\dfrac{\delta^2}{\alpha} \le C$ при $\delta \in (0,\delta_0]$, из первого неравенства вытекает $\|y_\delta^{\alpha(\delta)}\|^2 + \|(y_\delta^{\alpha(\delta)})'\|^2 \le C + \|\bar{y}\|^2 + \|\bar{y}'\|^2 \le \widetilde{C}$. В силу доказанной выше леммы, последовательность $y_{\delta_k}^{\alpha(\delta_k)}$ является компактной в пространстве $C[a,b]$. Поэтому существуют такая подпоследовательность ее и такая непрерывная на $[a,b]$ функция y^*, что указанная подпоследовательность равномерно сходится к y^*.

Не ограничивая общности, будем считать, что $y_{\delta_k}^{\alpha(\delta_k)} \xrightarrow{C[a,b]} y^*$ при $k \to \infty$. Тогда

$$\left\| Ay_{\delta_k}^{\alpha(\delta_k)} - A\bar{y} \right\|_{h[c,d]} = \left\| Ay_{\delta_k}^{\alpha(\delta_k)} - f_{\delta_k} + f_{\delta_k} - \bar{f} \right\| \le \left\| Ay_{\delta_k}^{\alpha(\delta_k)} - f_{\delta_k} \right\| + \delta_k \le \sqrt{\delta_k^2 + \alpha(\delta_k)(\|\bar{y}\|^2 + \|\bar{y}'\|^2)} + \delta_k .$$

(Здесь мы использовали второе неравенство, следующее из $M^\alpha[y_\delta^\alpha] \le M^\alpha[\bar{y}]$). Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем $\|Ay^* - A\bar{y}\| = 0$ или $Ay^* = A\bar{y}$.

В силу взаимной однозначности интегрального оператора (условие замкнутости ядра) из равенства $Ay^* = A\bar{y}$ следует, что $y^* = \bar{y}$. Итак, $y_{\delta_k}^{\alpha(\delta_k)} \xrightarrow{C[a,b]} \bar{y}$ при $k \to \infty$, и мы приходим к противоречию с предположением, что $\left\| y_{\delta_k}^{\alpha(\delta_k)} - \bar{y} \right\| \ge \varepsilon > 0$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть $\delta = 0$, $f_\delta = \bar{f}$, $M^\alpha[y] = \|Ay - \bar{f}\|^2 + \alpha(\|y\|^2 + \|y'\|^2)$, $y^\alpha = \arg\min M^\alpha[y]$. Тогда $y^\alpha \xrightarrow{C[a,b]} \bar{y}$ при $\alpha \to 0+0$.

Доказательство этого утверждения во многом повторяет проделанное выше и предоставляется слушателям.

С другими способами выбора параметра регуляризации можно ознакомиться в монографии: А.Н.Тихонов, А.В.Гончарский, В.В.Степанов, А.Г.Ягола. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.

Экзаменационные вопросы

1) Определения и формулировки теорем.

1. Сформулировать определение корректно и некорректно поставленной задачи.
2. Сформулировать определение регуляризируемой некорректно поставленной задачи.
3. Сформулировать регуляризирующий алгоритм А. Н. Тихонова.
4. Записать функционал А. Н. Тихонова.
5. Сформулировать теорему о существовании и единственности минимума функционала А.Н.Тихонова.
6. Сформулировать теорему о согласовании параметра регуляризации в функционале А.Н.Тихонова с погрешностью входных данных для построения регуляризирующего алгоритма решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода.

2) Утверждения и теоремы, которые необходимо уметь доказывать. Теоретические задачи.

1. Доказать, что задача решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с «малым» λ корректно поставлена в $C[a,b]$.
2. Доказать, что задача решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с «малым» λ корректно поставлена в $h[a,b]$.
3. Доказать, что задача решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода при условии, что интегральный оператор действует $A: C[a,b] \to h[a,b]$, является некорректно поставленной.
4. Доказать, что если взаимно однозначный оператор A является вполне непрерывным при действии из $h[a,b]$ в $h[c,d]$, то обратный оператор не является ограниченным.
5. Доказать теорему о существовании и единственности минимума функционала А.Н.Тихонова.

6. Доказать теорему о согласовании параметра регуляризации в функционале А.Н.Тихонова с погрешностью входных данных для построения регуляризирующего алгоритма решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода.
7. Доказать теорему: пусть взаимно однозначный интегральный оператор с непрерывным ядром $A: C[a,b] \to h[c,d]$, и $A\bar{y} = \bar{f}$, где $\bar{y}(x)$ непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$ функция, $M^\alpha[y] = \left\| Ay - \bar{f} \right\|^2 + \alpha(\|y\|^2 + \|y'\|^2)$ (нормы соответственно в $h[c,d]$ и $h[a,b]$), $y^\alpha = \arg\min M^\alpha[y]$. Тогда $y^\alpha \xrightarrow{C[a,b]} \bar{y}$ при $\alpha \to 0+0$.
8. Доказать, что множество функций $y(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ и таких, что $\|y\|^2_{h[a,b]} + \|y'\|^2_{h[a,b]} \le C^2$, $C > 0$ равномерно ограниченно и равностепенно непрерывно.
9. Доказать, что последовательность функций $\{y_n(x)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ и удовлетворяющих неравенству $\|y_n\|^2_{h[a,b]} + \|y_n'\|^2_{h[a,b]} \le C^2$, является компактной в $C[a,b]$.
10. Исследовать на разрешимость уравнение $\int\limits_a^x y(s)ds = f(x), \quad x, s \in [a,b].$