ТЕМА 1

Метрические, нормированные и евклидовы пространства.

Основные определения и теоремы

Множество L называется (вещественным) <u>линейным пространством</u>, если для любых двух его элементов x, y определен элемент $x+y\in L$ (называемый суммой x и y), и для любого элемента $x\in L$ и любого (вещественного) числа α определен элемент $\alpha x\in L$, причем выполнены следующие условия:

1) для любых элементов $x,y\in L$ $\quad x+y=y+x$ (коммутативность сложения);
2) для любых элементов $x,y,z\in L$ $\quad (x+y)+z=x+(y+z)$ (ассоциативность сложения);
3) существует элемент $\theta\in L$ (называемый нулевым элементом, или нулем пространства L) такой, что для любого элемента $x\in L$ $\;x+\theta=x$ (существование нулевого элемента);
4) для любого элемента $x\in L$ существует элемент $(-x)\in L$ (называемый обратным к x) такой, что $x+(-x)=\theta$ (существование обратного элемента);
5) для любых элементов $x,y\in L$ и любого (вещественного) числа α $\quad \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ (дистрибутивность умножения суммы элементов на число);
6) для любых (вещественных) чисел α и β и любого элемента $x\in L$ $\quad (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ (дистрибутивность умножения суммы чисел на элемент);
7) для любых (вещественных) чисел α, β и любого элемента $x\in L$ $\quad (\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$ (ассоциативность умножения на число);
8) для любого элемента $x\in L$ $\quad 1\cdot x=x$ (свойство единицы).

Элементы $x_1,x_2,...,x_m$ линейного пространства L называются <u>линейно зависимыми</u>, если существуют такие (вещественные) числа $C_1,C_2,...,C_m$, не все равные нулю, что $\sum_{k=1}^{m}C_kx_k=\theta$; если же последнее равенство имеет место в единственном случае $C_1=C_2=...=C_m=0$, то элементы $x_1,x_2,...,x_m$ - <u>линейно независимы</u>.

Натуральное число n, называется <u>размерностью</u> линейного пространства, если существуют n линейно независимых элементов пространства, а любые $n+1$ элементов - линейно зависимы. В этом случае линейное пространство называется <u>конечномерным</u> (n-мерным).

Если для любого натурального n можно указать n линейно независимых элементов, то линейное пространство называется <u>бесконечномерным</u>.

Множество M называется <u>метрическим пространством</u>, если для любых двух его элементов $x,y\in M$ определено вещественное число $\rho(x,y)$ (называемое метрикой, или расстоянием), причем выполнены следующие условия:

1) для любых элементов $x,y\in M$ $\quad \rho(x,y)\ge 0$, $\quad$ причем $\rho(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда элементы x и y совпадают (неотрицательность метрики);
2) для любых элементов $x,y\in M$ $\quad \rho(x,y)=\rho(y,x)$ (симметричность метрики);
3) для любых элементов $x,y,z\in M$ $\quad \rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(y,z)$ (неравенство треугольника).

Метрическое пространство не обязательно является линейным.

Последовательность элементов метрического пространства $x_n\in M$, $n=1,2,...$ сходится к элементу $x_0\in M$ ($x_n\to x_0$ при $n\to\infty$), если $\rho(x_n,x_0)\to 0$ при $n\to\infty$.

Линейное пространство N называется *нормированным*, если для любого элемента $x \in N$ определено (вещественное) число $\| x \|$ (называемое нормой), причем выполнены следующие условия:

1) для любого элемента $x \in N$ $\| x \| \geq 0$, причем $\| x \| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$ - нулевой элемент пространства;
2) для любого элемента $x \in N$ и любого (вещественного) числа α $\| \alpha x \| = | \alpha | \cdot \| x \|$ (неотрицательная однородность нормы);
3) для любых элементов $x, y \in N$ $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ (неравенство треугольника).

Нормированное пространство является метрическим, если положить $\rho(x, y) = \| x - y \|$.

Последовательность элементов нормированного пространства $x_n \in N$, $n = 1, 2, \ldots$ сходится (по норме пространства N) к элементу $x_0 \in N$ ($x_n \to x_0$ при $n \to \infty$), если $\| x_n - x_0 \| \to 0$ при $n \to \infty$.

Из сходимости последовательности x_n по норме пространства следует сходимость последовательности (числовой!) норм, т.е. если $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$, то $\| x_n \| \to \| x_0 \|$ при $n \to \infty$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ элементов нормированного пространства N называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер K такой, что для любого $n \geq K$ и любого натурального p выполнено неравенство $\| x_{n+p} - x_n \| \leq \varepsilon$.

Если последовательность сходится, то она фундаментальна. Если же любая фундаментальная последовательность элементов сходится, то нормированное пространство называется *полным*.

Полное нормированное пространство называется *банаховым.*

Последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ элементов нормированного пространства N называется *ограниченной*, если существует константа C такая, что $\| x_n \| \leq C$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$ элементов нормированного пространства N, обладающая тем свойством, что из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся, называется *компактной*.

Любая компактная последовательность является ограниченной. В конечномерном пространстве верно и обратное утверждение, однако, для бесконечномерных пространств это, вообще говоря, не так.

Линейное пространство E называется *евклидовым*, для любых двух элементов $x, y \in E$ определено вещественное число (x, y), называемое скалярным произведением, причем выполнены следующие условия:

1) для любых элементов $x, y \in E$ $(x, y) = (y, x)$ (симметричность);
2) для любых элементов $x, y, z \in E$ $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ (аддитивность по первому аргументу);
3) для любых элементов $x, y \in E$ и любого вещественного числа α $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$ (однородность по первому аргументу);
4) для любого $x \in E$ $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$ (свойство скалярного квадрата).

В евклидовом пространстве E всегда можно ввести норму, порожденную скалярным произведением $\| x \|_E = \sqrt{(x, x)}$.

Для любых двух элементов x и y произвольного евклидова пространства выполняется неравенство Коши-Буняковского $(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y)$ или

$|(x,y)| \le \| x \| \cdot \| y \|$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда элементы x и y линейно зависимы.

Напомним определения основных встречающихся далее линейных пространств.

1. Нормированное пространство $C[a,b]$. Элементами этого пространства являются непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции. Норма определяется как $\|y\|_{C[a,b]} = \max\limits_{x \in [a,b]} |y(x)|$, сходимость по норме пространства $C[a,b]$ - равномерная сходимость. Пространство $C[a,b]$ - банахово (полное).
2. Нормированное пространство $C^{(p)}[a,b]$. Элементами этого пространства являются функции, непрерывные с производными до *p*-го порядка включительно на отрезке $[a,b]$. Норма определяется как $\|y\|_{C^{(p)}[a,b]} = \sum\limits_{k=0}^{p} \max\limits_{x \in [a,b]} |y^{(k)}(x)|$, сходимость по норме пространства $C^{(p)}[a,b]$ - равномерная со всеми производными до *p*-го порядка. Пространство $C^{(p)}[a,b]$ - банахово.
3. Евклидово (нормированное) пространство $h[a,b]$. Элементами этого пространства являются непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции. Для любых двух непрерывных функций положим $(y,z) = \int\limits_a^b y(x)z(x)dx$ - скалярное произведение, и введем норму, порожденную скалярным произведением $\| y \|_{h[a,b]} = \sqrt{\int\limits_a^b y^2(x)dx}$; сходимость по норме пространства $h[a,b]$ - сходимость в среднем. Пространство $h[a,b]$ не является полным.

Примеры решения задач

Пример 1.1. Доказать, что множество (вещественных) функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$ образует (вещественное) линейное пространство (пространство $C[a,b]$).

Решение. Так как сумма двух непрерывных функций, а также произведение непрерывной функции на вещественное число, также являются непрерывными функциями, то для решения задачи необходимо проверить аксиомы линейного пространства.

1) $\forall y(x), z(x) \in C[a,b]$ $\quad y(x)+z(x) = z(x)+y(x)$;
2) $\forall y(x), z(x), w(x) \in C[a,b]$ $\quad [y(x)+z(x)]+w(x) = y(x)+[z(x)+w(x)]$;
3) нулевым элементом пространства естественно считать $\quad y(x) \equiv 0 \in C[a,b]$;
4) $\forall y(x) \in C[a,b]$ существует противоположный элемент $\quad -y(x) \in C[a,b]$;
5) $\forall y(x), z(x) \in C[a,b], \forall \alpha$ $\quad \alpha\,[y(x)+z(x)] = \alpha y(x) + \alpha z(x)$;
6) $\forall y(x) \in C[a,b], \forall \alpha, \beta$ $\quad (\alpha+\beta) y(x) = \alpha y(x) + \beta y(x)$;
7) $\forall y(x) \in C[a,b], \forall \alpha, \beta$ $\quad (\alpha\beta) y(x) = \alpha\,[\beta y(x)]$;
8) $\forall y(x) \in C[a,b]$ $\quad 1 \cdot y(x) = y(x)$.

Пример 1.2. Доказать, что пространство $C[a,b]$ является нормированным, если для $\forall\ y(x) \in C[a,b]$ определить $\|y\|_{C[a,b]} = \max\limits_{x\in[a,b]} |y(x)|$.

Решение. Для доказательства достаточно убедиться в корректности указанного определения нормы, т.е. проверить аксиомы нормы.

1) $\forall y(x) \in C[a,b]$: $\|y\|_{C[a,b]} = \max\limits_{x\in[a,b]} |y(x)| \geq 0$, причем $\|y\|_{C[a,b]} = 0 \Leftrightarrow y(x) \equiv 0 = \theta$;

2) $\forall y(x) \in C[a,b], \forall \alpha$: $\|\alpha y\|_{C[a,b]} = \max\limits_{x\in[a,b]} |\alpha y(x)| = |\alpha| \cdot \max\limits_{x\in[a,b]} |y(x)| = |\alpha| \cdot \|y\|_{C[a,b]}$;

3) $\forall\ y(x),\ z(x) \in C[a,b]$: $\|y+z\|_{C[a,b]} = \max\limits_{x\in[a,b]} |y(x)+z(x)| \leq$

$$\leq \max_{x\in[a,b]} (|y(x)| + |z(x)|) \leq \max_{x\in[a,b]} |y(x)| + \max_{x\in[a,b]} |z(x)| = \|y\|_{C[a,b]} + \|z\|_{C[a,b]}.$$

Пример 1.3. Доказать неравенство Коши-Буняковского в пространстве $h[a,b]$ и проверить корректность определения нормы в этом пространстве $\|y\|_{h[a,b]} = \sqrt{\int\limits_a^b y^2(s)\,ds}$.

Решение. Неравенство Коши-Буняковского в пространстве $h[a,b]$ имеет вид

$$(y,z)^2 \equiv \left[\int_a^b y(x)z(x)dx\right]^2 \leq \int_a^b y^2(x)dx \cdot \int_a^b z^2(x)dx \qquad \forall\ y(x),\ z(x) \in h[a,b].$$

Для доказательства рассмотрим следующее очевидное соотношение $0 \leq (y+\lambda z, y+\lambda z) = (y,y) + 2\lambda(y,z) + \lambda^2(z,z)$, которое справедливо для любых двух элементов пространства $y(x), z(x) \in h[a,b]$ и любого вещественного числа λ. Поэтому дискриминант квадратного (относительно λ) трехчлена должен быть отрицательным, т.е. $4(y,z)^2 - 4(y,y)(z,z) \leq 0$, откуда и получаем требуемое неравенство:

$$(y,z)^2 \equiv \left[\int_a^b y(x)z(x)dx\right]^2 \leq (y,y)(z,z) \equiv \int_a^b y^2(x)dx \cdot \int_a^b z^2(x)dx.$$

Замечание. Приведенное доказательство может быть проведено в любом евклидовом пространстве.

Для проверки корректности определения нормы в пространстве $h[a,b]$ нужно убедиться в справедливости соответствующих аксиом в определении нормы.

1) $\forall y(x) \in h[a,b]$: $\|y\|_{h[a,b]} = \sqrt{\int\limits_a^b y^2(x)dx} \geq 0$, причем $\|y\|_{h[a,b]} = 0 \Leftrightarrow y(x) \equiv 0 = \theta$;

2) $\forall y(x) \in h[a,b], \forall \alpha$: $\|\alpha y\|_{h[a,b]} = \sqrt{\int\limits_a^b \alpha^2 y^2(x)dx} = |\alpha| \cdot \sqrt{\int\limits_a^b y^2(x)dx} = |\alpha| \cdot \|y\|_{h[a,b]}$;

3) $\forall y(x), z(x) \in h[a,b]$: $\|y+z\|^2_{h[a,b]} = \int\limits_a^b (y(x)+z(x))^2\,dx = \int\limits_a^b (y^2(x) + z^2(x) + 2y(x)z(x))dx \leq$

(с учетом неравенства Коши-Буняковского)

$$\leq \int_a^b y^2(x)\,dx + \int_a^b z^2(x)\,dx + 2\sqrt{\int_a^b y^2(x)\,dx} \cdot \sqrt{\int_a^b z^2(x)\,dx} = \left(\|y\|_{h[a,b]} + \|z\|_{h[a,b]}\right)^2,$$

откуда получаем неравенство треугольника $\|y+z\|_{h[a,b]} \leq \|y\|_{h[a,b]} + \|z\|_{h[a,b]}$.

Пример 1.4. Найти норму $y(x) = \sin x + \cos x$

а) в пространстве $C[0,2\pi]$;

б) в пространстве $h[0,2\pi]$.

Решение. а) $\|\sin x + \cos x\|_{C[0,2\pi]} = \max\limits_{x\in[0,2\pi]} |\sin x + \cos x| = \sqrt{2}$;

б) $\|\sin x + \cos x\|_{h[0,2\pi]} = \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} (\sin x + \cos x)^2\, dx} = \sqrt{2\pi}$.

Пример 1.5. Доказать, что любая сходящаяся последовательность элементов нормированного пространства фундаментальна.

Решение. Последовательность x_n элементов нормированного пространства *N* называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер *K* такой, что для любого $n \ge K$ и любого натурального p выполнено $\| x_{n+p} - x_n \| \le \varepsilon$.

Пусть последовательность x_n элементов нормированного пространства сходится (по норме пространства *N*) к элементу $x_0 \in N$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер *K* такой, что при $n \ge K$ и любом натуральном p одновременно выполнены два неравенства: $\| x_n - x_0 \| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $\| x_{n+p} - x_0 \| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Пользуясь неравенством треугольника, получим при $n \ge K$ и любом натуральном p $\| x_{n+p} - x_n \| = \| x_{n+p} - x_0 + x_0 - x_n \| \le \| x_{n+p} - x_0 \| + \| x_n - x_0 \| \le \varepsilon$, что и требовалось.

Пример 1.6. Доказать, что пространство $h[a,b]$ не является полным.

Решение. Для доказательства достаточно построить пример фундаментальной последовательности элементов пространства $h[a,b]$, которая не является сходящейся в этом пространстве.

Рассмотрим для определенности пространство $h[-1,1]$ и последовательность непрерывных функций (элементов этого пространства):

$$y_n(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x \le -\dfrac{1}{n} \\ nx, & 0 \le |x| \le \dfrac{1}{n} \\ 1, & \dfrac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

а) Докажем, что эта последовательность фундаментальна в пространстве $h[-1,1]$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $m > n$, тогда существует такое натуральное число $N(\varepsilon)$, для которого

$$\|y_n(x) - y_m(x)\|^2_{h[-1,1]} = \int\limits_{-1}^{1} (y_n(x) - y_m(x))^2\, dx = 2\int\limits_0^{1/m} (mx - nx)^2\, dx + 2\int\limits_{1/m}^{1/n} (1 - nx)^2\, dx = \frac{2}{3n} + \frac{2n}{3m^2} - \frac{4}{3m} \le \frac{4}{3n} < \varepsilon$$

при $\forall\ m > n > N(\varepsilon) = \left[\dfrac{4}{3\varepsilon}\right] + 1$, что и требовалось доказать.

б) Пусть последовательность $y_n(x)$ сходится в пространстве $h[-1,1]$, т.е. существует непрерывная функция $\varphi(x)$ такая, что для $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N_1(\varepsilon)$ и при всех $n\ge N_1(\varepsilon)$ выполнено

$$\|y_n(x)-\varphi(x)\|_{h[-1,1]}=\sqrt{\int_{-1}^{1}(y_n(x)-\varphi(x))^2\,dx}\le\frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Рассмотрим разрывную функцию $\psi(x)=\begin{cases}-1, & -1\le x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & 0<x\le 1\end{cases}$.

Тогда для $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N_2(\varepsilon)$ такое, что при $\forall n\ge N_2(\varepsilon)$ имеем

$$\sqrt{\int_{-1}^{1}(y_n(x)-\psi(x))^2\,dx}=\sqrt{2\int_{0}^{1/n}(nx-1)^2\,dx}=\sqrt{\frac{2}{3n}}\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\varphi(x)$ - непрерывная, а $\psi(x)$ - разрывная функция, то $\varphi(x)-\psi(x)\not\equiv 0$ и, следовательно, $\sqrt{\int_{-1}^{1}(\varphi(x)-\psi(x))^2\,dx}>0$. Поэтому для всех $\varepsilon>0$ и $n\ge\max\{N_1(\varepsilon),N_2(\varepsilon)\}$

$$0<\sqrt{\int_{-1}^{1}(\varphi(x)-\psi(x))^2\,dx}=\sqrt{\int_{-1}^{1}[(\varphi(x)-y_n(x))+(y_n(x)-\psi(x)]^2\,dx}\ \le$$

$$\le\sqrt{\int_{-1}^{1}(\varphi(x)-y_n(x))^2\,dx}+\sqrt{\int_{-1}^{1}(y_n(x)-\psi(x))^2\,dx}=\|y_n(x)-\varphi(x)\|_{h[-1,1]}+\sqrt{\int_{-1}^{1}(y_n(x)-\psi(x))^2\,dx}\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,.$$

Ввиду произвольности выбора $\varepsilon>0$ получаем противоречие, а значит предположение о сходимости последовательности $y_n(x)$ в пространстве $h[-1,1]$ неверно.

Итак, построенная последовательность $y_n(x)$ фундаментальна в пространстве $h[-1,1]$, но не является сходящейся в этом пространстве, что и требовалось доказать.

Замечание. При доказательстве было использовано соотношение

$$\int_a^b(y(x)+z(x))^2\,dx\le\int_a^b y^2(x)\,dx+\int_a^b z^2(x)\,dx+2\sqrt{\int_a^b y^2(x)\,dx}\cdot\sqrt{\int_a^b z^2(x)\,dx}=\left[\sqrt{\int_a^b y^2(x)\,dx}+\sqrt{\int_a^b z^2(x)\,dx}\right]^2,$$

являющееся следствием неравенства Коши-Буняковского.

Пример 1.7. Доказать, что не всякая ограниченная последовательность в пространстве $C[a,b]$ является компактной.

Решение. Рассмотрим пространство $C[0,1]$ и последовательность элементов этого пространства $y_n=\sin 2^n\pi x$, $n=1,2,3,\ldots$. Очевидно, $\|y_n\|_{C[0,1]}=\max\limits_{x\in[0,1]}|y_n(x)|=1$, т.е. последовательность ограничена.

Покажем, что никакая ее подпоследовательность не может сходиться в $C[0,1]$.

Действительно, для любого номера i существует точка $x^*=\dfrac{1}{2^{i+1}}\in[0,1]$ такая, что в ней $y_i(x^*)=\sin 2^i\pi\dfrac{1}{2^{i+1}}=1$. При этом для любого $k>i$ в этой же точке имеет место $y_k(x^*)=\sin 2^k\pi\dfrac{1}{2^{i+1}}=0$. Следовательно, $\|y_i-y_k\|_{C[0,1]}\ge|y_i(x^*)-y_k(x^*)|=1$, т.е. никакая подпоследовательность рассматриваемой последовательности не является фундаментальной, а значит и не может сходиться.

Задачи для самостоятельного решения

1.1 Доказать, что пространство $h[a,b]$ является линейным.

1.2 Доказать, что пространство $C^{(p)}[a,b]$ является линейным.

1.3 Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^1$ нельзя ввести норму по формуле $\| x \| = | arctg\, x |$.

1.4 Можно ли определить нормы следующими функциями для указанных множеств:

а) $\| y \| = \max\limits_{x\in[a,\frac{a+b}{2}]} | y(x) |$ в $C[a,b]$;

б) $\| y \| = | y(a) | + \max\limits_{x\in[a,b]} | y'(x) |$ в $C^{(1)}[a,b]$;

в) $\| y \| = | y(b) - y(a) | + \max\limits_{x\in[a,b]} | y'(x) |$ в $C^{(1)}[a,b]$.

1.5 Найти нормы следующих функций, рассматривая их как элементы пространств $C[0,2]$ и $C^{(1)}[0,2]$:

а) $y = 2\sin \pi x - \cos \pi x$

б) $y = 3\cos \pi x - \sin \pi x$

в) $y = x^2 - x$

г) $y = x^2 - 4x$

д) $y = x^2 - 6x$.

1.6 Найти нормы следующих функций, рассматривая их как элементы пространства $h[0,2]$:

а) $y = 2\sin \pi x - \cos \pi x$

б) $y = x^2 - x$

в) $y = x^3 - 1$.

1.7 Доказать, что если последовательность элементов нормированного пространства сходится, то эта последовательность ограничена.

1.8 Построить пример, показывающий, что из сходимости в среднем на отрезке $[a,b]$ функциональной последовательности не следует равномерная (и даже поточечная) сходимость.

1.9 Построить пример бесконечной ортонормированной системы в пространстве $h[a,b]$.

1.10 Привести пример ограниченной некомпактной последовательности в пространстве $h[a,b]$.

1.11 Доказать, что последовательность $y_n(x) = x^n$ ограничена и некомпактна в пространстве $C[0,1]$.

1.12 Доказать, что последовательность непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций $y_n(x)$, удовлетворяющих неравенству $\|y_n\|^2_{h[a,b]} + \|y'_n\|^2_{h[a,b]} \le \gamma,\quad \gamma > 0$, является компактной в пространстве $C[a,b]$.

Ответы к задачам

1.4 а) нет; б) да; в) нет.

1.5 а) $\| y \|_{C[0,2]} = \sqrt{5}$, $\| y \|_{C^{(1)}[0,2]} = (\pi+1)\sqrt{5}$;

б) $\| y \|_{C[0,2]} = \sqrt{10}$, $\| y \|_{C^{(1)}[0,2]} = (\pi+1)\sqrt{10}$;

в) $\| y \|_{C[0,2]} = 2$, $\| y \|_{C^{(1)}[0,2]} = 5$;

г) $\| y \|_{C[0,2]} = 4$, $\| y \|_{C^{(1)}[0,2]} = 8$;

д) $\| y \|_{C[0,2]} = 9$, $\| y \|_{C^{(1)}[0,2]} = 15$.

1.6 а) $\| y \|_{h[0,2]} = \sqrt{5}$; б) $\| y \|_{h[0,2]} = \dfrac{4}{\sqrt{15}}$; в) $\| y \|_{h[0,2]} = \sqrt{\dfrac{86}{7}}$.

ТЕМА 2

Элементы теории линейных операторов. Обратный оператор. Вполне непрерывный оператор.

Основные определения и теоремы

Оператор A, действующий из линейного пространства L_1 в линейное пространство L_2, называется линейным, если для любых элементов y_1 и y_2 из L_1 и любых вещественных чисел α_1 и α_2 выполнено равенство $A(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A y_1 + \alpha_2 A y_2$.

Пусть $D(A)$ - область определения, а $R(A)$ - множество значений оператора *A*. Если оператор $A:\ y = Ax$, действующий из линейного пространства L_1 в линейное пространство L_2, взаимно однозначный, то можно ввести обратный оператор $A^{-1}:\ A^{-1}y = x$ с областью определения $D(A^{-1}) = R(A)$ и множеством значений $R(A^{-1}) = D(A) = L_1$.

Нуль-пространством оператора A называется множество $Ker\,A = \{x \in L_1:\ Ax = \theta\}$. Очевидно, что $Ker\,A$ – линейное подпространство L_1, причем $\theta \in Ker\,A$. Если $Ker\,A \neq \{\theta\}$ (нуль-пространство нетривиально), то оператор *A* называется вырожденным.

Определение А. Оператор A, действующий из нормированного пространства N_1 в нормированное пространство N_2, называется непрерывным в точке $y_0 \in D(A) \subset N_1$, если для любой последовательности $y_n \in D(A)$, такой что $y_n \to y_0$, последовательность Ay_n сходится к Ay_0.

Определение Б. Оператор A, действующий из нормированного пространства N_1 в нормированное пространство N_2, называется непрерывным в точке $y_0 \in D(A) \subset N_1$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $y \in D(A)$ и удовлетворяющих неравенству $\| y - y_0 \| \le \delta$ выполняется неравенство $\| Ay - Ay_0 \| \le \varepsilon$.

Сформулированные определения А и Б эквивалентны.

Оператор A называется непрерывным на множестве $D(A)$ (на N_1), если он непрерывен в каждой точке этого множества. Линейный оператор непрерывен тогда и только тогда, если он является непрерывным в нуле.

Нормой линейного оператора A называется число $\|A\|_{N_1\to N_2} = \sup\limits_{\|y\|_{N_1}=1} \|Ay\|_{N_2}$

Линейный оператор называется ограниченным, если существует $\sup\limits_{\|y\|_{N_1}=1} \|Ay\|_{N_2} < +\infty$.

Теорема. Линейный оператор $A: N_1 \to N_2$, является непрерывным тогда и только тогда, когда он ограничен.

Теорема. Для любого $y \in N_1$ выполнено неравенство $\|Ay\|_{N_2} \le \|A\|_{N_1\to N_2} \cdot \|y\|_{N_1}$, где *A* – линейный ограниченный оператор, действующий из нормированного пространства N_1 в нормированное пространство N_2.

Линейный оператор A называется вполне непрерывным, если для любой ограниченной последовательности элементов y_n из N_1 последовательность $z_n = Ay_n$ элементов N_2 такова, что из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность (т.е. вполне непрерывный оператор преобразует любую ограниченную последовательность в компактную).

Вполне непрерывный оператор является ограниченным (следовательно, непрерывным), однако не любой непрерывный линейный оператор является вполне непрерывным.

Примеры решения задач

Пример 2.1. Докажите, что интегральный оператор Фредгольма $Ay = \int_a^b K(x,s)y(s)ds$ с непрерывным ядром является ограниченным при действии из $C[a,b]$ в $C[a,b]$ и найдите оценку сверху для нормы оператора.

Решение. Пусть $z(x) = Ay \equiv \int_a^b K(x,s)y(s)ds$, где $y(s)$ - произвольная непрерывная на $[a,b]$ функция, причем $\|y\|_{C[a,b]} = \max\limits_{x\in[a,b]} |y(x)| = 1$. Так как ядро $K(x,s)$ непрерывно на замкнутом ограниченном множестве (квадрате $[a,b]\times[a,b]$), то оно ограничено.

Обозначив $K_0 = \max\limits_{x,s\in[a,b]} |K(x,s)|$, получим, что для любого $x \in [a,b]$ имеет место

$$|z(x)| = \left|\int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds\right| \le \int_a^b |K(x,s)|\cdot|y(s)|ds \le \max_{s\in[a,b]}|y(s)|\cdot\int_a^b |K(x,s)|\,ds \le \|y\|_{C[a,b]}\cdot K_0\cdot(b-a).$$

Тогда $\|Ay\|_{C[a,b]} = \|z\|_{C[a,b]} \equiv \max\limits_{x\in[a,b]} |z(x)| \le \underbrace{\|y\|_{C[a,b]}}_{=1}\cdot K_0\cdot(b-a) = K_0\cdot(b-a)$, откуда следует, что оператор Фредгольма с непрерывным ядром, действующий из $C[a,b]$ в $C[a,b]$, ограничен.

Так как доказанное выше неравенство верно для любой непрерывной функции $y(x)$: $\|y\|_{C[a,b]} = 1$, то и для нормы оператора справедлива оценка

$$\|A\| \equiv \sup_{\|y\|=1}\|Ay\| \le K_0\cdot(b-a).$$

Пример 2.2. Докажите, что интегральный оператор Фредгольма с непрерывным ядром является вполне непрерывным при действии из $C[a,b]$ в $C[a,b]$.

Решение. Рассмотрим произвольную ограниченную последовательность непрерывных на $[a,b]$ функций $y_n(x)$ и заметим, что для любого n имеет место оценка $\|y_n\|_{C[a,b]} = \max\limits_{x\in[a,b]} |y_n(x)| \le M$.

Пусть $z_n(x) = Ay_n \equiv \int_a^b K(x,s)y_n(s)ds$. Для решения задачи достаточно показать, что последовательность $z_n(x)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на отрезке $[a,b]$.

а) Докажем сначала равномерную ограниченность. Обозначим $K_0 = \max\limits_{x,s\in[a,b]} |K(x,s)|$. Тогда $|z_n(x)| = \left|\int_a^b K(x,s)\,y_n(s)\,ds\right| \le \int_a^b \underbrace{|K(x,s)|}_{\le K_0}\cdot\underbrace{|y_n(s)|}_{\le M}\,ds \le M\cdot K_0\cdot(b-a) = C$, что и требовалось доказать.

б) Докажем теперь равностепенную непрерывность последовательности $z_n(x)$. Возьмем произвольные точки $x_1, x_2 \in [a,b]$. Имеем

$$|z_n(x_1) - z_n(x_2)| = \left|\int_a^b [K(x_1,s) - K(x_2,s)]\;y_n(s)\;ds\right| \le \int_a^b |K(x_1,s) - K(x_2,s)|\cdot\underbrace{|y_n(s)|}_{\le M}ds.$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Функция $K(x,s)$ непрерывна по совокупности аргументов x, s на замкнутом ограниченном множестве $[a,b]\times[a,b]$ и, следовательно, равномерно непрерывна на этом множестве. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\left|K(x_1,s)-K(x_2,s)\right| \le \dfrac{\varepsilon}{M\cdot(b-a)}$ при условии $\left|x_1-x_2\right| \le \delta$.

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что

$$\left|z_n(x_1)-z_n(x_2)\right| \le \int_a^b |K(x_1,s)-K(x_2,s)|\cdot|y_n(s)|\,ds \le \int_a^b \underbrace{|K(x_1,s)-K(x_2,s)|}_{\le \frac{\varepsilon}{M\cdot(b-a)}}\cdot\underbrace{|y_n(s)|}_{\le M}\,ds \le \varepsilon$$

для всех $n = 1,2,\ldots$ и любых $x_1, x_2 \in [a,b]$, удовлетворяющих неравенству $\left|x_1-x_2\right| \le \delta$, т.е. последовательность $z_n(x)$ равностепенно непрерывна.

По теореме Арцела, из последовательности непрерывных функций $z_n(x)$ можно выделить равномерно сходящуюся (к непрерывной функции!) подпоследовательность. Этим же свойством обладает и любая подпоследовательность последовательности $z_n(x)$, поэтому оператор A является вполне непрерывным при действии $C[a,b] \to C[a,b]$.

Пример 2.3. Доказать, что если линейный оператор $B:\ N_2 \to N_3$ является ограниченным, а линейный оператор $A:\ N_1 \to N_2$ вполне непрерывным, то $BA:\ N_1 \to N_3$ – вполне непрерывный оператор (N_1, N_2, N_3 – нормированные пространства).

Решение.

а) Оператор A: $N_1 \to N_2$ является вполне непрерывным, поэтому для любой ограниченной последовательности $z_n \in N_1$ соответствующая ей последовательность $Az_n \in N_2$ является компактной.

б) Докажем, что ограниченный оператор B: $N_2 \to N_3$ переводит компактную последовательность $y_n \in N_2$ в компактную $By_n \in N_3$. Так как y_n компактна, то из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся $y_{nk} \to y_0 \in N_2$. Рассмотрим последовательность $By_n \in N_3$ и любую ее подпоследовательность By_{nk}. Из соответствующей последовательности $y_{nk} \in N_2$ можно выделить подпоследовательность $y_{nm} \to y_0$. Ввиду непрерывности оператора B последовательность By_{nm} также сходится: $By_{nm} \to By_0 \in N_3$, а значит By_n является компактной.

Поэтому оператор $BA:\ N_1 \to N_3$ переводит любую ограниченную последовательность $z_n \in N_1$ в компактную $BA\,z_n \in N_3$, т.е. является вполне непрерывным.

Пример 2.4. Пусть A - линейный ограниченный оператор, действующий в нормированном пространстве. Доказать, что множество элементов пространства таких, что $Ay = \theta$, образует замкнутое линейное подпространство (нуль-пространство оператора).

Решение.

а) Рассмотрим произвольные элементы y_1 и y_2 такие, что $Ay_1 = \theta$ и $Ay_2 = \theta$. Тогда для любых α_1, α_2 выполнено $A(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 Ay_1 + \alpha_2 Ay_2 = \theta$, т.е. множество элементов $y: Ay = \theta$ - линейное пространство.

б) Докажем его замкнутость, т.е. если $Ay_n = \theta$ и $y_n \to y_0$, то $Ay_0 = \theta$.

Так как A - ограниченный линейный оператор, то

$$\| Ay_0 \| = \| (Ay_0 - Ay_n) + Ay_n \| \le \| Ay_0 - Ay_n \| + \underbrace{\| Ay_n \|}_{=0} \le \| A \| \cdot \| y_0 - y_n \| \to 0 \text{ при } n \to \infty .$$

Поэтому $\| Ay_0 \| = 0$, а значит $Ay_0 = \theta$, что и требовалось доказать.

Замечание. Так как вполне непрерывный оператор является ограниченным, то доказанное утверждение справедливо и для вполне непрерывного оператора.

Пример 2.5. Доказать, что если линейный оператор A имеет обратный, то обратный оператор A^{-1} также является линейным.

Решение. Пусть A - взаимно однозначный оператор, тогда существует обратный оператор A^{-1}. Для решения задачи достаточно проверить при любых $y_1, y_2 \in R(A)$ и любых α_1, α_2 справедливость равенства $A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2$.

Пусть $Ax_1 = y_1$, $Ax_2 = y_2$, тогда из линейности оператора A следует

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 ,$$

и по определению обратного оператора $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$.

С другой стороны, $A^{-1} y_1 = x_1$, $A^{-1} y_2 = x_2$, откуда умножая на α_1, α_2 и складывая, получим

$$\alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 .$$

Из двух последних равенств имеем $A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2$, что и требовалось доказать.

Пример 2.6. Доказать, что если оператор A линейный, то обратный оператор A^{-1} существует тогда и только тогда, когда оператор A невырожденный.

Решение.

а) Достаточность. Пусть оператор A невырожденный, т.е. $Ax = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ (нуль-пространство оператора A тривиально). Тогда для любых двух элементов $x_1 \ne x_2$ имеем $A(x_1 - x_2) \ne \theta \Rightarrow Ax_1 \ne Ax_2$, т.е. оператор A взаимно однозначный, а значит существует обратный оператор A^{-1}.

б) Необходимость. Пусть оператор A имеет обратный A^{-1}. Заметим; что A^{-1} - линейный оператор (см. пример 2.5) и докажем что A - невырожденный. Пусть это не так, т.е. существует $x \ne \theta$ такой, что $Ax = \theta$. Тогда $\theta \ne x = A^{-1} Ax = A^{-1} \underbrace{(Ax)}_{=\theta} = A^{-1}\theta = \theta$. Полученное противоречие показывает, что если $Ax = \theta$, то $x = \theta$, т.е. оператор A - невырожденный.

Пример 2.7. Пусть оператор дифференцирования $A = \dfrac{d}{dx}$ определен на подпространстве $C_0^{(1)}[0,1]$ непрерывно дифференцируемых функций $y(x)$, удовлетворяющих условию $y(0) = 0$. Доказать, что оператор A имеет обратный и найти A^{-1}.

Решение. Множеством значений оператора A является пространство $C[0,1]$. Докажем, что обратный оператор A^{-1} существует. Так как уравнение $Ay = \theta \Leftrightarrow \dfrac{d}{dx} y(x) \equiv 0,\ y(0) = 0$ имеет единственное решение $y(x) \equiv 0 = \theta$, т.е. нуль-пространство оператора A тривиально, то оператор A невырожденный, и обратный оператор A^{-1} существует.

Чтобы найти A^{-1}, нужно для любой функции $z(x)\in C[0,1]$ решить уравнение $Ay=z \quad (y(x)\in C_0^{(1)}[0,1])$, или $\dfrac{d}{dx}y(x)=z(x),\ \ y(0)=0$. Решением указанной задачи Коши является $y(x)=\int\limits_0^x z(s)\,ds$, т.е. $A^{-1}z=\int\limits_0^x z(s)\,ds$.

Замечание. Если рассматривать оператор дифференцирования $A=\dfrac{d}{dx}$, действующим $C^{(1)}[0,1]\to C[0,1]$, то он является вырожденным, так как нуль-пространство в этом случае нетривиально и состоит из функций $y(x)=c$. Поэтому обратный оператор не существует. Вспомните, что первообразная непрерывной функции определяется с точностью до постоянной (элемент из $Ker\,A$ (нуль-пространства) оператора $A=\dfrac{d}{dx}$), т.е. отображение $C^{(1)}[0,1]\to C[0,1]$, осуществляемое оператором дифференцирования, не является взаимно однозначным.

Пример 2.8. Доказать, что если оператор A, действующий в бесконечномерном нормированном пространстве, является вполне непрерывным, то обратный оператор неограничен.

Решение. Предположим, что обратный оператор A^{-1} является ограниченным. Так как A - вполне непрерывный оператор, а по предположению, оператор A^{-1} является ограниченным, то оператор $A^{-1}A$ является вполне непрерывным (см. пример 2.3), что неверно, так тождественный оператор $A^{-1}A=I$ не является вполне непрерывным (см. курс лекций). Полученное противоречие доказывает, что A^{-1} - неограничен.

Пример 2.9. Рассмотрим оператор Вольтерра $By=\int\limits_0^x y(s)\,ds \quad (x\in[0,1])$, действующий в пространстве $C[0,1]$.

а) Доказать, что B является ограниченным.

б) Доказать, что B имеет обратный оператор, который определен на некотором подпространстве и неограничен.

в) Построить оператор $(I-B)^{-1}$.

Решение.

а) Очевидно, что оператор B является линейным и определен на всем пространстве $C[0,1]$. Рассмотрим множество $\|y\|=\max\limits_{x\in[0,1]}|y(x)|=1$. На этом множестве имеем $\|By\|_{C[0,1]}=\max\limits_{x\in[0,1]}\left|\int\limits_0^x y(s)\,ds\right| \le \max\limits_{x\in[0,1]}\int\limits_0^x |y(s)|\,ds \le 1$, что и доказывает ограниченность рассматриваемого оператора.

б) Оператор B отображает все пространство $C[0,1]$ на линейное подпространство непрерывно дифференцируемых функций $z(x)=By=\int\limits_0^x y(s)\,ds$, удовлетворяющих условию $z(0)=0$. Так как из равенства $\int\limits_0^x y(s)\,ds=0$ (верного для всех $x\in[0,1]$) вытекает, что

$y(x) \equiv 0$, то $By = \theta \Leftrightarrow y = \theta$, т.е. нуль-пространство оператора B содержит только нулевой элемент. Следовательно, оператор B - невырожденный, и имеет обратный, который определен на указанном выше подпространстве. Обозначим $D(A^{-1})$ - область определения оператора A^{-1}.

Легко видеть, что $B^{-1} = \dfrac{d}{dx}$, так как $BB^{-1}y = \int\limits_0^x y'(s)\,ds = y(x) - y(0) = y(x)$ и $B^{-1}By = \dfrac{d}{dx}\int\limits_0^x y(s)\,ds = y(x)$.

Докажем, что обратный оператор неограничен. Рассмотрим последовательность $y_n \in D(A^{-1}) \subset C[0,1]$: $y_n(x) = \sin 2\pi n x$, $(y_n(0) = 0!!!)$, $\| y_n \|_{C[0,1]} = 1$, $n = 1,2,3...$. Тогда $\| B^{-1} y_n \|_{C[0,1]} = \max\limits_{x\in[0,1]} \left| \dfrac{d}{dx} \sin 2\pi n x \right| = 2\pi n \to \infty$, т.е. $\sup\limits_{y\in D(A^{-1}),\, \|y\|=1} \| B^{-1} y \|$ не существует, и оператор B^{-1} является неограниченным.

Замечание 1. Действуя аналогично примеру 2.2, можно показать, что рассматриваемый в данном примере оператор Вольтерра является вполне непрерывным, следовательно, обратный оператор неограничен (пример 2.8).

в) Чтобы построить оператор $(I - B)^{-1}$, нужно для произвольной непрерывной функции $z(x)$ решить уравнение $y(x) - \int\limits_0^x y(s)ds = z(x)$. Заметим сразу, что $y(0) = z(0)$.

Так как $z(x)$ может не быть дифференцируемой, то ищем решение в виде $y(x) = z(x) + w(x)$, где $w(x)$ - новая неизвестная функция, для которой имеем $w(x) = \int\limits_0^x z(s)ds + \int\limits_0^x w(s)ds$, $w(0) = 0$. Очевидно, что $w(x)$ дифференцируема; для ее определения получаем задачу Коши $w'(x) = w(x) + z(x)$, $w(0) = 0$, решение которой имеет вид $w(x) = e^x \int\limits_0^x z(s)\, e^{-s} ds$. Поэтому $y(x) = z(x) + e^x \int\limits_0^x z(s)\, e^{-s} ds$, и обратный оператор $(I - B)^{-1}$ определяется формулой $(I - B)^{-1} z = z(x) + \int\limits_0^x z(s)\, e^{x-s} ds$.

Замечание 2. Рассмотрим оператор $B^2 y = \int\limits_0^x dt \int\limits_0^t y(s)\,ds = \int\limits_0^x y(s)ds \int\limits_s^x dt = \int\limits_0^x (x-s)\, y(s)ds$. Легко показать, например, методом математической индукции, что

$$B^{n+1} y = BB^n y = \int\limits_0^x dt \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\, y(s)\,ds = \int\limits_0^x y(s)\,ds \int\limits_s^x \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = \int\limits_0^x \frac{(x-s)^n}{n!}\, y(s)\,ds .$$

Далее, разложив функцию e^{x-s} в ряд $e^{x-s} = \sum\limits_0^\infty \dfrac{(x-s)^n}{n!}$, будем иметь $(I - B)^{-1} z = z(x) + \int\limits_0^x \sum\limits_0^\infty \dfrac{(x-s)^n}{n!}\, z(s)\; ds = z + \sum\limits_0^\infty B^{n+1} z$. Таким образом, мы получили представление оператора $(I - B)^{-1}$ в виде ряда Неймана $(I - B)^{-1} = I + \sum\limits_1^\infty B^n$.

Пример 2.10. Доказать, что оператор дифференцирования $A = \dfrac{d}{dx}$

а) не является вполне непрерывным при действии $C^{(1)}[0,1] \to C[0,1]$;

б) является вполне непрерывным при действии $C^{(2)}[0,1] \to C[0,1]$.

Решение.

а) Рассмотрим в пространстве $C^{(1)}[0,1]$ последовательность $y_n = \dfrac{1}{2^n}\cos 2^n \pi x$, *n=1,2,3,…*.

Эта последовательность ограничена в $C^{(1)}[0,1]$, так как для любого номера n имеем $\| y_n \|_{C^{(1)}[0,1]} = \max\limits_{x\in[0,1]} | y_n(x) | + \max\limits_{x\in[0,1]} | y_n'(x) | = \dfrac{1}{2^n} + 1 < 2$. Однако последовательность образов ее элементов, получаемая при действии оператора дифференцирования $Ay_n = \pi \sin 2^n \pi x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ некомпактна в пространстве $C[0,1]$ (см. пример 1.7). Поэтому оператор дифференцирования не является вполне непрерывным при действии $C^{(1)}[0,1] \to C[0,1]$.

а) Пусть y_n - произвольная ограниченная последовательность в пространстве $C^{(2)}[0,1]$, т.е. существует $M > 0$ такая, что $\| y_n \|_{C^{(2)}[0,1]} = \max\limits_{x\in[0,1]} | y_n(x) | + \max\limits_{x\in[0,1]} | y_n'(x) | + \max\limits_{x\in[0,1]} | y_n''(x) | \le M$ для любого номера n. Заметим, что отсюда сразу вытекают два неравенства: $\max\limits_{x\in[0,1]} | y_n'(x) | \le M$ и $\max\limits_{x\in[0,1]} | y_n''(x) | \le M$.

Рассмотрим последовательность $z_n(x) = Ay_n = \dfrac{d}{dx} y_n(x)$. Все функции $z_n(x)$ непрерывны, причем, ввиду сделанного замечания, последовательность $z_n(x) = y_n'(x)$ равномерно ограничена.

Докажем, что последовательность $z_n(x)$ равностепенно непрерывна. Действительно, так как $\max\limits_{x\in[0,1]} | y_n''(x) | \le M$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, что $0 < \delta \le \dfrac{\varepsilon}{M}$. Поэтому при всех $x_1, x_2 \in [0,1]$, $|x_1 - x_2| \le \delta$ имеет место неравенство $|y_n'(x_1) - y_n'(x_2)| = | y_n''(x) | \cdot | x_1 - x_2 | \le M\delta \le \varepsilon$.

Далее, применяя теорему Арцела, получаем, что последовательность $z_n = Ay_n$ компактна в $C[0,1]$, а оператор дифференцирования $A = \dfrac{d}{dx}$ является вполне непрерывным при действии $C^{(2)}[0,1] \to C[0,1]$.

Задачи для самостоятельного решения

2.1 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма отображает линейное пространство $h[a,b]$ в себя и является линейным оператором.

2.2 Доказать, что интегральный оператор Вольтерра отображает линейное пространство $h[a,b]$ в себя и является линейным оператором.

2.3 Доказать, что линейный оператор, действующий в нормированных пространствах, непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен в нуле.

2.4 Доказать, что линейный оператор, действующий в нормированных пространствах, непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.

2.5 Доказать, что нелинейный интегральный оператор $Ay = \int_0^1 e^{xs} y^2(s)\,ds$, действующий $C[0,1] \to C[0,1]$, является непрерывным и $\sup_{\|y\|=1} \| Ay \| < +\infty$.

Замечание: результат предыдущей задачи в данном случае, вообще говоря, неприменим, так как оператор не является линейным.

2.6 Доказать эквивалентность двух определений непрерывности в точке оператора, действующего в нормированных пространствах.

2.7 Доказать, что линейный оператор ограничен тогда и только тогда, если существует постоянная $C > 0$, что для любого элемента y выполнено неравенство $\| Ay \| \le C \| y \|$.

2.8 Доказать, что оператор дифференцирования, действующий из $C^{(1)}[a,b]$ в $C[a,b]$, является ограниченным.

2.9 Доказать, что оператор дифференцирования, определенный на подпространстве непрерывно дифференцируемых функций пространства $C[a,b]$ и действующий из $C[a,b]$ в $C[a,b]$, не является ограниченным.

2.10 Доказать, что если A - линейный ограниченный оператор, действующий A: $N_1 \to N_2$, где N_1 и N_2 – нормированные пространства, причем $Ay \ne 0$, то $\| A \| > 0$.

2.11 а) Доказать, что линейный оператор A имеет ограниченный обратный тогда и только тогда, если существует число $m > 0$ такое, что для всех $y \in D(A)$ выполнено $\| Ay \| \ge m \| y \|$.

б) Доказать, что в этом случае норма обратного оператора равна $\| A^{-1} \| = \dfrac{1}{M}$, где M - максимальное из возможных значений m, найденных в п. а).

2.12 Доказать, что если линейный оператор B: $N_2 \to N_3$ является вполне непрерывным, а линейный оператор A: $N_1 \to N_2$ ограниченный, то BA: $N_1 \to N_3$ - вполне непрерывный оператор (N_1, N_2, N_3 – нормированные пространства). Сравнить с результатом примера 2.3.

2.13 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий из $h[a,b]$ в $C[a,b]$, является вполне непрерывным оператором.

2.14 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий из $h[a,b]$ в $h[a,b]$, является вполне непрерывным оператором.

2.15 Доказать, что интегральный оператор Вольтерра $By = \int_a^x K(x,s)\, y(s)\,ds$ является вполне непрерывным при действии $C[a,b] \to C[a,b]$.

2.16 Доказать, что оператор умножения на независимую переменную x: $Ay = x \cdot y(x)$, действующий $C[a,b] \to C[a,b]$, не является вполне непрерывным.

2.17 Доказать, что единичный оператор, действующий в пространстве $C[a,b]$, не является вполне непрерывным.

2.18 Доказать, что интегральный оператор $Ay = \int_0^1 \dfrac{y(s)}{\sqrt{(x-s)^2}}\,ds$ не является вполне непрерывным при действии $C[0,1] \to C[0,1]$.

2.19 Доказать, что дифференциальный оператор $Ay = \dfrac{d}{dx} y(x) + 4y(x)$, действующий $C_0^{(1)}[0,1] \to C[0,1]$ ($C_0^{(1)}[0,1]$ - подпространство непрерывно дифференцируемых на [0,1] функций, удовлетворяющих условию $y(0) = 0$, с нормой пространства $C^{(1)}[0,1]$), имеет ограниченный обратный, и найти его.

<u>Ответ</u>: $A^{-1}y = \int_0^x e^{-4(x-s)} y(s)\,ds$.

ТЕМА 3

Собственные значения и собственные векторы вполне непрерывного самосопряженного оператора.

Основные определения и теоремы

Оператор $A^*: E \to E$, действующий в евклидовом пространстве, называется сопряженным к оператору A, если $\forall\ y_1, y_2 \in E\ \ (Ay_1, y_2) = (y_1, A^* y_2)$. Если $A = A^*$, то оператор A называется самосопряженным.

Пусть линейный оператор A действует в линейном пространстве L. Число Λ называется собственным значением оператора A, если существует элемент $y \neq \theta$ такой, что $Ay = \Lambda y$. Элемент y называется собственным вектором. Множество собственных векторов, соответствующих собственному значению Λ, является подпространством пространства L.

Число $\lambda = \dfrac{1}{\Lambda}$ $(\Lambda \neq 0)$ называется характеристическим числом оператора A.

Теорема. Самосопряженный вполне непрерывный оператор A, действующий в бесконечномерном евклидовом пространстве, обладает собственным вектором, соответствующим собственному значению Λ: $|\Lambda| = \|A\|$. Это собственное значение является максимальным по модулю среди всех собственных значений оператора A.

Теорема, вообще говоря, не верна, если отказаться от условий самосопряженности или вполне непрерывности оператора (см. примеры в конце темы).

Элемент e называется максимальным элементом (вектором) оператора A, если $\|e\| = 1$ и $\|Ae\| = \|A\|$. Самосопряженный вполне непрерывный оператор A обладает максимальным вектором.

Если z - максимальный вектор самосопряженного оператора A, то z -собственный вектор оператора A^2, соответствующий собственному значению $\Lambda = \|A\|^2 = M^2$. Если оператор A^2 обладает собственным вектором z, соответствующим собственному значению M^2, то оператор A имеет собственный вектор, соответствующий собственному значению M или $-M$.

Теорема. Пусть ядро $K(x,s)$ оператора Фредгольма $Ay = \int\limits_a^b K(x,s)\ y(s)\ ds$ $h[a,b] \to h[a,b]$ является вещественным, симметрическим, непрерывным по совокупности переменных $(x,s) \in [a,b] \times [a,b]$, и не равно тождественно нулю. Тогда оператор Фредгольма обладает собственным значением Λ, $\Lambda \neq 0$: $Ay = \Lambda y$, $y \neq 0$, $y \in h[a,b]$.

Иногда удобнее использовать характеристические числа: $\lambda = \dfrac{1}{\Lambda}$, $\Lambda \neq 0$. Тогда в утверждении теоремы следует записать $\lambda A y = y$.

Теорема. Собственные векторы самосопряженного оператора A, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Теорема. Число собственных значений вполне непрерывного самосопряженного оператора A, удовлетворяющих условию: $\| A \| \geq |\Lambda| \geq \delta > 0$, ($\delta$ - фиксированное положительное число) конечно.

Число линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному значению, называется кратностью (рангом) собственного значения.

Теорема. Ненулевому собственному значению вполне непрерывного оператора A может соответствовать только конечное число линейно независимых собственных векторов. Нулевому собственному значению может отвечать как конечное, так и бесконечное число линейно независимых собственных векторов.

Теорема.

а) Множество собственных значений самосопряженного вполне непрерывного оператора A, действующего в бесконечномерном евклидовом пространстве, представляет собой: либо бесконечную последовательность, тогда $\| A \| = |\Lambda_1| \geq |\Lambda_2| \geq \ldots \geq |\Lambda_n| \geq \ldots$ - монотонно невозрастающая и ограниченная снизу нулем;

либо конечную последовательность, тогда $\| A \| = |\Lambda_1| \geq |\Lambda_2| \geq \ldots \geq |\Lambda_n| > \Lambda_{n+1} = 0$ (каждое собственное значение повторяется в эти неравенствах столько раз, какова его кратность).

б) Если ненулевых собственных значений бесконечно много, то $|\Lambda_n| \underset{n \to \infty}{\to} 0$.

в) Каждому собственному значению отвечает хотя бы один собственный вектор, причем можно выбрать собственные векторы так, что они образуют ортонормированную систему (собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям ортогональны, а собственные векторы, соответствующие одному и тому же собственному значению, можно ортогонализовать, используя процедуру Грама-Шмидта).

Для характеристических чисел вполне непрерывного самосопряженного оператора справедливы аналогичные результаты:

либо $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots \leq |\lambda_n|$ (конечная последовательность характеристических чисел);

либо $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots \leq |\lambda_n| \leq \ldots$ (бесконечная последовательность характеристических чисел). В этом случае $\lim\limits_{n \leftarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$.

Каждому характеристическому числу λ_n можно сопоставить собственный вектор φ_n, причем векторы $\{\varphi_n\}$ образуют ортонормированную систему.

Аналогичные утверждения верны для интегрального оператора с непрерывным, симметрическим и неравным тождественно нулю ядром. В этом случае вместо слов собственные векторы говорят собственные функции интегрального оператора или собственные функции ядра $K(x,s)$.

Пусть A - вполне непрерывный самосопряженный оператор со следующей последовательностью характеристических чисел (неважно, конечной или бесконечной) : $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots \leq |\lambda_n| \leq \ldots$, которым соответствует ортонормированная последовательность собственных векторов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$.

Теорема. Вектор y принадлежит нуль-пространству оператора A ($y \in Ker\, A$) тогда и только тогда, если $(y, \varphi_k) = 0 \quad k = 1,2,\ldots$ (φ_k - конечная или бесконечная последовательность).

Теорема Гильберта-Шмидта. Функция $f(x)$ называется истокопредставимой через ядро $K(x,s)$, если существует непрерывная функция $g(x)$ такая, что $f(x) = \int\limits_a^b K(x,s)\, g(s)\, ds$. Если функция $f(x)$ истокопредставима через симметрическое непрерывное ядро $K(x,s)$, то она может быть разложена в ряд $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k\,\varphi_k(x)$, где $f_k=(f,\varphi_k)=\int\limits_a^b f(s)\,\varphi_k(s)\,ds$, причем этот ряд сходится абсолютно и равномерно на $[a,b]$.

Можно рассматривать оператор Фредгольма в пространстве непрерывных комплекснозначных функций $h^C[a,b]$, состоящем из комплекснозначных функций вещественной переменной x: $y(x)=u(x)+i\,v(x)\quad x\in[a,b]$, функции *u(x), v(x)* – непрерывные на *[a,b]* вещественные функции. В этом пространстве скалярное произведение вводится так: $(y_1,y_2)=\int\limits_a^b y_1^*(x)\,y_2(x)\,dx$ (здесь * - знак комплексного сопряжения).

Теорема. Пусть интегральный оператор с непрерывным симметрическим вещественным ядром $K(x,s)$ действует в комплексном пространстве $h^C[a,b]$. Тогда этот оператор может иметь только вещественные собственные значения.

Если ядро *K(x,s)* является <u>вырожденным</u>, т.е. представимо в виде $K(x,s)=\sum_{j=1}^{n} a_j(x)b_j(s)$, где $a_1(x),...,a_n(x)$ и $b_1(s),...,b_n(s)$ - линейно независимы и непрерывны по своим аргументам на $[a,b]$, то интегральный оператор является вырожденным. В этом случае и у него всегда есть нулевое собственное значение, причем кратность его равна ∞. Отыскание других собственных значений сводится к решению эквивалентной алгебраической задачи на собственные значения и собственные векторы для некоторой матрицы

$$\Lambda c_i=\sum_{j=1} c_j \underbrace{\int\limits_a^b a_j(x)\;b_i(x)\;dx}_{k_{ij}},\; i=1,2,...,n, \quad \text{или } K\cdot C=\Lambda\cdot C, \quad \text{где } K=\{k_{ij}\}_{i,j=1}^{n}, \quad C=\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Собственные значения Λ_n матрицы K и, следовательно, собственные значения (и характеристические числа $\lambda_n=\dfrac{1}{\Lambda_n}$) интегрального оператора Фредгольма теперь можно найти, решив характеристическое уравнение $\det(K-\Lambda I)=0$.

Некоторые задачи на нахождение характеристических чисел и собственных функций оператора Фредгольма с непрерывным невырожденным ядром рассмотрены также в примерах к теме 7.

Примеры решения задач

Пример 3.1. Пусть M - подпространство евклидова пространства, инвариантное относительно самосопряженного оператора A. Доказать, что ортогональное дополнение $M_{\perp}$ подпространства M также инвариантно относительно оператора A.

Решение. Рассмотрим любые элементы $y \in M$ и $z \in M_{\perp}$, т.е. такие, что $(y,z)=0$. Подпространство M инвариантно относительно оператора A. Это означает, что для любого $y \in M$ элемент $Ay \in M$, т.е. $(Ay,z)=0$. Нужно доказать, что $Az \in M_{\perp}$.

Оператор A - самосопряженный, поэтому $(Ay,z)=(y,Az)=0$, т.е. элемент Az ортогонален любому $y \in M$. Следовательно $Az \in M_{\perp}$, что и требовалось доказать.

Пример 3.2. Доказать, что норма вполне непрерывного самосопряженного оператора может быть найдена по формуле $\| A \| = \sup\limits_{\|y\|=1} |(Ay,y)|$.

Решение. Обозначим $\mu = \sup\limits_{\|y\|=1} |(Ay,y)|$ и докажем, что указанная точная верхняя грань существует. Пользуясь неравенством Коши-Буняковского, получим $|(Ay,y)| \le \| Ay \| \cdot \underbrace{\| y \|}_{=1} \le \| A \| \cdot \underbrace{\| y \|}_{=1} = \| A \|$, откуда следует существование $\sup\limits_{\|y\|=1} |(Ay,y)|$ и оценка $\mu = \sup\limits_{\|y\|=1} |(Ay,y)| \le \| A \|$.

Докажем теперь, что справедливо неравенство $\mu \ge \| A \|$. Для любого элемента y норма элемента $y_0 = \dfrac{y}{\| y \|}$ равна единице. Поэтому $|(Ay_0, y_0)| \le \sup\limits_{\|y_0\|=1} |(Ay_0, y_0)| = \mu$, откуда получаем $|(Ay,y)| \le \mu \cdot \| y \|^2$. Пользуясь линейностью оператора A, свойствами скалярного произведения и равенством $(Ay,z)=(y,Az)$ (определение самосопряженного оператора), нетрудно получить $4(Ay,z) = (A(y+z),\, y+z) - (A(y-z),\, y-z)$. Из этого равенства с учетом полученной выше оценки, имеем

$$4|(Ay,z)| = |(A(y+z),\, y+z) - (A(y-z),\, y-z)| \le |(A(y+z),\, y+z)| + |(A(y-z),\, y-z)| \le$$
$$\le \mu \cdot \| y+z \|^2 + \mu \cdot \| y-z \|^2 = 2\mu \cdot (\| y \|^2 + \| z \|^2).$$

Поэтому для произвольных элементов пространства таких, что $\| y \| = 1$ и $\| z \| = 1$, верно $|(Ay,z)| \le \mu$. Полагая $z = \dfrac{Ay}{\| Ay \|}$, получим $\dfrac{|(Ay,Ay)|}{\| Ay \|} = \| Ay \| \le \mu$ для любых y, таких что $\| y \| = 1$, откуда следует $\| A \| \le \mu$.

Итак, $\mu \le \| A \| \le \mu$, поэтому $\| A \| = \mu = \sup\limits_{\|y\|=1} |(Ay,y)|$, что и требовалось.

Замечание. Обратившись к теореме о существовании собственного вектора вполне непрерывного самосопряженного оператора, можно заключить, что если в рассмотренной задаче оператор A - вполне непрерывный, то максимальное по модулю собственное значение его удовлетворяет соотношению $|\Lambda| = \| A \| = \sup\limits_{\|y\|=1} |(Ay,y)|$

Пример 3.3. Рассмотрим оператор умножения $Ay = (1-x)\cdot y(x)$, действующий в пространстве $h[0,1]$.

а) Доказать, что указанный оператор является ограниченным, и найти его норму.

б) Доказать, что у него нет максимального вектора.

Решение.

а) Напомним, что нормой линейного оператора называется число $\|A\| = \sup\limits_{\|y\|=1} \|Ay\|$.

Рассмотрим в пространстве $h[0,1]$ множество функций $y(x)$: $\|y\|_{h[0,1]} = \sqrt{\int\limits_0^1 y^2(x)\,dx} = 1$.

Тогда $\|Ay\|_{h[0,1]} = \sqrt{\int\limits_0^1 (1-x)^2 y^2(x)\,dx} \le \sqrt{\int\limits_0^1 y^2(x)\,dx} = 1$, поэтому оператор ограничен и для нормы оператора получаем оценку $\|A\| \le 1$.

Докажем, что норма рассматриваемого оператора равна 1. Для этого достаточно построить последовательность $y_n(x)$ непрерывных функций такую, что $\|Ay_n\|_{h[0,1]} \underset{n\to\infty}{\to} 1$.

Пусть $$y_n(x) = \begin{cases} \sqrt{3n}\cdot(1-nx), & 0 \le x \le \dfrac{1}{n} \\ 0\ , & x \ge \dfrac{1}{n} \end{cases}.$$

Непосредственным вычислением легко проверить, что $\forall n\ \|y_n\|_{h[0,1]} = 1$ и

$$\|Ay_n\|^2_{h[0,1]} = 3n\cdot\int\limits_0^{\frac{1}{n}} (1-nx)^2\cdot(1-x)^2\,dx = 1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{10n^2} \underset{n\to\infty}{\to} 1.$$

Поэтому $\|A\| = 1$.

б) Докажем, что у рассматриваемого оператора в пространстве $h[0,1]$ нет максимального вектора. Напомним, что элемент y: $\|y\| = 1$ называется максимальным вектором ограниченного оператора, если $\|Ay\| = \|A\|$. Предположим, что $y_0(x)$: $\|y_0\| = 1$ является максимальным вектором рассматриваемого оператора, тогда $\|y_0\|^2 = \int\limits_0^1 y_0^2(x)\,dx = 1$, $\|Ay_0\|^2 = \int\limits_0^1 (1-x)^2\cdot y_0^2(x)\,dx = \|A\|^2 = 1$. Вычитая последние два равенства, получим $\int\limits_0^1 \underbrace{[1-(1-x)^2]}_{>0}\cdot y_0^2(x)\,dx = 0$, что невозможно.

Таким образом, сделанное предположение неверно, т.е. максимального вектора у оператора нет.

Замечание. Рассмотренный оператор умножения в пространстве $h[0,1]$ является самосопряженным, но не вполне непрерывным, поэтому теорема о существовании максимального вектора в данном случае неприменима.

Пример 3.4. Пусть $K^{(2)}(x,s) = K(x,s) - \dfrac{\varphi_1(x)\varphi_1(s)}{\lambda_1}$, где φ_1 - нормированная собственная функция оператора Фредгольма $Ay = \int\limits_a^b K(x,s)\ y(s)\ ds$ с непрерывным симметрическим ядром, отвечающая характеристическому числу λ_1. Рассмотрим интегральный оператор $A^{(2)}$ с ядром $K^{(2)}(x,s)$: $A^{(2)}y = \int\limits_a^b K^{(2)}(x,s)\, y(s)\, ds$.

Доказать, что:

а) все собственные функции $\varphi_2,...,\varphi_n,...$ оператора A, отвечающие характеристическим числам $|\lambda_2| \le ... \le |\lambda_n| \le ...,$ являются также собственными функциями оператора $A^{(2)}$, соответствующими тем же характеристическим числам $|\lambda_2| \le ... \le |\lambda_n| \le ...$;

б) оператор $A^{(2)}$ не имеет других характеристических чисел, отличных от λ_k, $k = 2,3,4,...$;

в) функция φ_1 также является собственной функцией оператора $A^{(2)}$, соответствующей нулевому собственному значению ядра $K^{(2)}(x,s)$.

Решение. Так как ядро оператора A непрерывно и симметрично, то и ядро $K^{(2)}(x,s)$ удовлетворяет тем же условиям, т.е. оператор $A^{(2)}$ является вполне непрерывным и самосопряженным. Заметим также, что действие оператора $A^{(2)}$ можно представить в следующем виде: $A^{(2)}y = \int\limits_a^b [K(x,s) - \dfrac{\varphi_1(x)\varphi_1(s)}{\lambda_1}]\, y(s)\, ds = A\, y - \dfrac{\varphi_1}{\lambda_1}(\varphi_1, y)$.

Напомним, что собственные функции самосопряженного оператора образуют ортогональную систему, и $A\varphi_k = \int\limits_a^b K(x,s)\,\varphi_k(s)\, ds = \dfrac{1}{\lambda_k}\varphi_k$. Будем считать также, что $\|\varphi_k\|^2 = \int\limits_a^b \varphi_k^2(x)\, dx = 1$.

а) Для любой собственной функции φ_k, $k = 2,3,4,...$ оператора A имеем

$$A^{(2)}\varphi_k = \int\limits_a^b K^{(2)}(x,s)\,\varphi_k(s)\, ds = \int\limits_a^b K(x,s)\,\varphi_k(s)\, ds - \int\limits_a^b \frac{\varphi_1(x)\ \varphi_1(s)}{\lambda_1}\ \varphi_k(s)\, ds = \frac{1}{\lambda_k}\ \varphi_k(x) - 0 = \frac{1}{\lambda_k}\ \varphi_k(x),$$

т.е. φ_k является собственной функцией оператора $A^{(2)}$, соответствующей характеристическому числу λ_k.

б) Пусть $\tilde{\lambda}$ - характеристическое число оператора $A^{(2)}$, а $\tilde{\varphi}$- отвечающая ему собственная функция, т.е. $A^{(2)}\tilde{\varphi} = \dfrac{1}{\tilde{\lambda}}\tilde{\varphi}$. Докажем, что $\tilde{\lambda}$ является также характеристическим числом оператора A, т.е. совпадает с одним из λ_k, $k = 2,3,4,...$.

Действительно

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\lambda}A^{(2)}\tilde{\varphi} = \tilde{\lambda}\int\limits_a^b K^{(2)}(x,s)\,\tilde{\varphi}(s)\, ds = \tilde{\lambda}\int\limits_a^b K(x,s)\,\tilde{\varphi}(s)\, ds - \tilde{\lambda}\int\limits_a^b \frac{\varphi_1(x)\ \varphi_1(s)}{\lambda_1}\ \tilde{\varphi}(s)\, ds = \tilde{\lambda}A\tilde{\varphi} - 0 = \tilde{\lambda}A\,\tilde{\varphi},$$

т.е. $\tilde{\lambda}$ является характеристическим числом оператора A, что и требовалось. Здесь было использовано неочевидное (так как φ_k и $\tilde{\varphi}$ - собственные функции различных операторов!!!) соотношение

$$\int_a^b \varphi_1(s)\,\tilde{\varphi}(s)\,ds = (\varphi_1,\tilde{\varphi}) = (\varphi_1,\tilde{\lambda}A^{(2)}\tilde{\varphi}) = \tilde{\lambda}\,(\varphi_1,A^{(2)}\tilde{\varphi}) = (\textit{т.к. } A^{(2)} - \textit{самосопряженный}) = \tilde{\lambda}\,(A^{(2)}\varphi_1,\tilde{\varphi}) =$$

$$= \tilde{\lambda}\left[(A\varphi_1,\tilde{\varphi}) - \frac{(\varphi_1,\tilde{\varphi})}{\lambda_1}\underbrace{(\varphi_1,\varphi_1)}_{=1}\right] = \tilde{\lambda}\left[\left(\frac{\varphi_1}{\lambda_1},\tilde{\varphi}\right) - \frac{(\varphi_1,\tilde{\varphi})}{\lambda_1}\right] = 0 .$$

в) $A^{(2)}\varphi_1 = A\varphi_1 - \dfrac{\varphi_1}{\lambda_1}(\varphi_1,\varphi_1) = \dfrac{1}{\lambda_1}\,\varphi_1(x) - \dfrac{1}{\lambda_1}\,\varphi_1(x) = 0\cdot\varphi_1(x)$, следовательно φ_1 - собственная функция оператора $A^{(2)}$, отвечающая собственному значению $\Lambda_0 = 0$.

Пример 3.5. Доказать, что оператор умножения на независимую переменную x: $Ay = x\cdot y(x)$, действующий в пространстве $h[0,1]$

а) является самосопряженным;
б) не имеет собственных значений.

Решение.

а) $(Ay,z) = \int_0^1 [x\,y(x)]\cdot z(x)\,dx = \int_0^1 y(x)\cdot[x\;z(x)]\,dx = (y,Az)$, т.е. A - самосопряженный.

б) Рассмотрим уравнение $Ay \equiv x\cdot y(x) = \lambda y(x) \;\Rightarrow\; (x-\lambda)\cdot y(x) = 0$, откуда получаем $y(x)\equiv 0$. Итак, при любом λ уравнение $Ay = \lambda y$ имеет только тривиальное решение, что и означает отсутствие собственных значений у оператора A.

Замечание. Рассматриваемый оператор не является вполне непрерывным (см. задачу 2.16), поэтому теорема о существовании собственного вектора в данном случае неприменима.

Пример 3.6. Доказать, что оператор Вольтерра $A\,y = \int_0^x y(s)\,ds$ ($x\in[0,1]$), действующий в пространстве $h[0,1]$:

а) является вполне непрерывным;
б) не имеет собственных значений.

Решение.

а) Докажем сначала, что A - вполне непрерывный оператор при действии $h[0,1]\to C[0,1]$.

Рассмотрим ограниченную последовательность $y_n \in h[0,1]$: $\left\| y_n \right\|_{h[0,1]} = \sqrt{\int_0^1 y_n^2(x)dx} \le M$, *n=1,2,…,* и последовательность $z_n(x) = Ay_n = \int_0^x y_n(s)\;ds$.

Докажем равномерную ограниченность $z_n(x)$ в пространстве $C[0,1]$. Действительно,

$$|z_n(x)| = \left|\int_0^x y_n(s)\;ds\right| = \left|\int_0^x 1\cdot y_n(s)\;ds\right| \le \sqrt{\int_0^x ds\cdot\int_0^x y_n^2(s)\;ds} \;\le\; \sqrt{\underbrace{\int_0^x ds}_{\le 1}\;\cdot\;\underbrace{\int_0^1 y_n^2(s)\;ds}_{\le M^2}} \le M$$

сразу для всех $x \in [0,1]$ и всех *n=1,2,…* , откуда следует $\| z_n \|_{C[0,1]} = \sup\limits_{x\in[0,1]} | z_n(x) | \le M$, что и требовалось.

Докажем равностепенную непрерывность последовательности $z_n(x)$. Возьмем произвольные точки $x_1, x_2 \in [0,1]$. Имеем

$$\left| z_n(x_1) - z_n(x_2) \right| = \left| \int_0^{x_1} y_n(s)\,ds - \int_0^{x_2} y_n(s)\,ds \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} y_n(s)\,ds \right| \le \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} ds \cdot \int_{x_1}^{x_2} y_n^2(s)\ \ ds} \ \le \sqrt{(x_2 - x_1) \cdot \underbrace{\int_0^1 y_n^2(s)\,ds}_{\le M^2}}$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $0 < \delta = \dfrac{\varepsilon^2}{M^2}$. Тогда для всех $n = 1,2,3,...$ и любых $x_1, x_2 \in [0,1]$, удовлетворяющих условию $\left| x_1 - x_2 \right| \le \delta = \dfrac{\varepsilon^2}{M^2}$, имеем $\left| z_n(x_1) - z_n(x_2) \right| \le \varepsilon$, т.е. последовательность $z_n(x)$ равностепенно непрерывна.

Итак, последовательность функций $z_n(x)$, непрерывных на сегменте $[0,1]$, равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Из теоремы Арцела следует, что из нее можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся при $x \in [0,1]$ к непрерывной функции. Очевидно, что этим же свойством обладает и любая подпоследовательность последовательности $z_n(x)$. Следовательно, оператор A является вполне непрерывным при действии $h[0,1] \to C[0,1]$.

Так как из равномерной сходимости следует сходимость в среднем, то та же самая подпоследовательность непрерывных функций, которая сходится равномерно к некоторой непрерывной функции, сходится и в среднем к той же функции. Поэтому оператор A является вполне непрерывным и при действии $h[0,1] \to h[0,1]$.

б) Покажем, что рассматриваемый оператор не имеет собственных значений. Рассмотрим уравнение $A\,y \equiv \int_0^x y(s)\,ds = \Lambda\, y(x)$ и докажем, что при любом значении Λ оно имеет только тривиальное решение.

Если $\Lambda = 0$, то утверждение очевидно, так как в этом случае $\int_0^x y(s)\,ds = 0 \cdot y(x) \equiv 0$ для всех $x \in [0,1]$ и, следовательно, $y(x) \equiv 0$.

При $\Lambda \ne 0$ уравнению $\int_0^x y(s)\,ds = \Lambda\, y(x)$ удовлетворяют функции вида $y(x) = ce^{\frac{x}{\Lambda}}$, а так как $y(0) = 0$, то и в этом случае единственным решением его при любом Λ будет $y(x) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Замечание. Рассматриваемый оператор не является самосопряженным. Действительно, путем интегрирования по частям легко показать, что

$$(Ay, z) = \int_0^1 [\int_0^x y(t)\,dt] \cdot z(x)\,dx \ne \int_0^1 y(x) \cdot [\int_0^x z(t)\,dt]\,dx = (y, Az)\,.$$

Поэтому теорема о существовании собственного вектора в данном случае неприменима.

Пример 3.7. Показать, что оператор Фредгольма $Ay = \int\limits_0^{\pi} \sin x \cos s\, y(s)\, ds,\ \ x \in [0, \pi]$ не имеет характеристических чисел.

Решение. Рассмотрим уравнение $y(x) = \lambda \int\limits_0^{\pi} \sin x \cos s\, y(s)\, ds$. Требуется доказать, что ни для одного λ не существует нетривиальных решений этого уравнения.

Обозначим $C = \int\limits_0^{\pi} \cos s\, y(s)\, ds$, тогда $y(x) = \lambda C \sin x$, и для определения C имеем $C = \int\limits_0^{\pi} \cos s \underbrace{C\lambda \sin s}_{y(s)} ds = 0$. Следовательно, $y(x) \equiv 0$ при любом λ, т.е. характеристических чисел у исследуемого оператора нет.

Замечание. В данном случае ядро $K(x,s) = \sin x \cdot \cos s$ непрерывное, но не симметрическое, поэтому оператор является вполне непрерывным, но не самосопряженным, и теорема о существовании собственного вектора неприменима.

Пример 3.8. Найти характеристические числа и построить ортонормированные собственные функции однородного уравнения Фредгольма с непрерывным вырожденным симметрическим ядром $y(x) = \lambda \int\limits_0^{\pi} \sin(x+s)\, y(s)\, ds$.

Решение. Ядро исследуемого оператора симметрическое и непрерывное, следовательно, оператор Фредгольма в данной задаче является вполне непрерывным и самосопряженным.

Представим ядро в виде $K(x,s) = \sin(x+s) = \sin x \cos s + \cos x \sin s$ и обозначим $\int\limits_0^{\pi} \cos s\, y(s)\, ds = a_1$, $\int\limits_0^{\pi} \sin s\, y(s)\, ds = a_2$. Тогда $y(x) = \lambda a_1 \sin x + \lambda a_2 \cos x$, где

$$a_1 = \int\limits_0^{\pi} \cos s\, y(s)\, ds = \lambda \int\limits_0^{\pi} \cos s\, (a_1 \sin s + a_2 \cos s)\, ds = \lambda \frac{\pi}{2} a_2,$$

$$a_2 = \int\limits_0^{\pi} \sin s\, y(s)\, ds = \lambda \int\limits_0^{\pi} \sin s\, (a_1 \sin s + a_2 \cos s)\, ds = \lambda \frac{\pi}{2} a_1.$$

Однородная система $\begin{cases} a_1 - \dfrac{\lambda\pi}{2} a_2 = 0 \\ \dfrac{\lambda\pi}{2} a_1 - a_2 = 0 \end{cases}$ имеет нетривиальные решения при условии

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{\lambda\pi}{2} \\ -\dfrac{\lambda\pi}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 = 0,$$

откуда определяем характеристические числа $\lambda_1 = \dfrac{2}{\pi}$ и $\lambda_2 = -\dfrac{2}{\pi}$.

При $\lambda_1 = \dfrac{2}{\pi}$ имеем $a_2 = a_1$, т.е. собственная функция $y_1(x) = C(\sin x + \cos x)$;

при $\lambda_2 = -\dfrac{2}{\pi}$ получаем $a_2 = -a_1$, и собственная функция $y_2(x) = C(\sin x - \cos x)$.

Так как собственные функции, отвечающие различным характеристическим числам, ортогональны, то искомая ортонормированная система имеет вид

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin x + \cos x), \qquad \varphi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin x - \cos x).$$

Пример 3.9. Если для любых $x, s \in [a,b]$ имеет место равенство $K(x,s) = -K(s,x)$, то ядро $K(x,s)$ называется кососимметрическим.

Показать, что все отличные от нуля собственные значения оператора Фредгольма $Ay = \int\limits_a^b K(x,s)y(s)\,ds,\ \ x \in [a,b]$ с вещественным кососимметрическим ядром - чисто мнимые числа.

Решение. Пусть Λ - одно из собственных значений, т.е. $\int\limits_a^b K(x,s)y(s)ds = \Lambda y(x)$, где $y(x) \not\equiv 0$ - соответствующая собственная функция (возможно, комплекснозначная). Так как ядро вещественно, то имеет место также $\int\limits_a^b K(x,s)y^*(s)ds = \Lambda^* y^*(x)$, где знак * означает комплексное сопряжение.

Умножим второе уравнение на $y(x)$, а первое - на комплексно сопряженную функцию $y^*(x)$, и проинтегрируем по отрезку $[a,b]$. Получим:

$$\Lambda\int\limits_a^b |\,y(x)\,|^2\,dx = \int\limits_a^b y^*(x)dx\int\limits_a^b K(x,s)y(s)ds\,,$$

$$\Lambda^*\int\limits_a^b |\,y(x)\,|^2\,dx = \int\limits_a^b y(x)dx\int\limits_a^b K(x,s)y^*(s)ds = \int\limits_a^b y^*(s)ds\int\limits_a^b K(x,s)y(x)dx\,.$$

Меняя обозначения переменных интегрирования в последнем интеграле и учитывая, что $K(x,s) = -K(s,x)$ приходим к соотношению

$$\Lambda^*\int\limits_a^b |\,y(x)\,|^2\,dx = \int\limits_a^b y^*(x)dx\int\limits_a^b K(s,x)y(s)ds = -\int\limits_a^b y^*(x)dx\int\limits_a^b K(x,s)y(s)ds\,.$$

Складывая первое и последнее равенства, найдем $(\Lambda + \Lambda^*)\int\limits_a^b |\,y(x)\,|^2\,dx = 0$. Так как $y(x) \not\equiv 0$, то $\Lambda^* = -\Lambda$, т.е. либо $\Lambda = 0$, либо является чисто мнимым.

Замечание. Напомним, что все собственные значения самосопряженного оператора - вещественные числа. В рассмотренном случае интегральный оператор Фредгольма не является самосопряженным, поэтому собственные значения могут не быть вещественными (в данном примере все ненулевые собственные значения оказались чисто мнимыми).

Пример 3.10. Найти характеристические числа и собственные функции оператора Фредгольма с вырожденным кососимметрическим ядром $Ay = \int\limits_0^1 (x-s)y(s)ds, \quad x \in [0,1]$.

Решение. Требуется найти такие λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения $y(x) = \lambda \int\limits_0^1 (x-s)y(s)ds$. Обозначим $C_1 = \int\limits_0^1 y(s)ds, \quad C_2 = \int\limits_0^1 s\,y(s)ds$, тогда $y(x) = \lambda(C_1 x - C_2)$, и для определения C_1, C_2 получим соотношения

$$C_1 = \lambda \int\limits_0^1 \underbrace{(C_1 s - C_2)}_{y(s)} ds = \frac{\lambda}{2} C_1 - \lambda C_2, \;\; C_2 = \lambda \int\limits_0^1 s \cdot \underbrace{(C_1 s - C_2)}_{y(s)} ds = \frac{\lambda}{3} C_1 - \frac{\lambda}{2} C_2,$$

откуда

$$\begin{cases} \left(1 - \dfrac{\lambda}{2}\right) C_1 + \lambda C_2 = 0 \\ -\dfrac{\lambda}{3} C_1 + \left(1 + \dfrac{\lambda}{2}\right) C_2 = 0 \end{cases}.$$

Нетривиальные решения системы существуют при условии

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \dfrac{\lambda}{2} & \lambda \\ -\dfrac{\lambda}{3} & 1 + \dfrac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{12}\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = +i\,2\sqrt{3}, \; \lambda_2 = -i\,2\sqrt{3}.$$

Пусть $\lambda = \lambda_1 = 2i\sqrt{3}$ тогда, полагая $C_1 = C \cdot 2\sqrt{3}$, где C - произвольная постоянная, найдем $C_2 = C \cdot (i + \sqrt{3})$ и собственные функции $y_1(x) = \lambda_1(C_1 x - C_2) = C(12i\,x - 6i + 2\sqrt{3})$.

Пусть $\lambda = \lambda_2 = -2i\sqrt{3}$ тогда, также полагая $C_1 = C \cdot 2\sqrt{3}$, найдем $C_2 = C \cdot (-i + \sqrt{3})$ и собственные функции $y_2(x) = \lambda_2(C_1 x - C_2) = C(-12i\,x + 6i + 2\sqrt{3})$.

Замечание. Если оператор несамосопряженный, то характеристические числа могут не быть действительными. В данном случае, ядро оператора $K(x,s) = x - s$ не симметрическое, и характеристические числа оказались чисто мнимыми (см. пример 3.9).

Задачи для самостоятельного решения

3.1 Пусть, $K^{(n+1)}(x,s) = K(x,s) - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i}$, где φ_k - собственные функции оператора Фредгольма $Ay = \int\limits_a^b K(x,s)\; y(s)\; ds$ с вещественным непрерывным симметрическим ядром, отвечающие характеристическим числам λ_k, $k = 1,2,3,...,n$. Рассмотрим интегральный оператор $A^{(n+1)}$ с ядром $K^{(n+1)}(x,s)$: $A^{(n+1)}y = \int\limits_a^b K^{(n+1)}(x,s)\,y(s)\,ds$.

Доказать, что:

а) все собственные функции φ_k, $k = n+1,...$ оператора A, отвечающие характеристическим числам $|\lambda_{n+1}| \le ... \le |\lambda_k| \le ...$, являются также собственными функциями оператора $A^{(n+1)}$, соответствующими тем же характеристическим числам $|\lambda_{n+1}| \le ... \le |\lambda_k| \le ...$;

б) оператор $A^{(n+1)}$ не имеет других характеристических чисел, отличных от λ_k, $k = n+1,\dots$;

в) функции φ_k, $k = 1,2,\dots,n$ также являются собственными функциями оператора $A^{(n+1)}$, соответствующими нулевому собственному значению ядра $K^{(n+1)}(x,s)$.

3.2 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма с непрерывным симметрическим ядром, действующий $h[a,b] \to h[a,b]$, является самосопряженным оператором.

3.3 Доказать, что интегральный оператор Вольтерра с непрерывным не равным тождественно нулю ядром, действующий $h[a,b] \to h[a,b]$, не является самосопряженным оператором.

3.4 Доказать, что интегральный оператор Вольтерра $By = \int\limits_a^x K(x,s)\, y(s)\, ds$ с вещественным непрерывным ядром является вполне непрерывным при действии $h[a,b] \to C[a,b]$ и $h[a,b] \to h[a,b]$.

3.5 Пусть φ - собственный вектор самосопряженного оператора *A*, действующего в евклидовом пространстве. Доказать, что множество векторов, ортогональных φ, образуют замкнутое линейное подпространство, инвариантное относительно *A*.

3.6 Доказать, что если интегральный оператор Фредгольма с непрерывным симметрическим вещественным ядром $K(x,s)$ действует в комплексном пространстве $h^C[a,b]$ (комплексном расширении пространства $h[a,b]$), то этот оператор может иметь только вещественные собственные значения.

3.7 Доказать, что собственные векторы самосопряженного оператора A, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

3.8 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма с ядром $K(x,s) = \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx \cdot \sin ns}{n^2}$, действующий в пространстве $h[0,\pi]$, является невырожденным.

3.9 Доказать, что нуль является простым собственным значением интегрального оператора Фредгольма с ядром $K(x,s) = \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin nx \cdot \sin ns}{n^2}$, действующего в пространстве $h[0,\pi]$,.

3.10 Доказать, что нулевое собственное значение интегрального оператора Фредгольма с ядром $K(x,s) = \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2nx \cdot \sin 2ns}{(2n)^2}$, действующего в пространстве $h[0,\pi]$, имеет бесконечную кратность.

3.11 Привести пример интегрального оператора Фредгольма, нулевое собственное значение которого имеет конечную кратность.

3.12 Найти характеристические числа и собственные функции однородных уравнений Фредгольма с вырожденными непрерывными симметрическими ядрами в следующих случаях (все характеристические числа - вещественные):

а) $y(x) = \lambda\int\limits_0^{\pi}\cos x\cos s\, y(s)\, ds$;

б) $y(x) = \lambda\int\limits_0^{\pi}\sin x\sin s\, y(s)\, ds$;

в) $y(x) = \lambda\int\limits_0^{\pi}\cos(x+s)\, y(s)\, ds$;

г) $y(x) = \lambda\int\limits_0^{\pi}\cos(x-s)\, y(s)\, ds$;

д) $y(x) = \lambda\int\limits_{-1}^{1}(x+s)\, y(s)\, ds$;

е) $y(x) = \lambda\int\limits_0^{1}xs\, y(s)\, ds$;

ж) $y(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (xs + x^2 s^2)\, y(s)\, ds$;

з) $y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(x - s))\, y(s)\, ds$.

3.13 Найти характеристические числа и собственные функции уравнений Фредгольма с вырожденными несимметрическими ядрами (характеристические числа необязательно вещественные, и их может не быть вовсе):

а) $y(x) = \lambda \int_{0}^{1} (xs - 2x^2)\, y(s)\, ds$;

б) $y(x) = \lambda \int_{0}^{2\pi} \sin(x - s)\, y(s)\, ds$;

в) $y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} x \cos s\, y(s)\, ds$;

г) $y(x) = \lambda \int_{0}^{\pi} \cos x \sin s\; y(s)\, ds$.

Ответы к задачам

3.11 $Ay = \int_{0}^{\pi} K(x,s)\, y(s)\, ds$, где $K(x,s) = \dfrac{2}{\pi} \sum_{n=k}^{\infty} \dfrac{\sin nx \cdot \sin ns}{n^2}$ $(k \ge 2)$.

3.12 а) $\lambda = \dfrac{2}{\pi}$, $y(x) = C \cos x$;

б) $\lambda = \dfrac{2}{\pi}$, $y(x) = C \sin x$;

в) $\lambda_1 = \dfrac{2}{\pi}$, $y_1(x) = C \cos x$; $\lambda_2 = -\dfrac{2}{\pi}$, $y_2(x) = C \sin x$;

г) $\lambda = \dfrac{2}{\pi}$, $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ (ранг характеристического числа равен 2).

д) $\lambda_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $y_1(x) = C(1 + x\sqrt{3})$; $\lambda_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $y_2(x) = C(1 - x\sqrt{3})$;

е) $\lambda = 3$, $y(x) = C\, x$;

ж) $\lambda_1 = \dfrac{3}{2}$, $y_1 = Cx$; $\lambda_2 = \dfrac{5}{2}$, $y_2 = Cx^2$;

з) $\lambda_1 = \dfrac{1}{2\pi}$, $y_1 = C$; $\lambda_2 = \dfrac{1}{\pi}$, $y_2 = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ (ранг λ_2 равен 2).

3.13 а) $\lambda_1 = -6$, $y_1 = C(x - 2x^2)$;

б) $\lambda_1 = \dfrac{i}{\pi}$, $y_1 = Ce^{ix}$; $\lambda_2 = -\dfrac{i}{\pi}$, $y_2 = Ce^{-ix}$;

в) характеристических чисел (и собственных функций) нет;

г) характеристических чисел (и собственных функций) нет.

ТЕМА 4

Принцип сжимающих отображений. Метод последовательных приближений для уравнения Фредгольма 2-рода с "малым" λ.

Основные определения и теоремы

Пусть D– оператор, вообще говоря, нелинейный, действующий $D:\ B \to B$, где B - банахово (полное нормированное) пространство.

Оператор D называется сжимающим (или сжимающим отображением), если существует константа q: $0 \le q < 1$, такая, что для любых $y_1, y_2 \in B$ имеет место неравенство $\| Dy_1 - Dy_2 \| \le q \| y_1 - y_2 \|$.

Элемент y называется неподвижной точкой оператора D, если $Dy = y$.

Теорема (о неподвижной точке). Пусть D – сжимающий оператор. Тогда существует, и притом единственная, точка $y \in B$ такая, что $Dy = y$. Эта точка может быть найдена методом последовательных приближений: $y_{n+1} = Dy_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где $y_0 \in B$ - произвольная фиксированная точка из B (начальное приближение), причем $y_n \to y : Dy = y$.

Теорема. Пусть D- оператор, отображающий банахово пространство B в себя, и пусть существует натуральное число k такое, что D^k- сжимающий оператор. Тогда оператор D имеет единственную неподвижную точку (т.е. такую, что $Dy = y$), причем y может быть найдено методом последовательных приближений: для любого $y_0 \in B$ $y_{n+1} = D\, y_n$, $n = 0,1,\ldots$, $y_n \to y$.

Рассмотрим интегральный оператор Фредгольма $A:\ C[a,b] \to C[a,b]$: $Ay \equiv \int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds$, где ядро $K(x,s)$ непрерывно по совокупности переменных x,s, но, вообще говоря, не симметрическое. Обозначим: $\max\limits_{x,s\in[a,b]} |K(x,s)| = K_0$, тогда при $|\lambda| < \dfrac{1}{K_0\,(b-a)}$ оператор λA является сжимающим. Заметим, что $C[a,b]$- банахово, т.е. полное нормированное пространство.

Теорема. Если $|\lambda| < \dfrac{1}{K_0\,(b-a)}$ (такие λ будем называть «малыми»), то неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода $y(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds + f(x)$ имеет единственное решение для любой непрерывной функции $f(x) \in C[a,b]$, причем решение может быть найдено методом последовательных приближений.

Следствие 1. При $|\lambda| < \dfrac{1}{K_0\,(b-a)}$ однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

Следствие 2. Если у оператора Фредгольма есть характеристические числа, то $|\lambda_{\min}| \ge \dfrac{1}{K_0\,(b-a)}$.

Если записать уравнение Фредгольма 2-го рода в операторной форме $y = \lambda Ay + f$ или $(I - \lambda A)y = f$, то в случае, когда решение существует и единственно, его (решение) можно представить в виде $y = (I - \lambda A)^{-1} f = (I + \lambda R_\lambda) f = f + \lambda R_\lambda f$, где R_λ - интегральный оператор с непрерывным по x, s ядром $R(x,s,\lambda)$, т.е. $y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda) f(s) ds$.

Ядро $R(x,s,\lambda)$ оператора R_λ называется <u>резольвентой</u>.

Функции $K_1(x,s) \equiv K(x,s)$, $K_n(x,s) = \int_a^b K(x,t) K_{n-1}(t,s)\, dt$, $n = 2, 3, \dots$ называются <u>повторными (итерированными)</u> ядрами. Так как при "малых" λ ($|\lambda| < \dfrac{1}{K_0 (b-a)}$) ряд $\underbrace{K_1(x,s)}_{=K(x,s)} + \lambda K_2(x,s) + \dots + \lambda^{n-1} K_n(x,s) + \dots$ сходится равномерно по $x, s \in [a,b]$, то резольвента $R(x,s,\lambda)$ может быть найдена по формуле $R(x,s,\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,s)$.

В случае "малых" λ для оператора R_λ имеет место представление $R_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} A^n$ - ряд Неймана.

Примеры решения задач

Пример 4.1. Доказать, что сжимающий оператор является непрерывным.

Решение. Напомним определение сжимающего оператора. Оператор A, действующий в банаховом пространстве B называется сжимающим, если $\exists\, q$**:** $0 \le q < 1$ такое, что $\forall\ y_1, y_2 \in B$: $\|Ay_1 - Ay_2\| \le q \cdot \|y_1 - y_2\|$.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и пусть $0 < \delta \le \varepsilon$, тогда для любых элементов y, y_0 таких, что $\|y - y_0\| \le \delta$, учитывая $0 \le q < 1$, имеем: $\|Ay - Ay_0\| \le q \cdot \|y - y_0\| < \|y - y_0\| \le \delta \le \varepsilon$. Таким образом, оператор является непрерывным, что и требовалось доказать.

Пример 4.2. Пусть оператор A, действующий в банаховом пространстве B, обладает свойством, что $P = A^n$ является сжимающим оператором.
Доказать, что уравнение $y = Ay$ имеет единственное решение.

Решение. Так как P - сжимающий, то существует единственная неподвижная точка y: $y = Py$ этого оператора, которая может быть найдена методом последовательных приближений, т.е. для указанного y справедливы следующие утверждения:

а) для $\forall\ y_0 \in B$ последовательность $P^k y_0 \xrightarrow[k\to\infty]{} y$ (неподвижной точке оператора P);

б) $Py = y \Rightarrow P(Py) = Py = y \Rightarrow \dots \Rightarrow P^k y = y$ для любого *k=1,2,3…* .

Рассмотрим $Ay = A \underbrace{P^k y}_{=y} = A A^{nk} y = A^{nk} Ay = P^k Ay$. Обозначив $Ay \equiv y_0$ и продолжая предыдущее равенство, с учетом а) получим $Ay = P^k Ay = P^k y_0 \xrightarrow[\text{см. а)}]{k\to\infty} y$, откуда следует, что $y = Ay$, т.е. неподвижная точка оператора P является также и неподвижной точкой оператора A.

Для доказательства единственности неподвижной точки оператора A предположим противное, т.е. пусть существуют две точки $\tilde{y} \neq \overline{y}$ такие что $A\tilde{y} = \tilde{y}$ и $A\overline{y} = \overline{y}$, тогда $A^n\tilde{y} \equiv P\tilde{y} = \tilde{y}$ и $A^n\overline{y} \equiv P\overline{y} = \overline{y}$, откуда следует, что $\tilde{y} = \overline{y}$ в силу единственности неподвижной точки оператора P.

Пример 4.3. Пусть в банаховом пространстве B заданы два сжимающих оператора A и D, т.е. для любых элементов $x, y \in B$ имеют место соотношения $\| Ax - Ay \| \leq \alpha_A \cdot \| x - y \|$, $0 \leq \alpha_A < 1$ и $\| Dx - Dy \| \leq \alpha_D \cdot \| x - y \|$, $0 \leq \alpha_D < 1$.

Зададим некоторое число $\varepsilon > 0$. Назовем операторы A и D ε-близкими, если для $\forall z \in B$ выполнено $\| Az - Dz \| \leq \varepsilon$.

Доказать, что неподвижные точки x^* и y^* этих операторов находятся на расстоянии $\rho(x^*, y^*) \equiv \| x^* - y^* \| \leq \dfrac{\varepsilon}{1-\alpha}$, где $\alpha = \max\{\alpha_A, \alpha_D\} < 1$.

Решение. Пусть x^*- неподвижная точка оператора A, т.е. $x^* = Ax^*$, а y^* - неподвижная точка оператора D: $y^* = Dy^*$.

Возьмем x^* в качестве начального приближения итерационного процесса для определения y^*, т.е. $y_0 = x^*$, $y_1 = Dy_0 \equiv Dx^*, \ldots$, $y_k = D^k x^*$; $y^* = \lim\limits_{k \to \infty} D^k x^*$. Тогда

$$\| x^* - y_k \| \leq \| x^* - y_1 \| + \| y_1 - y_2 \| + \ldots + \| y_{k-1} - y_k \| \leq \| x^* - y_1 \| \cdot (1 + \alpha_D + \alpha_D^2 + \ldots + \alpha_D^{k-1}) \leq \frac{\| x^* - Dx^* \|}{1-\alpha_D}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим $\| x^* - y^* \| \leq \dfrac{\| x^* - Dx^* \|}{1-\alpha_D} = \dfrac{\| Ax^* - Dx^* \|}{1-\alpha_D} \leq \dfrac{\| Ax^* - Dx^* \|}{1-\alpha} \leq \dfrac{\varepsilon}{1-\alpha}$, что и требовалось доказать.

Пример 4.4. Привести пример оператора, переводящего банахово пространство B в себя, удовлетворяющего условию $\| Ay - Az \|_B < \| y - z \|_B$ для любых $y, z \in B$, и не имеющего неподвижной точки.

Решение. Рассмотрим следующий оператор в пространстве R^1 : $Ax = x + \dfrac{\pi}{2} - arctg\, x$. Для любых $y, z \in B$, применяя формулу Лагранжа (ξ между y и z), получим $\| Ay - Az \|_{R^1} = | y - arctg\, y - (z - arctg\, z) | = | 1 - \dfrac{1}{1+\xi^2} | \cdot | y - z | < | y - z | \equiv \| y - z \|_{R^1}$. Однако, для всех y имеет место неравенство $Ay = y + \dfrac{\pi}{2} - arctg\, y > y$, что и означает отсутствие неподвижной точки рассматриваемого оператора.

Замечание. Указанный оператор не удовлетворяет теореме о неподвижной точке!!!

Пример 4.5. При каких λ оператор Фредгольма $Ay = \lambda\int\limits_0^1 (x-s)\,y(s)\,ds$ является сжимающим

а) при действии $C[0,1] \to C[0,1]$;

б) при действии $h[0,1] \to h[0,1]$.

Решение.

а) Рассмотрим две произвольные непрерывные функции $y(x),\ z(x) \in C[0,1]$, тогда

$$\| Ay - Az \|_{C[0,1]} = |\lambda| \cdot \max_{x\in[0,1]} \left| \int\limits_0^1 (x-s)[y(s)-z(s)]\,ds \right| \le |\lambda| \cdot \max_{s\in[0,1]} |y(s)-z(s)| \cdot \max_{x,s\in[0,1]} |x-s| =$$

$= |\lambda| \cdot \| y - z \|_{C[0,1]}$, т.е. оператор A: $C[0,1] \to C[0,1]$ является сжимающим при $|\lambda| < 1$.

б) Рассмотрим две произвольные непрерывные функции $y(x),\ z(x) \in h[0,1]$, тогда

$$\| Ay - Az \|^2_{h[0,1]} = \lambda^2 \cdot \int\limits_0^1 dx \left[\int\limits_0^1 (x-s)\cdot[y(s)-z(s)]\,ds \right]^2 \le \quad \text{(неравенство Коши-Буняковского)}$$

$$\le \lambda^2 \cdot \int\limits_0^1 \{\int\limits_0^1 (x-s)^2\,ds \cdot \underbrace{\int\limits_0^1 [y(s)-z(s)]^2 ds\}}_{=\|y-z\|^2_{h[0,1]}}\,dx = \lambda^2 \cdot \| y-z \|^2_{h[0,1]} \cdot \int\limits_0^1\int\limits_0^1 (x-s)^2\,ds\,dx = \lambda^2 \cdot \| y-z \|^2_{h[0,1]} \cdot \frac{1}{6},$$

следовательно, оператор A: $h[0,1] \to h[0,1]$ является сжимающим при условии $|\lambda| < \sqrt{6}$.

Пример 4.6. При каких λ оператор Вольтерра $By = \lambda\int\limits_0^x (x-s)\,y(s)\,ds$ является сжимающим

а) при действии $C[0,1] \to C[0,1]$;

б) при действии $h[0,1] \to h[0,1]$.

Решение.

а) Рассмотрим любые две непрерывные функции $y(x),\ z(x) \in C[0,1]$, тогда

$$\| Ay - Az \|_{C[0,1]} = |\lambda| \cdot \max_{x\in[0,1]} \left| \int\limits_0^x \underbrace{(x-s)}_{\ge 0}[y(s)-z(s)]\,ds \right| \le |\lambda| \cdot \max_{s\in[0,1]} |y(s)-z(s)| \cdot \max_{x\in[0,1]} \int\limits_0^x (x-s)\,ds =$$

$= \dfrac{|\lambda|}{2} \cdot \| y - z \|_{C[0,1]}$, т.е. оператор B: $C[0,1] \to C[0,1]$ является сжимающим при $|\lambda| < 2$.

б) Рассмотрим две произвольные непрерывные функции $y(x),\ z(x) \in h[0,1]$, тогда

$$\| Ay - Az \|^2_{h[0,1]} = \lambda^2 \cdot \int\limits_0^1 dx \left[\int\limits_0^x (x-s)\cdot[y(s)-z(s)]\,ds \right]^2 \le \quad \text{(неравенство Коши-Буняковского)}$$

$$\le \lambda^2 \cdot \int\limits_0^1 [\int\limits_0^x (x-s)^2\,ds \cdot \underbrace{\int\limits_0^x [y(s)-z(s)]^2 ds]}_{\le\|y-z\|^2_{h[0,1]}}\,dx = \lambda^2 \cdot \| y-z \|^2_{h[0,1]} \cdot \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x (x-s)^2\,ds = \frac{\lambda^2}{12} \cdot \| y-z \|^2_{h[0,1]},$$

следовательно, оператор B: $h[0,1] \to h[0,1]$ будет сжимающим при $|\lambda| < \sqrt{12}$.

Пример 4.7. Считая параметр λ "малым", методом последовательных приближений построить резольвенту и получить решение уравнения Фредгольма $y(x)=\lambda\int\limits_0^\pi \sin(x+s)\,y(s)\,ds+\cos x$. Сформулировать критерий "малого" λ.

Замечание. Приведенный ниже способ построения резольвенты служит иллюстрацией к доказанной в курсе лекций теореме о возможности представления резольвенты $R(x,s,\lambda)$ в виде ряда $R(x,s,\lambda)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\lambda^{m-1}K_m(x,s)$ при "малых" λ. Так как ядро оператора Фредгольма в данной задаче является вырожденным, то решение уравнения может быть получено более эффективно методами, рассмотренными в примерах 6.1-6.2 (тема 6). Для построения резольвенты также могут быть использованы и другие приемы (сравните с результатом примера 6.3!!!).

Решение. Начнем с построения резольвенты $R(x,s,\lambda)$, выписав итерированные ядра:

$K_1(x,s)\equiv K(x,s)=\sin(x+s)$,

$$K_2(x,s)=\int\limits_0^\pi K(x,t)K_1(t,s)\,dt=\int\limits_0^\pi \sin(x+t)\,\sin(t+s)\,dt=\frac{\pi}{2}\cdot\cos(x-s),$$

$$K_3(x,s)=\int\limits_0^\pi K(x,t)K_2(t,s)\,dt=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi \sin(x+t)\,\cos(t-s)\,dt=\frac{\pi^2}{4}\cdot\sin(x+s),$$

....

$$K_{2m}(x,s)=\int\limits_0^\pi K(x,t)K_{2m-1}(t,s)\,dt=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m-1}\cdot\cos(x-s)\,,\quad m=1,2,3...,$$

$$K_{2m+1}(x,s)=\int\limits_0^\pi K(x,t)K_{2m}(t,s)\,dt=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m}\cdot\sin(x+s)\,,\quad m=1,2,3...\ .$$

Используя формулу для резольвенты $R(x,s,\lambda)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\lambda^{m-1}K_m(x,s)$ и суммируя ряд отдельно по четным и нечетным номерам, найдем $R(x,s,\lambda)=\dfrac{\sin(x+s)+\dfrac{\pi\lambda}{2}\cos(x-s)}{1-\left(\dfrac{\pi\lambda}{2}\right)^2}$.

Критерий "малого" λ в данном случае совпадает с условием сходимости ряда Неймана $|\lambda|<\dfrac{2}{\pi}$, и как легко видеть, выполняется на более широком множестве значений λ, чем достаточное условие, сформулированное в теореме о разрешимости уравнения Фредгольма 2-го рода: $|\lambda|<\dfrac{1}{K_0\,(b-a)}=\dfrac{1}{\pi}$.

Далее, так как решение представимо в виде $y(x)=f(x)+\lambda\int\limits_a^b R(x,s,\lambda)\,f(s)\,ds$, то полагая $f(x)=\cos x$, получим

$$y(x)=\cos x+\lambda\int\limits_0^\pi R(x,s,\lambda)\cos s\,ds=\cos x+\frac{\dfrac{\lambda\pi}{2}\cdot\sin x+\left(\dfrac{\pi\lambda}{2}\right)^2\cdot\cos x}{1-\left(\dfrac{\pi\lambda}{2}\right)^2}=\frac{\cos x+\dfrac{\lambda\pi}{2}\cdot\sin x}{1-\left(\dfrac{\pi\lambda}{2}\right)^2}.$$

Тот же результат дает и непосредственное применение метода последовательных приближений. Положим $y_0 \equiv 0$, $y_{n+1} = \lambda A y_n + f$, $n = 0,1,2,...$, тогда

$$y_1 = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+s) \cdot 0 \cdot ds + \cos x = \cos x ;$$

$$y_2 = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+s) \cos s \, ds + \cos x = \lambda \frac{\pi}{2} \sin x + \cos x ;$$

$$y_3 = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+s)[\lambda \frac{\pi}{2} \sin s + \cos s] ds + \cos x = \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 \cos x + \lambda \frac{\pi}{2} \sin x + \cos x ;$$

………………..

$$y_{2n+1} = \cos x \left[1 + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^{2n}\right] + \sin x \cdot \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) \cdot \left[1 + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^{2n-2}\right];$$

$$y_{2n+2} = \cos x \left[1 + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^{2n}\right] + \sin x \cdot \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) \cdot \left[1 + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^{2n}\right].$$

Легко видеть, что если $|\lambda| < \frac{2}{\pi}$, то при $n \to \infty$ обе подпоследовательности сходятся к одной и той же функции $y(x) = \dfrac{\cos x + \frac{\lambda\pi}{2} \cdot \sin x}{1 - \left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)^2}$, которая уже была получена выше в качестве решения задачи другим способом.

Пример 4.8. Методом последовательных приближений решить уравнение Фредгольма $y(x) = \lambda \int_0^1 y(s) \, ds + 1$. Показать, что ряд Неймана сходится лишь в области $|\lambda| < 1$, однако решение, полученное при этом условии, существует при всех $\lambda \neq 1$.

Решение. Решение уравнения Фредгольма $y = \lambda A y + f$ может быть записано в виде ряда Неймана $y(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n A^n f(x)$.

В нашем случае $Af(x) = \int_0^1 f(x) dx$, $f(x) = 1$, поэтому $Af(x) = \int_0^1 1 \cdot dx = 1$ и, аналогично, $A^n f(x) = 1$ $(n = 2,3,...)$. Следовательно, при условии $|\lambda| < 1$, ряд Неймана $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n A^n f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$ сходится, и решением уравнения является функция $y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n = \dfrac{1}{1-\lambda}$, однако если $|\lambda| \geq 1$, то ряд расходится, и справедливость полученной формулы оказывается под сомнением.

С другой стороны, обозначив $\int_0^1 y(s)\,ds = C$, будем иметь $y(x) = \lambda C + 1$, откуда $C = \int_0^1 (\lambda C + 1)\,ds = \lambda C + 1$. Поэтому, при $\lambda = 1$ уравнение неразрешимо, а для остальных $\lambda \neq 1$ находим $C = \dfrac{1}{1-\lambda}$ и $y(x) = 1 + \lambda C = 1 + \dfrac{\lambda}{1-\lambda} = \dfrac{1}{1-\lambda}$.

Итак, решение задачи существует при всех $\lambda \neq 1$ и дается формулой $y(x) = \dfrac{1}{1-\lambda}$, что совпадает с выражением, полученным ранее лишь на множестве $|\lambda| < 1$. Заметим, что при условии $|\lambda| > 1$ решение также существует, несмотря на то, что ряд Неймана расходится.

Задачи для самостоятельного решения

4.1 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма с вещественным непрерывным ядром, действующий в пространстве $C[a,b]$, не имеет характеристических чисел на интервале $\lambda \in \left(0,\ \dfrac{1}{K_0(b-a)}\right)$, где $K_0 = \max\limits_{x,s\in[a,b]} |K(x,s)|$.

4.2 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма с вещественным непрерывным ядром, действующий в пространстве $h[a,b]$, не имеет характеристических чисел на интервале $\lambda \in \left(0,\ \dfrac{1}{K_0(b-a)}\right)$, где $K_0 = \max\limits_{x,s\in[a,b]} |K(x,s)|$.

4.3 Доказать, что задача решения уравнения Фредгольма 2-рода $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds + f(x)$ с вещественным непрерывным ядром корректно поставлена при условии $|\lambda| < \dfrac{1}{K_0(b-a)}$, где $K_0 = \max\limits_{x,s\in[a,b]} |K(x,s)|$

а) в пространстве $C[a,b]$;

б) в пространстве $h[a,b]$.

4.4 Доказать, что оператор Фредгольма $y(x) = \dfrac{1}{2}\int_0^1 x s^2\, y(s)\,ds + 1$ является сжимающим в пространстве $C[0,1]$, и найти его неподвижную точку.

4.5 Методом последовательных приближений построить резольвенту и получить решение уравнения Фредгольма 2-го рода:

а) $y(x) = \lambda \int_0^1 x s\ y(s)\,ds + x$;

б) $y(x) = \lambda \int_0^1 \dfrac{x}{1+s^2}\ y(s)\,ds + 1 + x^2$;

в) $y(x) = \lambda \int_0^1 y(s)\,ds + \sin \pi x$;

г) $y(x)=\lambda\int\limits_0^{\pi} x\sin 2s\, y(s)\,ds+\cos 2x$;

д) $y(x)=\lambda\int\limits_0^{2\pi} \sin(x+s)\, y(s)\,ds+2$;

е) $y(x)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot\cos s\ \ y(s)\,ds+1 \qquad (\lambda=1)$;

ж) $y(x)=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^{1} x\,e^{s}\cdot y(s)\,ds+e^{-x} \qquad (\lambda=\dfrac{1}{2})$;

з) $y(x)=\int\limits_0^{\frac{1}{2}} y(s)\,ds+x \qquad (\lambda=1)$.

В случаях а) - д) сформулировать критерий "малого" λ; в примерах е) - з) проверить выполнение соответствующего условия.

Ответы к задачам

4.4 $y=\dfrac{4}{21}x+1$.

4.5 а) Резольвента $R(x,s,\lambda)=\dfrac{3xs}{3-\lambda}$, решение $y(x)=\dfrac{3x}{3-\lambda}$; условие сходимости последовательных приближений $|\lambda|<3$, достаточное условие теоремы выполнено при $|\lambda|<1$.

б) Резольвента $R(x,s,\lambda)=\dfrac{1}{1-\lambda\dfrac{\ln 2}{2}}\cdot\dfrac{x}{1+s^2}$, решение $y(x)=1+\dfrac{\lambda x}{1-\lambda\dfrac{\ln 2}{2}}+x^2$; условие сходимости последовательных приближений $|\lambda|<\dfrac{2}{\ln 2}$, достаточное условие теоремы выполнено лишь при $|\lambda|<1$.

в) Резольвента $R(x,s,\lambda)=\dfrac{1}{1-\lambda}$, решение $y(x)=\sin\pi x+\dfrac{2\lambda}{\pi(1-\lambda)}$; условие сходимости последовательных приближений $|\lambda|<1$ совпадает с достаточным условием теоремы.

г) Резольвента $R(x,s,\lambda)=\dfrac{x\cdot\sin 2s}{1+\dfrac{\lambda\pi}{2}}$, решение $y(x)=\cos 2x$; последовательные приближения сходятся при $|\lambda|<\dfrac{2}{\pi}$, достаточное условие теоремы выполнено только для $|\lambda|<\dfrac{1}{\pi^2}$.

д) Резольвента $R(x,s,\lambda)=\dfrac{\sin(x+s)+\lambda\pi\cos(x-s)}{1-\lambda^2\pi^2}$, решение $y(x)=2$; последовательные приближения сходятся при $|\lambda|<\dfrac{1}{\pi}$, достаточное условие теоремы выполнено только при $|\lambda|<\dfrac{1}{2\pi}$.

е) Резольвента $R(x,s,\lambda)=\dfrac{2\sin x\cdot\cos s}{2-\lambda}$, решение $y(x)=1+2\sin x$; последовательные приближения сходятся при $|\lambda|<2$, однако достаточное условие "малого" λ: $|\lambda|=1<\dfrac{2}{\pi}$, сформулированное в теореме, - не выполнено.

ж) Резольвента $R(x,s,\lambda)=\dfrac{xe^s}{1-\lambda}$, решение $y(x)=x+e^{-x}$; последовательные приближения сходятся при $|\lambda|<1$, однако достаточное условие теоремы $|\lambda|=\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{e}$ не выполняется.

з) Резольвента $R(x,s,\lambda)=\dfrac{2}{2-\lambda}$, решение $y(x)=x+\dfrac{1}{4}$; последовательные приближения сходятся при $|\lambda|<2$, достаточное условие теоремы $|\lambda|=1<2$ также выполняется.

ТЕМА 5

Линейное уравнение Вольтерра 2-го рода.

Основные определения и теоремы.

Уравнение $y = \lambda \int_a^x K(x,s)\, y(s)\, ds + f(x)$, $\quad x,s \in [a,b]$, или в операторной форме $y = \lambda\, B\, y + f$, называется уравнением Вольтерра 2-го рода.

Пусть ядро $K(x,s)$ непрерывно по совокупности переменных на своей треугольной области определения $\Delta = \{x, s : a \le s \le x \le b\}$ и не равно нулю тождественно, $f(x)$ – непрерывная на $[a,b]$ функция.

Теорема. Уравнение Вольтерра 2-го рода при любом значении λ имеет единственное решение для любой непрерывной функции $f(x)$. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений $y_{n+1} = \lambda\, B\, y_n + f$, $\quad \forall y_0 \in C[a,b]$, $f(x) \in C[a,b]$.

Следствие 1. При любом λ однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

Следствие 2. Оператор Вольтерра, действующий $C[a,b] \to C[a,b]$, не имеет характеристических чисел. Таким образом, оператор Вольтерра является примером вполне непрерывного оператора, не имеющего ни одного характеристического числа.

Метод последовательных приближений для уравнения Вольтерра 2-го рода называется методом Пикара и выглядит так: для любого начального приближения $y_0 \in C[a,b]$ определим $y_{n+1} = \lambda \int_a^x K(x,s)\, y_n(s)\, ds + f(x), \quad n = 0,1,2,\dots$, или $y_{n+1} = \lambda\, B\, y_n + f$, причем $y_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} y(x)$.

Полагая $y_0 = 0$, получаем ряд Неймана $y = f + \lambda\, B\, f + \lambda^2\, B^2\, f + \ldots + \lambda^n\, B^n\, f + \ldots$.

Если записать уравнение Вольтерра 2-го рода в операторной форме $y = \lambda A y + f$ или $(I - \lambda A) y = f$, то так как решение существует и единственно при любой непрерывной функции $f(x)$ и любом λ, его (решение) можно представить в виде $y = (I - \lambda A)^{-1} f = (I + \lambda R_\lambda) f = f + \lambda R_\lambda f$, где R_λ - интегральный оператор с непрерывным по x, s ядром $R(x,s,\lambda)$, т.е. $y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x,s,\lambda) f(s) ds$.

Ядро $R(x,s,\lambda)$ оператора R_λ называется <u>резольвентой</u>.

Функции $K_1(x,s) \equiv K(x,s)$, $\quad K_n(x,s) = \int_s^x K(x,t)\, K_{n-1}(t,s)\, dt$, $\quad n = 2,3,\ldots$ называются <u>повторными</u> (итерированными) ядрами. Ряд $\underbrace{K_1(x,s)}_{=K(x,s)} + \lambda K_2(x,s) + \ldots + \lambda^{n-1} K_n(x,s) + \ldots$ сходится равномерно по $x, s \in [a,b]$ <u>при любых λ</u>, в отличие от аналогичного ряда для уравнения Фредгольма, сходимость которого гарантировалась лишь при $|\lambda| < \dfrac{1}{K_0\,(b-a)}$, и резольвента $R(x,s,\lambda)$ может быть получена по формуле $R(x,s,\lambda) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,s)$.

Уравнения Вольтерра с ядрами специального вида могут также решаться путем сведения к дифференциальному уравнению, либо с использованием преобразования Лапласа (примеры 5.4 и 5.5).

Примеры решения задач.

Пример 5.1. Методом последовательных приближений построить резольвенту интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода $y(x) = \lambda \int\limits_0^x e^{-(x-s)}\, y(s)\, ds + x e^{\frac{x^2}{2}}$ и найти решение этого уравнения при $\lambda = 1$.

Решение. Вычислим повторные ядра этого уравнения: $K_1(x,s) = K(x,s) = e^{-(x-s)}$,

$$K_2(x,s) = \int\limits_s^x K(x,t)\, K_1(t,s)\, dt = \int\limits_s^x e^{-(x-t)}\, e^{-(t-s)}\, dt = (x-s)\cdot e^{-(x-s)},$$

$$K_3(x,s) = \int\limits_s^x K(x,t)\, K_2(t,s)\, dt = \int\limits_s^x e^{-(x-t)} \cdot (t-s)\, e^{-(t-s)}\, dt = \frac{(x-s)^2}{2} \cdot e^{-(x-s)},$$

…………

$$K_{m+1}(x,s) = \int\limits_s^x K(x,t)\, K_m(t,s)\, dt = \frac{(x-s)^m}{m!} \cdot e^{-(x-s)}.$$

Подставляя эти выражения в формулу для резольвенты, получим $R(x,s,\lambda) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,s) = e^{-(x-s)} \cdot e^{\lambda(x-s)} = e^{(\lambda-1)(x-s)}$. Заметим, что ряд сходится при любых λ, что обеспечивается не малостью λ, как было в случае уравнения Фредгольма, а наличием множителя $m!$ в знаменателях повторных ядер.

Далее, положив $\lambda = 1$, получим $R(x,s,\lambda) = R(x,s,1) = 1$ и запишем решение уравнения при $f(x) = x e^{\frac{x^2}{2}}$ в виде

$$y(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^x R(x,s,\lambda)\, f(s)\, ds = x e^{\frac{x^2}{2}} + 1 \cdot \int\limits_0^x s\, e^{\frac{s^2}{2}}\, ds = (x+1)\cdot e^{\frac{x^2}{2}} - 1.$$

Пример 5.2. Методом последовательных приближений решить уравнение Вольтерра $y(x) = \int\limits_0^x (s-x)\, y(s)\, ds + 1$.

Решение. Итерационный процесс для данного уравнения выглядит так: $y_{n+1}(x) = \int\limits_0^x (s-x)\, y_n(s)\, ds + 1$. Выберем в качестве начального приближения $y_0(x) \equiv 0$, тогда последовательно найдем:

$$y_1(x) = \int_0^x (s-x)\cdot 0\, ds + 1 = 1,$$

$$y_2(x) = \int_0^x (s-x)\, y_1(s)\, ds + 1 = \int_0^x (s-x)\cdot 1\ ds + 1 = 1 - \frac{x^2}{2},$$

$$y_3(x) = \int_0^x (s-x)\, y_2(s)\, ds + 1 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},$$

……………..

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x (s-x)\, y_n(s)\, ds + 1 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим функцию $y(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = \cos x$, которая и является решением рассматриваемого уравнения.

Пример 5.3. Доказать, что если ядро уравнения Вольтерра $y(x) = \lambda \int_0^x K(x,s)\, y(s)\, ds + f(x)$ зависит только от разности аргументов, т.е. $K(x,s) = K(x-s)$, то все повторные ядра, а следовательно и резольвента, также являются функциями лишь от разности $(x-s)$.

Решение. Пусть $K(x,s) = K(x-s)$, тогда $K_2(x,s) = \int_s^x K(x-t)\, K(t-s)\, dt$. Произведя замену переменной интегрирования по формуле $t - s = \xi$, получим $K_2(x,s) = \int_0^{x-s} K(x-s-\xi)\, K(\xi)\, d\xi = \int_0^{x-s} F_2(x-s,\xi)\ d\xi = \Phi_2(x-s)$.

Действуя далее аналогичным путем, найдем, $K_m(x,s) = \int_s^x K(x,t)\, K_{m-1}(t,s)\, dt = \int_s^x K(x-t)\, K_{m-1}(t-s)\, dt = \int_0^{x-s} K(x-s-\xi)\, K_{m-1}(\xi)\, d\xi = \Phi_m(x-s)$, что и требовалось доказать.

Пример 5.4. С помощью преобразования Лапласа найти резольвенту и записать решение уравнения Вольтерра $y(x) = \int_0^x \sin(x-s)\, y(s)\, ds + f(x)$.

Решение. Поставим в соответствие функциям, входящим в уравнение, их изображения: $y(x) \div Y(p)$, $f(x) \div F(p)$, $\sin x \div \dfrac{1}{p^2+1} \equiv K(p)$. Учитывая, что изображение свертки двух функций есть произведение их изображений, получим $Y(p) = K(p)\cdot Y(p) + F(p)$, откуда $Y(p) = \dfrac{F(p)}{1-K(p)} = F(p) + \dfrac{K(p)}{1-K(p)} \cdot F(p)$.

Используя результат предыдущей задачи, можно сделать вывод, что резольвента зависит лишь от разности $(x-s)$, следовательно, решение исходного уравнения представимо в виде $y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-s,1)\, f(s)\, ds$. Сравнивая последние две формулы, легко видеть, что изображение искомой резольвенты есть $\tilde{R}(p)=\dfrac{K(p)}{1-K(p)}$. Подставив сюда $K(p)=\dfrac{1}{p^2+1}$, получим $\tilde{R}(p)=\dfrac{1}{p^2}$, откуда найдем $R(x,s,1)=R(x-s,1)=\ x-s$.

Решение уравнения теперь можно записать так: $y(x)=f(x)+\int\limits_0^x (x-s)\,f(s)\,ds$.

Пример 5.5. Решить интегральное уравнение Вольтерра $y(x)=\sin x+\int\limits_0^x \sin(x-s)\,y(s)\,ds$, сведя его к задаче Коши для дифференциального уравнения.

Решение. Легко видеть, что решение уравнения удовлетворяет условию $y(0)=0$.

Последовательно продифференцируем интегральное уравнение и найдем

$$y'(x)=\cos x+\int\limits_0^x \cos(x-s)\,y(s)\,ds+\sin(x-x)y(x)=\cos x+\int\limits_0^x \cos(x-s)\,y(s)\,ds\,,\qquad y'(0)=1,$$

$$y''(x)=-\sin x-\int\limits_0^x \sin(x-s)\,y(s)\,ds+\cos(x-x)y(x)=-\sin x+y(x)-\int\limits_0^x \sin(x-s)\,y(s)\,ds\,.$$

Складывая последнее равенство с исходным, получим $y''=0$. Решение задачи Коши с начальными условиями $y(0)=0$, $y'(0)=1$ дает $y(x)=x$.

Замечание. Этот же результат можно получить, используя формулу решения предыдущего примера, полагая в ней $f(x)=\sin x$:

$$y(x)=\sin x+\int\limits_0^x (x-s)\ \sin s\ ds=\sin x+x-\sin x=x\ .$$

Задачи для самостоятельного решения.

5.1 Доказать, что интегральный оператор Вольтерра, действующий в $C[a,b]$, не имеет характеристических чисел.

5.2 Доказать, что интегральный оператор Вольтерра, действующий в $h[a,b]$, не имеет характеристических чисел.

5.3 Доказать, что задача решения уравнения Вольтерра 2-рода $y(x)=\int\limits_a^x K(x,s)\ y(s)\ ds+f(x)$ корректно поставлена

а) в пространстве $C[a,b]$;

б) в пространстве $h[a,b]$.

5.4 Решить интегральное уравнение, сведя его к задаче Коши:

а) $y(x)=e^x+\int\limits_0^x y(s)\,ds$;

б) $y(x)=4e^x+3x-4-\int\limits_0^x (x-s)\,y(s)\,ds$;

в) $y(x)=\sin x+2\int\limits_0^x e^{-s}\ y(x-s)\,ds$ (Указание: сделать в интеграле замену переменной $x-s=\xi$).

5.5 Методом последовательных приближений построить резольвенту и получить решение интегрального уравнения:

а) $y(x) = 1 + \int\limits_0^x s\, y(s)\, ds$;

б) $y(x) = x - \int\limits_0^x (x-s)\, y(s)\, ds$;

в) $y(x) = x + \dfrac{x^2}{2} - \int\limits_0^x y(s)\, ds$.

5.6 Решить интегральное уравнение, используя преобразование Лапласа:

а) $y(x) = x - \int\limits_0^x e^{x-s} y(s)\, ds$;

б) $y(x) = \cos x - \int\limits_0^x (x-s) \cos(x-s)\; y(s)\, ds$;

в) $y(x) = 2 + \dfrac{1}{6}\int\limits_0^x (x-s)^3\, y(s)\, ds$.

5.7 Решить уравнение Вольтерра 1-го рода $\int\limits_0^x e^{x-s} y(s)\, ds = \sin x$

а) применив преобразование Лапласа;

б) продифференцировав уравнение и сведя его к уравнению Вольтерра 2-го рода.

Ответы к задачам.

5.4 а) $y' - y = e^x$, $y(0) = 1$; $y(x) = (x+1)\cdot e^x$;

б) $y'' + y = 4e^x$, $y(0) = 0, \quad y'(0) = 7$; $y(x) = 2e^x - 2\cos x + 5\sin x$;

в) $y' - y = \sin x + \cos x$, $y(0) = 0$; $y(x) = e^x - \cos x$.

5.5 а) $R(x,s,\lambda) = s e^{\frac{x^2 - s^2}{2}}$, $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$;

б) $R(x,s,\lambda) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}(s-x)$, $y(x) = \sin x$;

в) $R(x,s,\lambda) = e^{\lambda(x-s)}$, $y(x) = x$.

5.6 а) $y(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$;

б) $y(x) = \dfrac{2}{3}\cos x\sqrt{3} + \dfrac{1}{3}$;

в) $y(x) = \cos x + ch\, x$.

5.7 $y(x) = \cos x - \sin x$

ТЕМА 6

Неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода. Уравнения Фредгольма с вырожденными ядрами. Теоремы Фредгольма.

Основные определения и теоремы

Рассмотрим неоднородное уравнение Фредгольма $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds + f(x)$.

<u>Сопряженным</u> (<u>союзным</u>) интегральным уравнением называется уравнение с ядром $K^*(x,s) = K(s,x)$. Если ядро симметрическое, то союзное уравнение совпадает с исходным.

Наряду с уравнением $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds + f(x)$ или, в операторной форме $y = \lambda A y + f$, будем рассматривать <u>союзное</u> с ним интегральное уравнение

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K^*(x,s) \psi(s)\, ds + g(x)$$

(в операторной форме $\Leftrightarrow$ $\psi = \lambda A^* \psi + g$), $g(x)$ - непрерывная функция.

Сформулируем ***4 теоремы Фредгольма***.

Теорема 1. Однородное уравнение

$$(1) \qquad \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi(s)\, ds = 0$$

и союзное с ним однородное уравнение

$$(2) \qquad \psi(x) - \lambda \int_a^b K^*(x,s) \psi(s)\, ds = 0$$

($K^*(x, s)=K(s, x)$) при любом фиксированном λ имеют либо только тривиальные решения, либо одинаковое конечное число линейно независимых решений: $\varphi_1, ..., \varphi_n$; $\psi_1, ..., \psi_n$.

В курсе лекций теорема была доказана для интегральных уравнений с вырожденными и симметрическими ядрами.

Теорема 2. Для разрешимости неоднородного уравнения

$$(3) \qquad \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi(s)\, ds = f(x)$$

необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была ортогональна всем линейно независимым решениям однородного союзного уравнения (2) ($f(x) \perp \psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$, если λ - характеристическое число).

В курсе лекций теорема была доказана для случаев симметрических и вырожденных ядер.

Теорема 3 (**альтернатива Фредгольма**).

Либо неоднородное уравнение (3) разрешимо при любой неоднородности - непрерывной функции $f(x)$, либо однородное уравнение (1) имеет нетривиальное решение.

В курсе лекций теорема была доказана для случаев симметрических и вырожденных ядер.

Теорема 4. Множество характеристических чисел однородного уравнения (1) не более, чем счетно, с единственной возможной предельной точкой ∞.

Этот результат справедлив для любого вполне непрерывного оператора. В курсе лекций он был получен для вполне непрерывных самосопряженных операторов и, тем самым, доказан для случая симметрических ядер. Для интегральных операторов с вырожденными ядрами результат тривиален.

Замечание. В курсе лекций теоремы Фредгольма были доказаны для уравнений с симметрическими непрерывными ядрами и уравнений с непрерывными вырожденными ядрами. Они справедливы и для общего случая произвольного непрерывного ядра, так как имеет место следующая

Теорема. Интегральное уравнение Фредгольма 2 рода $y = \lambda Ay + f$ с невырожденным ядром при фиксированном λ можно заменить эквивалентным интегральным уравнением с вырожденным ядром.

Опишем процедуру решения неоднородного интегрального уравнения Фредгольма $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds + f(x) \equiv \lambda Ay + f$ в случаях вырожденного ядра и симметричного ядра.

Напомним, что ядро $K(x,s)$ интегрального оператора Фредгольма называется <u>вырожденным</u>, если оно представимо в виде $K(x,s) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) b_j(s)$, где функции $a_j(x),\ b_j(s),\quad j = 1,2,...,n$ непрерывны по своим аргументам на $[a,b]$. Не ограничивая общности, можно считать, что $a_1(x),...,a_n(x)$ – линейно независимы, и $b_1(s),...,b_n(s)$ – также линейно независимы.

Рассмотрим уравнения Фредгольма 2 рода $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds + f(x)$ с вырожденным ядром $K(x,s) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) b_j(s)$, где $f(x)$ – заданная непрерывная функция.

Обозначив $c_j = \int_a^b b_j(s)\, y(s)\, ds$, будем иметь $y(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j\, a_j(x) + f(x)$. Для нахождения c_j получим эквивалентную систему алгебраических уравнений $c_i = \int_a^b y(x) b_i(x)\, dx = \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j \underbrace{\int_a^b a_j(x) b_i(x)\, dx}_{k_{ij}} + \underbrace{\int_a^b f(x) b_i(x)\, dx}_{f_i}$, или $c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} k_{ij}\, c_j = f_i,\ \ i = 1,...,n$.

Обозначим определитель этой системы $D(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} 1-\lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & ... & -\lambda k_{1n} \\ -\lambda k_{21} & 1-\lambda k_{22} & ... & -\lambda k_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & ... & 1-\lambda k_{nn} \end{vmatrix}$.

Теорема. Если λ не является характеристическим числом (т.е. $D(\lambda) \neq 0$), то интегральное уравнение Фредгольма 2 рода имеет решение при любой непрерывной неоднородности $f(x)$, причем это решение единственно для каждой функции $f(x)$.

Решение алгебраической системы для c_j в этом случае может быть найдено, например, по формулам Крамера: $c_i = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{k=1}^{n} D_{ki}(\lambda)\, f_k$, где $D_{ki}(\lambda)$ - алгебраические дополнения i-го столбца определителя $D(\lambda)$ ($D(\lambda)$ и $D_{ki}(\lambda)$ называются определителями Фредгольма). Подставляя c_j в формулу $y(x)=\lambda\sum_{j=1}^{n}c_j\,a_j(x)+f(x)$, получим

$$y(x)=f(x)+\lambda\ \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{D(\lambda)}\ \sum_{k=1}^{n}D_{ki}(\lambda)\ a_i(x)\int_a^b f(s)b_k(s)\,ds\,,$$

или $y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,s,\lambda)\,f(s)\,ds$, где $R(x,s,\lambda)=\dfrac{1}{D(\lambda)}\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}D_{ki}(\lambda)\ a_i(x)\ b_k(s)$ – резольвента интегрального оператора.

Теперь рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода в случае симметрического ядра.

Пусть ядро $K(x,s)$ непрерывно по совокупности переменных, симметрическое и $K(x,s)\not\equiv 0$; λ - вещественное число; $f(x)$- заданная непрерывная функция. Пусть $|\lambda_1|\le|\lambda_2|\le\ldots\le|\lambda_n|\le\ldots$ - последовательность характеристических чисел интегрального оператора, которым соответствует ортонормированная система собственных функций $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n,\ldots$ (каждое характеристическое число повторяется в этой последовательности столько раз, какова его кратность!!!).

Возможны два случая:

а) $\lambda\ne\lambda_k$, $k=1,2,\ldots$ Тогда решение можно записать в следующем виде $y(x)=f(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\lambda}{\lambda_k-\lambda}f_k\,\varphi_k(x)$, где $f_k=\int_a^b f(s)\varphi_k(s)\,ds$ - коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по ортонормированной системе собственных функций $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n,\ldots$, или

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\ \varphi_k(s)}{\lambda_k-\lambda}\right)}_{R(x,s,\lambda)}f(s)\ ds=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,s,\lambda)\,f(s)\,ds\,,$$

где $R(x,s,\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\varphi_k(x)\ \varphi_k(s)}{\lambda_k-\lambda}$ - резольвента интегрального оператора Фредгольма.

б) $\lambda=\lambda_{ko}$, где λ_{ko} - характеристическое число интегрального оператора, имеющее кратность r, т.е. ему отвечают r ортонормированных собственных функций $\varphi_{ko}(x)$,..., $\varphi_{ko+r-1}(x)$. В этом случае решение не единственно и определяется формулой

$$y(x)=f(x)+\sum_{\substack{k=1\\ k\ne k_o\\ \ldots\\ k\ne k_0+r-1}}^{\infty}\frac{\lambda f_k}{\lambda_k-\lambda}\ \varphi_k(x)+c_{ko}\,\varphi_{ko}(x)+\ldots+c_{ko+r-1}\,\varphi_{ko+r-1}(x)\,,$$

где c_{ko} , ... , c_{ko+r-1} - произвольные константы, причем решение существует при условии ортогональности $f(x)$ всем собственным функциям $\varphi_{ko}(x)$,..., $\varphi_{ko+r-1}(x)$, соответствующим характеристическому числу λ_{ko}. Бесконечный ряд, записанный в данном выражении, сходится абсолютно и равномерно.

Заметим, что решения отличаются одно от другого на функции, являющиеся элементами $Ker(I-\lambda A)$ (нуль-пространства) оператора $I-\lambda A$.

Теорема. А) Если однородное уравнение Фредгольма 2-го рода с непрерывным симметрическим ядром имеет только тривиальное решение (т.е. $\lambda\ne\lambda_k$, $k=1,2,\ldots$), то неоднородное уравнение имеет единственное решение для любой непрерывной функции $f(x)$.

Б) Если же однородное уравнение имеет нетривиальные решения (т.е. $\lambda = \lambda_k$ – совпадает с одним из характеристических чисел), то неоднородное уравнение разрешимо в том и только том случае, когда неоднородность – непрерывная функция $f(x)$ – ортогональна всем собственным функциям, соответствующим данному λ (ортогональна всем решениям однородного уравнения).

В) В последнем случае, если решение есть, то оно не единственно.

Теорема. (Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода с симметрическими ядрами):

Либо неоднородное уравнение имеет решение при любой непрерывной функции $f(x)$, либо однородное уравнение имеет нетривиальное решение.

Примеры решения задач

Пример 6.1. Показать, что характеристические числа однородного уравнения Фредгольма $y(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (s^2 + sx) y(s) ds$ и соответствующего однородного союзного уравнения $z(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (x^2 + sx) z(s) ds$ совпадают, и при этих λ указанные уравнения имеют одинаковое число линейно независимых решений.

Решение. Обозначим $\int_{-1}^{1} s^2 y(s)\, ds = a_1$, $\int_{-1}^{1} s\, y(s)\, ds = a_2$, $\int_{-1}^{1} z(s)\, ds = b_1$ $\int_{-1}^{1} s\, z(s)\, ds = b_2$. Тогда решения указанных уравнений примут вид $y(x) = \lambda a_1 + \lambda a_2 x$, $z(x) = \lambda b_1 x^2 + \lambda b_2 x$, и для определения коэффициентов получим

$$a_1 = \lambda \int_{-1}^{1} s^2 (a_1 + a_2 s) ds = \frac{2\lambda}{3} a_1, \quad a_2 = \lambda \int_{-1}^{1} s\,(a_1 + a_2 s)\, ds = \frac{2\lambda}{3} a_2,$$

$$b_1 = \lambda \int_{-1}^{1} (b_1 s^2 + b_2 s)\, ds = \frac{2\lambda}{3} b_1, \quad b_2 = \lambda \int_{0}^{1} s\,(b_1 s^2 + b_2 s)\, ds = \frac{2\lambda}{3} b_2.$$

Итак, при $\lambda \neq \frac{3}{2}$ имеем $a_1 = a_2 = 0 \Rightarrow y(x) \equiv 0$, $b_1 = b_2 = 0 \Rightarrow z(x) \equiv 0$; при $\lambda = \frac{3}{2}$ a_2, a_1, b_1, b_2 остаются произвольными. Поэтому $\lambda = \frac{3}{2}$ является характеристическим числом для обоих рассматриваемые уравнений, и при этом λ они имеют по два линейно независимых решения: $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$ и $z_1(x) = x$, $z_2(x) = x^2$.

Пример 6.2. Для каждого λ исследовать разрешимость и построить решение неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным несимметрическим ядром $y(x)=\lambda\int\limits_{-1}^{1}(s^2-sx)y(s)ds+x^3$.

Решение. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y(x)=\lambda\int\limits_{-1}^{1}(s^2-sx)y(s)ds$.

Обозначим $\int\limits_{-1}^{1}s^2y(s)\,ds=a_1$, $\int\limits_{-1}^{1}s\,y(s)\,ds=a_2$, тогда решение его имеет вид $y(x)=\lambda a_1-\lambda a_2 x$,

где $a_1=\lambda\int\limits_{-1}^{1}s^2(a_1-a_2s)ds=\frac{2\lambda}{3}a_1$, $a_2=\lambda\int\limits_{-1}^{1}s\,(a_1-a_2s)\,ds=-\frac{2\lambda}{3}a_2$. Итак, при $\lambda\neq\pm\frac{3}{2}$ $a_1=a_2=0$, однородное уравнение имеет только тривиальное решение, а значит исходное неоднородное уравнение имеет единственное решение.

При $\lambda=\pm\frac{3}{2}$ (характеристические числа) однородное уравнение имеет нетривиальные решения: если $\lambda=+\frac{3}{2}$, то $y_1(x)=C$, если $\lambda=-\frac{3}{2}$, то $y_2(x)=Cx$. Поэтому, для указанных значений λ вопрос о разрешимости неоднородного уравнения сводится к проверке ортогональности функции $f(x)=x^3$ собственным функциям однородного союзного уравнения $z(x)=\lambda\int\limits_{-1}^{1}(x^2-sx)z(s)ds$.

Найдем собственные функции однородного союзного уравнения. Обозначим $\int\limits_{-1}^{1}z(s)\,ds=b_1$, $\int\limits_{-1}^{1}s\,z(s)\,ds=b_2$, тогда решение его имеет вид $z(x)=\lambda b_1x^2-\lambda b_2 x$, где $b_1=\lambda\int\limits_{-1}^{1}(b_1s^2-b_2s)\,ds=\frac{2\lambda}{3}b_1$, $b_2=\lambda\int\limits_{0}^{1}s\,(b_1s^2-b_2s)\,ds=-\frac{2\lambda}{3}b_2$.

При $\lambda=+\frac{3}{2}$ получаем $b_2=0$, b_1 - произвольно, откуда $z_1(x)\equiv Cx^2$ и $\int\limits_{-1}^{1}f(x)\cdot z_1(x)\,dx=C\int\limits_{-1}^{1}x^3\cdot x^2\,dx=0$, т.е. исследуемое уравнение разрешимо и решение его не единственно;

при $\lambda=-\frac{3}{2}$ имеем $b_1=0$, b_2 - произвольно, откуда $z_2(x)\equiv Cx$ и $\int\limits_{-1}^{1}f(x)\cdot z_2(x)\,dx=C\int\limits_{-1}^{1}x^3\cdot x\,dx\neq 0$, т.е. у исследуемого неоднородного уравнения решений нет.

Чтобы решить уравнения $y(x)=\lambda\int\limits_{-1}^{1}(s^2-sx)y(s)ds+x^3$ снова обозначим $\int\limits_{-1}^{1}s^2y(s)\,ds=a_1$, $\int\limits_{-1}^{1}s\,y(s)\,ds=a_2$, тогда решение представимо в виде $y(x)=\lambda a_1-\lambda a_2x+x^3$, где $a_1=\int\limits_{-1}^{1}s^2(\lambda a_1-\lambda a_2 s+s^3)ds=\frac{2\lambda}{3}a_1$, $a_2=\int\limits_{-1}^{1}s\,(\lambda a_1-\lambda a_2s+s^3)\,ds=-\frac{2\lambda}{3}a_2+\frac{2}{5}$.

При $\lambda = -\dfrac{3}{2}$ имеем $a_1 = 0, \quad 0 \cdot a_2 = \dfrac{2}{5}$, следовательно, решений нет, как и было установлено ранее;

при $\lambda = +\dfrac{3}{2}$ получим $a_2 = \dfrac{1}{5}, \quad a_1 = C$ - произвольная постоянная, поэтому $y(x) \equiv C - \dfrac{3}{10}x + x^3$, т.е. решение не единственно, и определяется с точностью до собственной функции ядра $y_1(x) = C$, отвечающей $\lambda = +\dfrac{3}{2}$.

Если $\lambda \neq \pm\dfrac{3}{2}$, то $a_1 = 0, \; a_2 = \dfrac{6}{5(3+2\lambda)}$, и единственное решение дается формулой $y(x) = -\dfrac{6\lambda\, x}{5(3+2\lambda)} + x^3$.

Пример 6.3. Построить резольвенту уравнения Фредгольма

$$y(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(x+s)\, y(s)\, ds + f(x)$$

а) вычислив определители Фредгольма;

б) в виде разложения по собственным функциям однородного уравнения.

Решение.

а) Ядро исследуемого оператора $K(x,s) = \sin(x+s) = \sin x \cos s + \cos x \sin s$ является вырожденным. Обозначим $a_1(x) = \sin x$, $a_2(x) = \cos x$, $b_1(s) = \cos s$, $b_2(s) = \sin s$ и найдем элементы определителей Фредгольма $k_{ij} = \int_a^b a_j(x) b_i(x)\, dx$:

$$k_{11} = \int_0^\pi a_1(x) b_1(x)\, dx = \int_0^\pi \sin x \cos x\, dx = 0, \quad k_{12} = \int_0^\pi a_2(x) b_1(x)\, dx = \int_0^\pi \cos x \cos x\, dx = \frac{\pi}{2},$$

$$k_{21} = \int_0^\pi a_1(x) b_2(x)\, dx = \int_0^\pi \sin x \sin x\, dx = \frac{\pi}{2}, \quad k_{22} = \int_0^\pi a_2(x) b_2(x)\, dx = \int_0^\pi \cos x \sin x\, dx = 0.$$

Вычислим определители Фредгольма: $D_{11}(\lambda) = 1, \quad D_{12}(\lambda) = D_{21}(\lambda) = -\lambda\dfrac{\pi}{2}, \quad D_{22}(\lambda) = 1$,

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \dots & -\lambda k_{1n} \\ -\lambda k_{21} & 1-\lambda k_{22} & \dots & -\lambda k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & \dots & 1-\lambda k_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda\dfrac{\pi}{2} \\ -\lambda\dfrac{\pi}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \left(\lambda\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Искомая резольвента $R(x,s,\lambda) = \dfrac{1}{D(\lambda)} \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} D_{ki}(\lambda)\; a_i(x)\; b_k(s)$ в случае $D(\lambda) \neq 0$, т.е. $\lambda \neq \pm\dfrac{2}{\pi}$, примет вид $R(x,s,\lambda) = \dfrac{1}{D(\lambda)} \displaystyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} D_{ki}(\lambda)\; a_i(x)\; b_k(s) =$

$$= \frac{1\cdot\sin x\cos s + \lambda\dfrac{\pi}{2}\cdot\sin x\sin s + \lambda\dfrac{\pi}{2}\cdot\cos x\cos s + 1\cdot\cos x\sin s}{1-\left(\lambda\dfrac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{\sin(x+s) + \lambda\dfrac{\pi}{2}\cos(x-s)}{1-\left(\lambda\dfrac{\pi}{2}\right)^2}.$$

б) Характеристические числа и собственные функции однородного уравнения $y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+s)\, y(s)\, ds$ были получены в примере 3.8: $\lambda_1 = \dfrac{2}{\pi}$ и нормированная собственная функция $y_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin x + \cos x)$, $\lambda_2 = -\dfrac{2}{\pi}$ и нормированная собственная функция $y_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin x - \cos x)$. Подставляя их в формулу для резольвенты в случае симметрического непрерывного ядра $R(x,s,\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\varphi_k(x)\ \varphi_k(s)}{\lambda_k - \lambda}$, имеем

$$R(x,s,\lambda) = \frac{1}{\pi}\frac{(\sin x + \cos x)(\sin s + \cos s)}{\frac{2}{\pi} - \lambda} + \frac{1}{\pi}\frac{(\sin x - \cos x)(\sin s - \cos s)}{-\frac{2}{\pi} - \lambda} = \frac{\sin(x+s) + \lambda \frac{\pi}{2}\cos(x-s)}{1 - \left(\lambda \frac{\pi}{2}\right)^2}.$$

Заметим, что этот же результат был получен ранее методом последовательных приближений для "малого" λ (см. пример 4.7).

Пример 6.4. Решить уравнение $y(x) = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin x \sin s + s\right) y(s)\, ds + \sin 2x$.

Решение. Обозначим $\int_{-\pi}^{\pi} \sin s\, y(s)\, ds = C_1$, $\int_{-\pi}^{\pi} s y(s) ds = C_2$, тогда решение примет вид $y(x) = \dfrac{1}{\pi}(C_1 \sin x + C_2) + \sin 2x$. Постоянные C_1, C_2 могут быть найдены из системы

$$\begin{cases} C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin s \cdot (\frac{C_1}{\pi}\sin s + \frac{C_2}{\pi} + \sin 2s) ds = C_1 \\ C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} s \cdot (\frac{C_1}{\pi}\sin s + \frac{C_2}{\pi} + \sin 2s) ds = 2C_1 - \pi \end{cases}.$$

Итак, $C_1 = C$ - остается произвольным, $C_2 = 2C - \pi$, и искомое решение определяется неоднозначно: $y(x) = \sin 2x - 1 + \dfrac{C}{\pi}(\sin x + 2)$.

Замечание. В рассматриваемом случае $\lambda = \dfrac{1}{\pi}$ совпадает с характеристическим числом однородного уравнения $y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sin x \sin s + s\right) y(s)\, ds$. Поэтому решение неоднородного уравнения оказалось не единственно, и определилось с точностью до собственной функции соответствующего однородного уравнения, отвечающей характеристическому числу $\lambda_0 = \dfrac{1}{\pi}$.

Действительно, используя введенные выше обозначения, решение однородного уравнения представим в виде $y(x) = \lambda(C_1 \sin x + C_2)$. Постоянные C_1, C_2 найдем из системы

$$\begin{cases} C_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin s \cdot \lambda (C_1 \sin s + C_2) ds = \lambda \pi C_1 \\ C_2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} s \cdot \lambda (C_1 \sin s + C_2) ds = 2\pi\lambda C_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 (1 - \lambda\pi) = 0 \\ C_1 2\lambda\pi - C_2 = 0 \end{cases},$$

нетривиальное решение которой $C_1 = C$, $C_2 = 2C$ существует при $\lambda = \dfrac{1}{\pi}$.

Таким образом, $\lambda_0 = \dfrac{1}{\pi}$ - характеристическое число, а $y_0(x) = \tilde{C}(\sin x + 2)$ - отвечающие ему собственные функции.

Рекомендуем самостоятельно найти собственные функции однородного союзного уравнения $z(x) = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\sin x \sin s + x \right) z(s)\, ds$ и убедиться в выполнении условия разрешимости, т.е. ортогональности неоднородности $f(x) = \sin 2x$ всем собственным функциям однородного союзного уравнения, отвечающим характеристическому числу $\lambda_0 = \dfrac{1}{\pi}$.

Пример 6.5. Решить уравнение $y(x) = 2\int\limits_0^1 \sqrt{xs}\, y(s)\, ds + x$.

Решение. Обозначим $C = \int\limits_0^1 \sqrt{s} y(s) ds$, тогда решение, если оно существует, можно записать в виде $y(x) = 2C\sqrt{x} + x$. Подставляя это выражение в предыдущую формулу, для определения постоянной C получим уравнение $C = \int\limits_0^1 \sqrt{s} \cdot (2C\sqrt{s} + s) ds = C + \dfrac{2}{5}$, которое решений не имеет. Поэтому исследуемое интегральное уравнение Фредгольма $y(x) = 2\int\limits_0^1 \sqrt{xs}\, y(s)\, ds + x$ решений также не имеет.

Замечание. Элементарно устанавливается, что $\lambda_0 = 2$ является характеристическим числом однородного уравнения Фредгольма $y(x) = \lambda \int\limits_0^1 \sqrt{xs}\, y(s)\, ds$ с собственной функцией $y_0(x) = C\sqrt{x}$. Так как ядро симметрическое, то $\lambda_0 = 2$ является также характеристическим числом однородного союзного уравнения с той же собственной функцией $z_0(x) = C\sqrt{x}$.

В рассматриваемом случае имеем $\lambda = 2 = \lambda_0$, т.е. λ совпадает с характеристическим числом однородного уравнения. При этом условие разрешимости (ортогональность неоднородности $f(x) = x$ всем собственным функциям однородного союзного уравнения) не выполнено.

Пример 6.6. Рассмотрим неоднородное уравнение Фредгольма $y(x) = \lambda \int\limits_0^1 K(x,s)\, y(s)\, ds + f(x)$ с симметрическим непрерывным (невырожденным) ядром

$$K(x,s) = \begin{cases} x(1-s), & 0 \le x \le s \\ s(1-x), & s \le x \le 1 \end{cases}, \qquad x, s \in [0;1].$$

1) При $\lambda \ne \lambda_n$, где $\lambda_n = n^2\pi^2$ $(n \in \mathbb{N})$ - собственные значения исследуемого интегрального оператора Фредгольма (см. пример 7.7), построить резольвенту интегрального оператора и записать решение неоднородного уравнения.

2) Исследовать разрешимость уравнения при различных значениях λ и найти решение, если оно существует, в следующих случаях:

а) $f(x) = \sin 2\pi x$;

б) $f(x) = x$.

Решение. 1) Если $\lambda \ne \lambda_n = n^2\pi^2$ $(n \in \mathbb{N})$, то используя построенную в примере 7.7 ортонормированную систему $\varphi_n(x) = \sqrt{2}\,\sin \pi n x$, запишем соответствующую формулу для резольвенты интегрального оператора Фредгольма с симметрическим ядром

$$R(x,s,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(s)}{\lambda_n - \lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}\sin \pi n x \cdot \sqrt{2}\sin \pi n s}{\pi^2 n^2 - \lambda}.$$

Тогда решение неоднородного уравнения примет вид

$$y(x) = f(x) + \lambda \int\limits_0^1 R(x,s,\lambda)\, f(s)\, ds = f(x) + \lambda \int\limits_0^1 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x\, \sin \pi n s}{\pi^2 n^2 - \lambda} \cdot f(s)\, ds.$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования в последней формуле, получим решение в виде разложения в ряд по собственным функциям интегрального оператора Фредгольма с симметрическим ядром

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}\sin \pi n x}{\pi^2 n^2 - \lambda} \cdot \int\limits_0^1 \sqrt{2}\sin \pi n s \cdot f(s)\, ds = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n \cdot \sqrt{2}\sin \pi n x}{\pi^2 n^2 - \lambda},$$

где $f_n = \sqrt{2}\int\limits_0^1 \sin \pi n s \cdot f(s)\, ds$ - коэффициенты Фурье по соответствующей ортонормированной системе $\varphi_n(x) = \sqrt{2}\,\sin \pi n x$.

2) Если $\lambda \ne \lambda_n = n^2\pi^2$ $(n \in \mathbb{N})$, то неоднородное уравнение разрешимо при любой непрерывной функции $f(x)$. Используя полученные выше формулы и вычисляя соответствующие интегралы, имеем:

а) $y(x) = \sin 2\pi x + \lambda \int\limits_0^1 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \pi n x\, \sin \pi n s}{\pi^2 n^2 - \lambda} \cdot \sin 2\pi s\, ds = \sin 2\pi x + \lambda \dfrac{\sin 2\pi x}{4\pi^2 - \lambda} = \dfrac{4\pi^2 \sin 2\pi x}{4\pi^2 - \lambda}$;

б) $y(x) = x + \lambda \int\limits_0^1 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \pi n x\, \sin \pi n s}{\pi^2 n^2 - \lambda} \cdot s\, ds = x + 2\lambda \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}\, \sin \pi n x}{\pi n(\pi^2 n^2 - \lambda)}$.

Если же $\exists n \in \mathbb{N}$ такое, что $\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2$, т.е. λ совпадает с одним из характеристических чисел, то ответ на вопрос о разрешимости уравнения зависит от конкретного вида функции $f(x)$.

В случае б) решение не существует ни при каких $\lambda = \lambda_n = n^2\pi^2$ $(n \in \mathbb{N})$, так как $f(x) = x$ при любом n не ортогональна соответствующей собственной функции

$\varphi_n(x)=\sqrt{2}\,\sin\pi nx$ однородного союзного уравнения (ядро симметрично, поэтому однородное союзное уравнение совпадает с исследуемым при $f(x)\equiv 0$).

В случае а) необходимо рассмотреть два варианта.

При $\lambda=4\pi^2$ решение не существует, так как неоднородность $f(x)=\sin 2\pi x$ не ортогональна собственной функции $\varphi_2(x)=\sqrt{2}\,\sin 2\pi x$ однородного союзного уравнения, отвечающей заданному значению $\lambda=\lambda_2=4\pi^2$.

При $\lambda=\lambda_n=n^2\pi^2\neq 4\pi^2$ функция $f(x)=\sin 2\pi x$ ортогональна собственной функции $\varphi_n(x)=\sqrt{2}\,\sin\pi nx$ ($n\neq 2$) однородного союзного уравнения, отвечающей рассматриваемому $\lambda=\lambda_n=n^2\pi^2$, $n\neq 2$, т.е. решение существует, но не единственно и представимо в виде $y(x)=\sin 2\pi x+\underbrace{\pi^2n^2}_{\lambda}\int\limits_0^1 2\sum\limits_{k=1,k\neq n}^{\infty}\dfrac{\sin\pi kx\,\sin\pi ks}{\pi^2k^2-\underbrace{\pi^2n^2}_{\lambda}}\cdot\sin 2\pi s\,ds+C\sin\pi nx$, где C - произвольная постоянная. Меняя порядок суммирования и интегрирования, заметим, что все слагаемые в сумме при $k\neq 2$ равны нулю, т.к. $\int\limits_0^1\sin\pi ks\cdot\sin 2\pi s\,dx=0\quad(k\neq 2)$.

Поэтому, учитывая что $\int\limits_0^1\sin\pi 2s\cdot\sin 2\pi s\,ds=\dfrac{1}{2}\quad(k=2)$, окончательно получим $y(x)=\sin 2\pi x+\dfrac{\pi^2n^2}{4\pi^2-\pi^2n^2}\sin 2\pi x+C\sin\pi nx=\dfrac{4\sin 2\pi x}{4-n^2}+C\sin\pi nx$, где C - произвольно.

Задачи для самостоятельного решения

6.1 Построить резольвенту уравнений Фредгольма 2-го рода с симметрическим вырожденным ядром при значениях λ, не совпадающих ни с одним их характеристических чисел:
- через определители Фредгольма;
- в виде разложения по собственным функциям ядра:

а) $y(x)=\lambda\int\limits_0^1 x\,s\;y(s)\,ds+f(x)$;

б) $y(x)=\lambda\int\limits_{-1}^1 (x+s)\;y(s)\,ds+f(x)$;

в) $y(x)=\lambda\int\limits_0^{\pi} y(s)\,ds+f(x)$;

г) $y(x)=\lambda\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1+\cos(x-s))y(s)\,ds+f(x)$;

д) $y(x)=\lambda\int\limits_0^{2\pi}(\sin x\sin s+\sin 2x\sin 2s)y(s)\,ds+f(x)$.

6.2 Исследовать разрешимость при различных значениях λ и решить интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода:

а) $y(x)=\lambda\int\limits_0^1 x(1+s)\,y(s)\,ds+x^2$;

б) $y(x) = \lambda \int_0^1 x\, y(s)\, ds + \sin 2\pi x$;

в) $y(x) = \lambda \int_0^1 (1+2x)\, s\, y(s)\, ds + 1 - \frac{3}{2} x$;

г) $y(x) = \lambda \int_0^1 x \sin 2\pi s\, y(s)\, ds + x$;

д) $y(x) = \lambda \int_0^1 \arccos s \cdot y(s)\, ds + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

е) $y(x) = \lambda \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tg\, s \cdot y(s)\, ds + ctg\, x$;

ж) $y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin x \cos s\, y(s)\, ds + \cos x$;

з) $y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+s)\, y(s)\, ds + 1$;

и) $y(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (1+xs)\, y(s)\, ds + \sin \pi x$;

к) $y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x-s)\, y(s)\, ds + \sin 2x$;

л) $y(x) = \lambda \int_{-1}^{1} (2xs^3 + 5x^2 s^2)\, y(s)\, ds + 7x^4 + 3$;

м) $y(x) = \lambda \int_0^1 K(x,s)\, y(s)\, ds + \cos \pi x$, где $K(x,s) = \begin{cases} (x+1)\, s, & 0 \le x \le s \\ (s+1)\, x, & s \le x \le 1 \end{cases}$.

Ответы к задачам

6.1 а) $R(x,s,\lambda) = \dfrac{xs}{1 - \frac{1}{3}\lambda} = \dfrac{3xs}{3-\lambda}$;

б) $R(x,s,\lambda) = \dfrac{2\lambda(1+3xs) + 3(x+s)}{3 - 4\lambda^2}$;

в) $R(x,s,\lambda) = \dfrac{1}{1-\lambda\pi}$;

г) $R(x,s,\lambda) = \dfrac{1}{1-2\pi\lambda} + \dfrac{\cos(x-s)}{1-\lambda\pi}$;

д) $R(x,s,\lambda) = \dfrac{\sin x \sin s + \sin 2x \sin 2s}{1-\lambda\pi}$.

6.2 а) При $\lambda \ne \frac{6}{5}$ - единственное решение $y(x) = x^2 + \frac{x}{2} \cdot \frac{7\lambda}{6-5\lambda}$; при $\lambda = \frac{6}{5}$ - решений нет.

б) При $\lambda \neq 2$ - единственное решение $y(x) = \sin 2\pi x$;

при $\lambda = 2$ - $y(x) = Cx + \sin 2\pi x$ - решение не единственно.

в) При $\lambda \neq \dfrac{6}{7}$ - единственное решение $y(x) = 1 - \dfrac{3}{2}x$;

при $\lambda = \dfrac{6}{7}$ - $y(x) = 1 - \dfrac{3}{2}x + C(1+2x)$ - решение не единственно.

г) При $\lambda \neq -2\pi$ - единственное решение $y(x) = \dfrac{2\pi x}{\lambda + 2\pi}$; при $\lambda = -2\pi$ - решений нет.

д) При $\lambda \neq 1$ - единственное решение $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{\pi^2 \lambda}{8(1-\lambda)}$; при $\lambda = 1$ - решений нет.

е) При всех $\lambda \in \mathbb{R}$ - единственное решение $y(x) = ctg\, x + \dfrac{\pi\lambda}{2}$.

ж) При всех $\lambda \in \mathbb{R}$ - единственное решение $y(x) = \cos x + \dfrac{\pi\lambda}{2}\sin x$.

з) При $\lambda \neq \pm\dfrac{2}{\pi}$ - единственное решение $y(x) = 1 - \dfrac{4\lambda \sin x}{2 + \lambda\pi}$; при $\lambda = -\dfrac{2}{\pi}$ - решений нет;

при $\lambda = \dfrac{2}{\pi}$ - $y(x) = C\cos x - \dfrac{2}{\pi}\sin x + 1$ - решение не единственно.

и) При $\lambda \neq \dfrac{1}{2}$, $\lambda \neq \dfrac{3}{2}$ - единственное решение $y(x) = \sin \pi x + \dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{3\lambda}{3 - 2\lambda} x$;

при $\lambda = \dfrac{3}{2}$ - решений нет;

при $\lambda = \dfrac{1}{2}$ - $y(x) = C + \sin \pi x + \dfrac{3x}{2\pi}$ - решение не единственно.

к) При $\lambda \neq \dfrac{1}{\pi}$, $\lambda \neq \dfrac{2}{\pi}$ - единственное решение $y(x) = \dfrac{2\sin 2x}{2 - \lambda\pi}$;

при $\lambda = \dfrac{2}{\pi}$ - решений нет; при $\lambda = \dfrac{1}{\pi}$ - $y(x) = 2\sin 2x + C$ - решение не единственно.

л) При $\lambda \neq \dfrac{1}{2}$, $\lambda \neq \dfrac{5}{4}$ - единственное решение $y(x) = 3 + \dfrac{20\lambda}{1 - 2\lambda}x^2 + 7x^4$;

при $\lambda = \dfrac{1}{2}$ - решений нет;

при $\lambda = \dfrac{5}{4}$ - $y(x) = 3 + Cx - \dfrac{50}{3}x^2 + 7x^4$ - решение не единственно.

м) При $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq -\pi^2 n^2$ $(n \in \mathbb{N})$ - единственное решение

$$y(x) = \cos \pi x + \lambda \left[\frac{1+e}{1+\pi^2} \cdot \frac{e^x}{\lambda - 1} - \frac{\pi(\sin \pi x + \pi \cos \pi x)}{2(\lambda + \pi^2)} \right];$$

при $\lambda = 1$, $\lambda = -\pi^2$ - решений нет;

при $\lambda = -\pi^2 n^2$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$ - решение не единственно

$$y(x) = \cos \pi x + \lambda \left[\frac{1+e}{1+\pi^2} \cdot \frac{e^x}{\lambda - 1} - \frac{\pi(\sin \pi x + \pi \cos \pi x)}{2(\lambda + \pi^2)} \right] + C(\sin \pi x + n\pi \cos \pi x).$$

ТЕМА 7

Задача Штурма-Лиувилля. Собственные значения и собственные функции. Сведение задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению.

Основные определения и теоремы

Оператором Штурма-Лиувилля называется дифференциальный оператор 2-го порядка $Ly = \dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy}{dx} \right) - q(x)y$, где коэффициенты $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ удовлетворяют условиям: $p(x)$ непрерывно дифференцируемая, а $q(x)$ и $\rho(x)$ непрерывные на $[a,b]$ функции, причем $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ ($x \in [a,b]$).

Поставим вопрос: найти такие числа λ, при которых существует нетривиальное решение следующей краевой задачи ($\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$):

$$\begin{cases} Ly + \lambda\rho(x)y = 0 \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}.$$

Эта задача называется краевой задачей на собственные значения и собственные функции для оператора Штурма-Лиувилля (сокращенно - задача Штурма-Лиувилля); числа λ_n, при которых существуют нетривиальные решения, - собственными значениями, а соответствующие нетривиальные решения - собственными функциями.

Замечание. Возможны и другие типы дополнительных условий (см. пример 7.5 и задачу 7.3).

Обозначим $G(x,s)$ функцию Грина краевой задачи

$$\begin{cases} Ly = f(x) \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}.$$

Функция $G(x,s)$ непрерывна по совокупности аргументов и симметрична, т.е. $G(x,s) = G(s,x)$; она существует, если однородная краевая задача

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}.$$

имеет только тривиальное решение, т.е. $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора L.

При этих условиях задача Штурма-Лиувилля может быть сведена к эквивалентной задаче на характеристические числа и собственные функции

$$y(x) = -\lambda \int_a^b G(x,s)\,\rho(s)\,y(s)\,ds$$

для интегрального оператора с непрерывным ядром $G(x,s)\rho(s)$. Если $\rho(s) \not\equiv 1$, то ядро интегрального оператора не является симметрическим. Однако ядро

$$K(x,s) = \sqrt{\rho(x)}\; G(x,s)\; \sqrt{\rho(s)}$$

уже является непрерывным и симметрическим.

В курсе лекций для первой краевой задачи $\begin{cases} Ly + \lambda\rho(x)y = 0 \\ y(a) = 0, \quad y(b) = 0 \end{cases}$ доказано существование функции Грина при условиях $\rho(x) > 0,\ p(x) > 0,\quad q(x) \geq 0$ и получены следующие свойства собственных значений и собственных функций.

Теорема. Задача Штурма-Лиувилля эквивалентна задаче на характеристические числа и собственные функции $\varphi(x) = \lambda\int\limits_a^b K(x,s)\varphi(s)\,ds$ для интегрального оператора с непрерывным симметрическим замкнутым ядром $K(x,s) = -\sqrt{\rho(x)}\ G(x,s)\ \sqrt{\rho(s)}$, где $\varphi(x) = y(x)\sqrt{\rho(x)}$.

Теорема. Собственные значения λ_n задачи Штурма-Лиувилля вещественны и образуют бесконечную последовательность, причем $\lambda_n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

Теорема. Каждое собственное значение задачи Штурма-Лиувилля имеет кратность единица.

Теорема. Собственные функции $y_i(x),\ \ y_k(x)$ задачи Штурма-Лиувилля, отвечающие различным собственным значениям $\lambda_i,\ \lambda_k$, ортогональны на отрезке $[a,b]$ с весом $\rho(x)$, т.е. $\int\limits_a^b y_i(x)\,y_k(x)\,\rho(x)\,dx = 0$ при $\lambda_i \neq \lambda_k$, и могут быть нормированы с весом $\rho(x)$: $\int\limits_a^b y_k^2(x)\,\rho(x)\,dx = 1$.

Теорема. (Стеклова). Любая дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяющая однородным краевым условиям на его концах функция $f(x)$ представима в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда Фурье по ортонормированной с весом $\rho(x)$ системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля: $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\,y_n(x)$, где коэффициенты Фурье равны $f_n = \int\limits_a^b f(x)\,y_n(x)\,\rho(x)\,dx$.

Теорема. Собственные значения первой краевой задачи Штурма-Лиувилля положительны. Имеет место следующая оценка снизу для наименьшего собственного значения:

$$\lambda_1 = \int\limits_a^b \left[q\,y_1^2 + p\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 \right] dx \ > \min_{x\in[a,b]} \frac{q(x)}{\rho(x)} \ \geq 0\,.$$

Заметим, что перечисленные результаты остаются справедливыми и для второй краевой задачи (граничные условия имеют вид $y'(a) = 0$, $y'(b) = 0$), если $q(x) \not\equiv 0$, для третьей краевой задачи (граничные условия имеют вид $y'(a) - h_1 y(a) = 0$, $y'(b) + h_2 y(b) = 0$), если $h_1,\,h_2$ – положительные постоянные, а также для смешанных краевых задач, когда левом конце задается условие одного вида, а на правом другого.

Необходимо помнить, что в случае второй краевой задачи при $q(x) \equiv 0$ существует нулевое собственное значение, а остальные собственные значения положительны.

В некоторых случаях задача построения последовательности характеристических чисел и собственных функций интегрального оператора Фредгольма с непрерывным невырожденным ядром специального вида может быть сведена к задаче Штурма-Лиувилля (примеры 7.7 и 7.8)

Примеры решения задач

Пример 7.1. Доказать, что оператор $Ly = \dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy}{dx}\right)$, рассматриваемый на подпространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций из $h[a,b]$, удовлетворяющих граничным условиям $y'(a) = 2y(a), \quad y'(b) = 0$, является симметрическим.

Решение. Требуется доказать, для любых двух функций $y(x),\ z(x)$ из указанного подпространства имеет место равенство $(Ly,z) = (y,Lz)$, где скалярное произведение в $h[a,b]$ введено обычным образом: $(y,z) = \int\limits_a^b y(x)z(x)dx$.

Рассмотрим произвольные дважды непрерывно дифференцируемые на $[a,b]$ функции $y(x),\ z(x)$ такие, что $y'(a) = 2y(a),\ \ y'(b) = 0$ и $z'(a) = 2z(a),\ \ z'(b) = 0$. Тогда, интегрируя по частям и учитывая граничные условия, будем иметь:

$$(Ly,z) = \int\limits_a^b [(p(x)y'(x)]'\,z(x)dx = [py']z\Big|_a^b - \int\limits_a^b p(x)y'(x)\,z'(x)dx = -2p(a)y(a)z(a) - \int\limits_a^b p(x)y'(x)\,z'(x)dx,$$

$$(y,Lz) = \int\limits_a^b y(x)[(p(x)z'(x)]'dx = y[pz']\Big|_a^b - \int\limits_a^b y'(x)\,p(x)z'(x)dx = -2p(a)y(a)z(a) - \int\limits_a^b p(x)y'(x)\,z'(x)dx.$$

Сравнивая полученные выражения, заключаем, что для любых элементов рассматриваемого подпространства выполнено соотношение $(Ly,z) = (y,Lz)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Из полученного результата вытекает, что все собственные значения соответствующей задачи Штурма-Лиувилля вещественны.

Пример 7.2. Доказать, что все собственные значения третьей краевой задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} Ly + \lambda\rho(x)y = 0 \\ y'(a) - y(a) = 0, \quad y'(b) + 3y(b) = 0 \end{cases}$$

положительны, если оператор $Ly = \dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy}{dx}\right) - q(x)y$, причем $\rho(x) > 0,\ p(x) > 0$, $q(x) \ge 0 \quad x \in [a,b]$.

Решение. Заметим, что все собственные значения - вещественны. Это следует из симметричности оператора при заданных граничных условиях, которая может быть установлена аналогично примеру 7.1.

Пусть λ - собственное значение задачи, а $y(x) \not\equiv 0$ - соответствующая собственная функция, т.е. $y(x)$ является решением уравнения $\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{dy}{dx}\right) - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0$.

Умножим это уравнение на $y(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[a,b]$ (первое слагаемое в левой части формулы интегрируется по частям):

$$\int\limits_a^b \left([(p(x)y']' - q(x)y\right)y(x)dx \equiv p(x)y'y\Big|_a^b - \int\limits_a^b p(x)y'^2(x)\,dx - \int\limits_a^b q(x)y^2(x)\,dx = -\lambda\int\limits_a^b \rho(x)y^2(x)\,dx\,.$$

Учитывая граничные условия $y'(a) = y(a),\ y'(b) = -3y(b)$, и то, что $y(x) \not\equiv 0$, получим

$$\lambda \underbrace{\int_a^b \rho(x) y^2(x)\,dx}_{>0,\ т.к.\ \rho(x)>0} = \underbrace{p(b)3y^2(b)}_{\geq 0} + \underbrace{p(a)y^2(a)}_{\geq 0} + \underbrace{\int_a^b p(x) y'^2(x)\,dx}_{\substack{>0,\ если\ y(x)\neq const \\ =0,\ если\ y(x)\equiv const}} + \underbrace{\int_a^b q(x) y^2(x)\,dx}_{\geq 0}.$$

Если $y(x) \neq const$, то правая часть равенства положительна, следовательно $\lambda > 0$; если же считать $y(x) \equiv const$, то из граничных условий следует $y(x) \equiv 0$, что противоречит сделанному выше предположению. Итак, $\lambda > 0$, что и требовалось.

Пример 7.3. Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0 \end{cases}.$$

Решение. В рассматриваемом случае имеем $\rho(x) = 1 > 0,\ p(x) = 1 > 0$, $q(x) \equiv 0$ $x \in [0, l]$, поэтому можно, действуя как в примере 7.2, установить, что все собственные значения действительны, причем одно из них $\lambda_0 = 0$, а остальные - положительны.

В случае $\lambda = \lambda_0 = 0$ имеем $y(x) = C_1 x + C_2$ и, учитывая граничные условия, получаем $y_0(x) = C$.

Пусть $\lambda > 0$, тогда общее решение уравнения имеет вид $y(x) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}x$.

Дополнительные условия дают $y'(0) = 0 \ \Rightarrow\ C_1 = 0$, $y'(l) = 0 \ \Rightarrow\ C_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}l = 0$, откуда получаем $\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$. Следовательно, искомые собственные значения $\lambda_n = \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2$, $n = 1, 2, 3...$, а отвечающие им собственные функции $y_n(x) = C\cos\dfrac{\pi n}{l}x$.

Пример 7.4. Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) - y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \end{cases}.$$

Решение. Так как $\rho(x) = 1 > 0,\ p(x) = 1 > 0$, $q(x) \equiv 0$ $x \in [0, l]$, то все собственные значения действительны и положительны.

Общее решение уравнения имеет вид $y(x) = C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}x$, и из граничных условий вытекает $y'(0) - y(0) = C_1\sqrt{\lambda} - C_2 = 0$, $y(1) = C_1 \sin\sqrt{\lambda} + C_2\cos\sqrt{\lambda} = 0$. Нетривиальное решение этой системы, т.е. $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$, существует, если

$$\begin{vmatrix} \sqrt{\lambda} & -1 \\ \sin\sqrt{\lambda} & \cos\sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} + \sin\sqrt{\lambda} = 0, \quad \lambda > 0.$$

Поэтому λ определяется из трансцендентного уравнения $\mathrm{tg}\sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda}$, положительные решения которого и будут искомыми собственными значениями.

Далее, рассмотрев любое из уравнений системы для C_1, C_2, имеем $C_2 = C_1\sqrt{\lambda_n} = -C_1 \operatorname{tg}\sqrt{\lambda_n}$, откуда получим

$$y_n(x) = C_1(\sin\sqrt{\lambda_n}x + \sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x) = C_1(\sin\sqrt{\lambda_n}x - tg\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x).$$

Итак, собственные значения λ_n $(n = 1,2,3...)$ рассматриваемой задачи Штурма-Лиувилля есть положительные решения уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda}$, а соответствующие им собственные функции могут быть после несложных преобразований записаны в виде $y_n(x) = C\sin\sqrt{\lambda_n}(x-1)$.

Пример 7.5. Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi) \end{cases}.$$

Решение. Действуя как в примере 7.2, нетрудно показать, что в рассматриваемом случае все собственные значения неотрицательны.

Пусть $\lambda = 0$, тогда $y(x) = C_1x + C_2$ и, учитывая дополнительные условия, имеем $y(x) = C$. Поэтому $\lambda_0 = 0$ - собственное значение задачи с собственной функцией $y_0(x) = 1$.

Если $\lambda > 0$, то общее решение уравнения имеет вид $y(x) = C_1\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\cos\sqrt{\lambda}x$, и из граничных условий вытекает

$$y(0) - y(2\pi) = C_2 - C_2\cos\sqrt{\lambda}2\pi - C_1\sin\sqrt{\lambda}2\pi = 0,$$
$$y'(0) - y'(2\pi) = \sqrt{\lambda}(C_1 - C_1\cos\sqrt{\lambda}2\pi + C_2\sin\sqrt{\lambda}2\pi) = 0.$$

Нетривиальное решение этой системы, т.е. $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$, существует, если

$$\begin{vmatrix} -\sin\sqrt{\lambda}2\pi & 1-\cos\sqrt{\lambda}2\pi \\ 1-\cos\sqrt{\lambda}2\pi & \sin\sqrt{\lambda}2\pi \end{vmatrix} = 2\cos\sqrt{\lambda}2\pi - 2 = 0.$$

Поэтому $\lambda_n = n^2$, $n = 1,2,3,...$, и при найденных значениях λ существуют по два линейно независимых решения $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, которые при каждом $\lambda_n = n^2$, $n = 1,2,3,...$ определяют две линейно независимых собственные функции $y_n^{(1)}(x) = \sin nx$ и $y_n^{(2)}(x) = \cos nx$.

Итак, собственное значение $\lambda_0 = 0$ имеет кратность 1, и ему соответствует собственная функция $y_0(x) = 1$; собственные значения $\lambda_n = n^2$, $n = 1,2,3,...$ имеют кратность 2, и им отвечает по 2 линейно независимые функции $y_n^{(1)}(x) = \sin nx$ и $y_n^{(2)}(x) = \cos nx$.

Замечание. Дополнительные условия, поставленные в этом примере, возникают при рассмотрении периодических задач, т.е. $y(x) = y(x+2\pi)$.

Пример 7.6. Проверить возможность сведения к интегральному уравнению и свести задачу Штурма-Лиувилля $y'' + \lambda \cdot (1 + x^2) y = 0$, $y(0) = 0, \quad y(1) = 0$ к интегральному уравнению Фредгольма с симметрическим ядром.

Решение. В нашем случае $Ly \equiv y''$, $p(x) = 1 > 0,\ q(x) \equiv 0,\ \rho(x) = 1 + x^2 > 0$, $x \in [0,1]$.

Докажем, что $\lambda = 0$ не является собственным значением рассматриваемой задачи Штурма-Лиувилля, т.е. однородное уравнение $Ly \equiv y'' = 0$ с условиями $y(0) = 0, \quad y(1) = 0$ имеет только тривиальное решение. Действительно, $y(x) = C_1 x + C_2$, откуда с учетом дополнительных условий получаем $y(x) \equiv 0$. Это означает, что функция Грина оператора $Ly \equiv y''$ при условиях $y(0) = 0, \quad y(1) = 0$ существует и, следовательно, задача Штурма-Лиувилля может быть сведена к интегральному уравнению.

Построив функцию Грина $G(x,s) = \begin{cases} x(s-1), & 0 \le x \le s \\ s(x-1), & s \le x \le 1 \end{cases}$ и рассматривая выражение $-\lambda (1 + x^2) y$ как неоднородность, приведем уравнение к виду $y(x) = \lambda \int\limits_0^1 -G(x,s)(1+s^2) y(s) ds$.

Чтобы симметризовать ядро, умножим последнее соотношение на $\sqrt{1+x^2}$ и введем в рассмотрение функцию $\varphi(x) = y(x)\sqrt{1+x^2}$. Тогда получим $\varphi(x) = \lambda \int\limits_0^1 K(x,s)\varphi(s) ds$ - интегральное уравнение Фредгольма с непрерывным симметрическим ядром $K(x,s) = -\sqrt{1+x^2} \cdot G(x,s) \cdot \sqrt{1+s^2}$ для функции $\varphi(x)$.

Пример 7.7. Рассмотрим однородное уравнение Фредгольма $y(x) = \lambda \int\limits_0^1 K(x,s)\, y(s)\, ds$ с симметрическим непрерывным (невырожденным) ядром

$$K(x,s) = \begin{cases} x(1-s), & 0 \le x \le s \\ s(1-x), & s \le x \le 1 \end{cases}, \qquad x, s \in [0;1].$$

Найти характеристические числа и ортонормированные собственные функции этого ядра.

Решение. Чтобы определить характеристические числа, нужно найти те значения λ, при которых уравнение $y(x) - \lambda \int\limits_0^1 K(x,s)\, y(s)\, ds = 0$ имеет нетривиальные решения; соответствующие решения $y(x) \not\equiv 0$ и есть искомые собственные функции.

Заметим, что ядро $K(x,s)$ в рассматриваемом случае имеет специфическую структуру, напоминающую функцию Грина некоторой краевой задачи. Поэтому следует ожидать, что процедура построения характеристических чисел и собственных функций может быть сведена к решению задачи Штурма-Лиувилля.

Запишем уравнение в виде $y(x) = \lambda (1-x) \int\limits_0^x s\, y(s)\, ds + \lambda x \int\limits_x^1 (1-s)\, y(s)\, ds$, откуда следует, что $y(0) = y(1) = 0$. После двукратного дифференцирования обеих частей этого соотношения по x приходим к дифференциальному уравнению $y'' + \lambda y = 0$.

Итак, характеристические числа и собственные функции являются решениями задачи Штурма-Лиувилля для уравнения $y''+\lambda y=0$ с граничными условиями $y(0)=y(1)=0$.

Нетрудно показать, что если $\lambda \le 0$, то имеется только нулевое решение $y(x)\equiv 0$.

При $\lambda>0$ получим $y(x)=c_1\sin\sqrt{\lambda}x+c_2\cos\sqrt{\lambda}x$, следовательно, нетривиальные решения существуют тогда и только тогда, если $\lambda=\lambda_n=n^2\pi^2$ $(n\in\mathbb{N})$. При этом ранг каждого характеристического числа равен единице, так как им отвечают одномерные собственные подпространства вида $y_n(x)=C\sin\pi nx$.

Так как ядро оператора симметрическое, то собственные функции, отвечающие различным характеристическим числам, ортогональны. Нормируя их, получим ортонормированную систему собственных функций $\varphi_n(x)=\sqrt{2}\,\sin\pi nx$.

Замечание. Приведенный здесь алгоритм нахождения характеристических чисел и собственных функций учитывает специфику структуры ядра $K(x,s)$, которое представляет собой функцию Грина некоторой краевой задачи. Другие способы построения характеристических чисел и собственных функций были рассмотрены в примерах и задачах к темам 3 и 6.

Пример 7.8. Найти характеристические числа и собственные функции оператора Фредгольма $y(x)=\lambda\int\limits_0^1 K(x,s)\,y(s)\,ds$ с симметрическим непрерывным (невырожденным) ядром

$$K(x,s)=\begin{cases} s\,(x+1), & 0\le x\le s\\ x(s+1), & s\le x\le 1\end{cases},\qquad x,s\in[0;1].$$

Решение. Действуя как в предыдущем примере, сведем интегральное уравнение к краевой задаче Штурма-Лиувилля.

Запишем уравнение в виде $y(x)=\lambda\,x\int\limits_0^x(s+1)\,y(s)\,ds+\lambda(x+1)\int\limits_x^1 s\,y(s)\,ds$.

Дифференцируя это соотношение, найдем

$$y'(x)=\lambda\int\limits_0^x(s+1)\,y(s)\,ds+\lambda x(x+1)y(x)+\lambda\int\limits_x^1 s\,y(s)\,ds-\lambda(x+1)xy(x).$$

Заметим, что

$$y(0)=\lambda\int\limits_0^1 sy(s)ds,\quad y(1)=\lambda\int\limits_0^1(s+1)y(s)ds,\qquad y'(0)=\lambda\int\limits_0^1 sy(s)ds,\quad y'(1)=\lambda\int\limits_0^1(s+1)y(s)ds.$$

Дифференцируя уравнение еще раз, получим $y''(x)=\lambda(x+1)y(x)-\lambda xy(x)=\lambda y(x)$.

Итак, характеристические числа и собственные функции являются решениями следующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} y''-\lambda y=0\\ y(0)=y'(0),\quad y(1)=y'(1)\end{cases}.$$

Так как ядро симметрическое, то все характеристические числа - вещественные. Однако в данном случае знак характеристических чисел заранее неизвестен, поэтому для решения задачи необходимо рассмотреть обе возможности: $\lambda>0$ и $\lambda<0$ (случай $\lambda=0$, как следует из определения характеристического числа, невозможен).

1. Пусть $\lambda>0$. Тогда общее решение уравнения имеет вид $y(x)=C_1e^{x\sqrt{\lambda}}+C_2e^{-x\sqrt{\lambda}}$. Граничные условия приводят к системе

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \sqrt{\lambda}(C_1 - C_2) \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda}(C_1 e^{\sqrt{\lambda}} - C_2 e^{-\sqrt{\lambda}}) \end{cases},$$

которая имеет нетривиальные решения при условии $(1-\lambda)\cdot sh\sqrt{\lambda} = 0$. Таким образом, $\lambda_0 = 1$ - характеристическое число; ранг его равен 1, и ему отвечает собственное подпространство вида $y_0(x) = Ce^x$.

2. Пусть $\lambda = -\omega^2 < 0$. Тогда общее решение уравнения имеет вид $y(x) = C_1 \cos\omega x + C_2 \sin\omega x$. Граничные условия приводят к системе

$$\begin{cases} C_1 = \omega C_2 \\ C_1 \cos\omega + C_2 \sin\omega = \omega(-C_1 \sin\omega + C_2 \cos\omega) \end{cases},$$

условием нетривиальной совместности которой является $(1+\omega^2)\cdot\sin\omega = 0$, т.е. $\omega_n = \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Итак, характеристические числа $\lambda_n = -\pi^2 n^2 < 0,\quad n\in\mathbb{N}$. Ранг каждого характеристического числа равен единице, и им отвечают собственные функции вида $y_n(x) = C(\pi n\cos\pi nx + \sin\pi nx),\quad n\in\mathbb{N}$.

Задачи для самостоятельного решения

7.1 Доказать, что все собственные значения λ задачи Штурма-Лиувилля

$$\big(p(x)y'\big)' - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0, \qquad x\in(a,b), \qquad p(x)>0,\quad q(x)\ge 0,\quad \rho(x)>0$$

положительны при следующих граничных условиях:

а) $y'(a) = 0$, $y(b) = 0$;

б) $y(a) = 0$, $y'(b) = 0$;

в) $y(a) - 2y'(a) = 0$, $y(b) + y'(b) = 0$;

г) $y(a) - y'(a) = 0$, $y(b) + 2y'(b) = 0$.

7.2 Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля:

а) $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0,\quad y(l) = 0$;

б) $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0,\quad y'(l) = 0$;

в) $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0,\quad y'(1) + hy(1) = 0 \quad (h>0)$;

г) $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0,\quad y'(l) + hy(l) = 0 \quad (h>0)$;

д) $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) - hy(0) = 0,\quad y'(l) = 0 \quad (h>0)$;

е) $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) - h_1 y(0) = 0,\quad y'(l) + h_2 y(l) = 0 \quad (h_1, h_2 > 0)$

ж) $(xy')' + \lambda\dfrac{y}{x} = 0$, $y(1) = 0,\quad y(2) = 0$.

7.3 Проверить возможность сведения к интегральному уравнению и свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению Фредгольма с симметрическим ядром:

а) $y'' + \lambda\cdot(1+x^2)y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$;

б) $y'' + \lambda\cdot e^{2x}y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$;

в) $y'' + \lambda\cdot e^{2x}y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$;

г) $y'' + \lambda\cdot y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) + hy'(1) = 0$;

д) $(1+x^2)y'' + 2xy' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$;

е) $x^2 y'' + 2x\,y' + \lambda\, x^2 y = 0$, $\quad y'(1) = 0$, $\quad y(2) = 0$;

ж) $(xy')' + \lambda\, xy = 0$, $\quad |\,y(0)| < \infty$, $\quad y(1) = 0$;

з) $(xy')' + (\lambda x - \dfrac{n^2}{x}) \cdot y = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$, $\quad |\,y(0)| < \infty$, $\quad y(1) = 0$.

7.4 Найти характеристические числа и собственные функции однородного уравнения Фредгольма с непрерывным <u>симметрическим</u> невырожденным ядром, в следующих случаях:

а) $y(x) = \lambda \displaystyle\int_0^1 K(x,s)\, y(s)\, ds$, где $K(x,s) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le s \\ s, & s \le x \le 1 \end{cases}$;

б) $y(x) = \lambda \displaystyle\int_0^{\pi} K(x,s)\, y(s)\, ds$, где $K(x,s) = \begin{cases} \cos x \sin s, & 0 \le x \le s \\ \cos s \sin x, & s \le x \le \pi \end{cases}$;

в) $y(x) = \lambda \displaystyle\int_0^{\pi} K(x,s)\, y(s)\, ds$, где $K(x,s) = \begin{cases} \sin x \cos s, & 0 \le x \le s \\ \sin s \cos x, & s \le x \le \pi \end{cases}$.

Указание. Свести интегральное уравнение к задаче Штурма-Лиувилля.

Ответы к задачам

7.2 а) $\lambda_n = \left[\dfrac{\pi}{l}\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\right]^2$, $\quad n = 0,1,2,\ldots$; $\quad y_n(x) = C \cos \dfrac{\pi}{l}\left(n + \tfrac{1}{2}\right) x$;

б) $\lambda_n = \left[\dfrac{\pi}{l}\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\right]^2$, $\quad n = 0,1,2,\ldots$; $\quad y_n(x) = C \sin \dfrac{\pi}{l}\left(n + \tfrac{1}{2}\right) x$;

в) λ_n, $\quad n = 1,2,3,\ldots$ - положительные решения уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda} = -\dfrac{\sqrt{\lambda}}{h}$; $y_n(x) = C \sin x\sqrt{\lambda_n}$;

г) λ_n, $\quad n = 1,2,3,\ldots$ - положительные решения уравнения $\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda} l = \dfrac{\sqrt{\lambda}}{h}$; $y_n(x) = C \cos x\sqrt{\lambda_n}$;

д) λ_n, $\quad n = 1,2,3,\ldots$ - положительные решения уравнения $\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda} l = \dfrac{\sqrt{\lambda}}{h}$; $y_n(x) = C \cos \sqrt{\lambda_n}\,(l - x)$;

е) λ_n, $\quad n = 1,2,3,\ldots$ - корни уравнения $\operatorname{tg}\sqrt{\lambda} l = \sqrt{\lambda}\, \dfrac{h_1 + h_2}{\lambda - h_1 h_2}$;

$$y_n(x) = C(h_1 \sin\sqrt{\lambda_n} x + \sqrt{\lambda_n} \cos\sqrt{\lambda_n} x);$$

ж) $\lambda_n = \left[\dfrac{\pi n}{\ln 2}\right]^2$, $\quad n = 1,2,3,\ldots$; $\quad y_n(x) = C \sin \dfrac{\pi n}{\ln 2} \ln x$.

7.3 а) $G(x,s) = \begin{cases} s - 1, & 0 \le x \le s \\ x - 1, & s \le x \le 1 \end{cases}$, $\qquad K(x,s) = -\sqrt{1 + x^2} \cdot G(x,s) \cdot \sqrt{1 + s^2}$;

б) $G(x,s) = \begin{cases} x(s - 1), & 0 \le x \le s \\ s(x - 1), & s \le x \le 1 \end{cases}$, $\qquad K(x,s) = -e^x \cdot G(x,s) \cdot e^s$;

в) $G(x,s)=\begin{cases}-x, & 0\le x\le s\\ -s, & s\le x\le 1\end{cases}$, $K(x,s)=-e^x\cdot G(x,s)\cdot e^s$;

г) $G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{s-(h+1)}{h+1}x, & 0\le x\le s\\ \dfrac{x-(h+1)}{h+1}s, & s\le x\le 1\end{cases}$, $K(x,s)=-G(x,s)$;

д) $G(x,s)=\begin{cases}-arctg\,x, & 0\le x\le s\\ -arctg\,s, & s\le x\le 1\end{cases}$, $K(x,s)=-G(x,s)$;

е) $G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{2}, & 1\le x\le s\\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}, & s\le x\le 2\end{cases}$, $K(x,s)=-x\cdot G(x,s)\cdot s$;

ж) $G(x,s)=\begin{cases}\ln s, & 0\le x\le s\\ \ln x, & s\le x\le 1\end{cases}$, $K(x,s)=-\sqrt{x}\cdot G(x,s)\cdot\sqrt{s}$;

з) $G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{2n}\left[(xs)^n-\left(\dfrac{x}{s}\right)^n\right], & 0\le x\le s\\ \dfrac{1}{2n}\left[(xs)^n-\left(\dfrac{s}{x}\right)^n\right], & s\le x\le 1\end{cases}$, $K(x,s)=-\sqrt{x}\cdot G(x,s)\cdot\sqrt{s}$.

7.4 а) $\lambda_n=\pi^2(n+1/2)^2$, $y_n=C\sin\pi(n+1/2)x$, $n=0,1,2,\ldots$;

б) $\lambda_n=1-(n+1/2)^2$, $y_n=C\cos(n+1/2)x$, $n=0,1,2,\ldots$;

в) $\lambda_n=(n+1/2)^2-1$, $y_n=C\sin(n+1/2)x$, $n=0,1,2,\ldots$.

ТЕМА 8

Основные понятия вариационного исчисления. Задача с закрепленными концами.

Основные определения и теоремы

Если на некотором множестве функций указано правило, которое ставит в соответствие каждой функции некоторое число, то на этом множестве задан функционал. Будем рассматривать функционалы, действующие из линейного нормированного пространства E в пространство вещественных чисел $\mathbb{R}^1$: $E \to \mathbb{R}^1$. Итак, функционал – это оператор, множество значений которого состоит из чисел.

Будем рассматривать следующие линейные пространства E (или их подмножества E'):

1) $C[a,b]$ – пространство непрерывных на $[a,b]$ функций, в котором определена норма

$$\| y \|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} | y(x) | .$$

2) $C^{(1)}[a,b]$ – пространство функций, непрерывных вместе со своими первыми производными на $[a,b]$. Норма в этом пространстве определяется как

$$\| y \|_{C^{(1)}[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} | y(x) | + \max_{x\in[a,b]} | y'(x) | .$$

Определение. Функционал $V[y]$ называется непрерывным в точке $y_0 \in E$, если для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что при $\forall y \in E : \| y - y_0 \| \le \delta$ выполняется неравенство $| V[y] - V[y_0] | \le \varepsilon$.

Аналогично можно дать определение непрерывности функционала в точке $y_0 \in E'$, если функционал рассматривается только на множестве E'. Функционал называется непрерывным на всём пространстве E (множестве E'), если он непрерывен в каждой точке $E(E')$.

Определение. Точка y_0 является точкой локального минимума (максимума) функционала $V[y]$, если найдется число $r > 0$ такое, что для любого $y \in E : \| y - y_0 \|_E \le r$ выполнено неравенство $V[y] \ge V[y_0]$ ($V[y] \le V[y_0]$).

Пусть $y_0 \in E$ - произвольная фиксированная точка, $h \in E$ - произвольный элемент E. Рассмотрим функцию вещественной переменной t $\quad \Phi(t) \equiv V[y_0 + th]$, t – вещественное число.

Определение. Если для любого $h \in E$ существует $\Phi'(t)_{t=0} = \dfrac{d}{dt} V[y_0 + th]_{t=0}$, то эта производная называется вариацией (слабой вариацией) функционала V в точке y_0 и обозначается $\delta V(y_0, h)$. Очевидно, что $V[y_0 + th] - V[y_0] = t\,\delta V(y_0, h) + o(|t|)$.

Определение. Функционал $V[y]$ называется дифференцируемым в точке y_0, если для любого $h \in E$ $\quad V[y_0 + h] - V[y_0] = dV(y_0, h) + o(\| h \|)$, где $dV(y_0, h)$ - линейный и непрерывный по h функционал, который иногда называют сильной вариацией в точке y_0, в то время как функционал (от h) $\delta V(y_0, h)$ - слабой вариацией в точке y_0.

Если существует сильная вариация, то существует и вариация (слабая вариация). Обратное, вообще говоря, неверно.

Теорема (необходимое условие экстремума). Пусть $y_0 \in E$ - точка экстремума $V[y]$ и существует $\delta V(y_0,h)$ для всякого $h \in E$. Тогда $\delta V(y_0,h)=0$.

Конкретизируем вид функционала и множество допустимых функций. Рассмотрим функционал $V[y]=\int\limits_a^b F(x,y,y')\,dx$ на множестве функций $E' \subseteq E = C^1[a,b]$ таком, что $E'=\{y \in C^{(1)}[a,b],\ \ y(a)=A,\ y(b)=B\}$. Простейшая задача вариационного исчисления (задача с закрепленными концами): среди всех функций из множества E' определить ту, которая реализует экстремум функционала $V[y]=\int\limits_a^b F(x,y,y')\,dx$.

Определение. Функционал достигает <u>сильного</u> минимума (максимума) на функции $y_0(x)$, если найдется число $r>0$ такое, что для любой функции из сильной окрестности $y_0(x)$, т.е. $y \in E'$: $\| y-y_0 \|_{C[a,b]} = \max\limits_{x\in[a,b]} | y(x)-y_0(x) | \le r$, выполнено неравенство $V[y] \ge V[y_0]$ ($V[y] \le V[y_0]$).

Определение. Функционал достигает <u>слабого</u> минимума (максимума) на функции $y_0(x)$, если найдется число $r>0$ такое, что для любой функции из слабой окрестности $y_0(x)$, т.е. $y \in E'$: $\| y-y_0 \|_{C^{(1)}[a,b]} = \max\limits_{x\in[a,b]} | y(x)-y_0(x) | + \max\limits_{x\in[a,b]} | y'(x)-y_0'(x) | \le r$, выполнено неравенство $V[y] \ge V[y_0]$ ($V[y] \le V[y_0]$).

Ясно, что если на функции $y_0(x)$ реализуется сильный экстремум, то имеет место и слабый в той же точке. Обратное, вообще говоря, неверно.

Теорема (необходимое условие экстремума в задаче с закрепленными концами).

1) Пусть $y(x)$ реализует экстремум (сильный или слабый) функционала $V[y]=\int\limits_a^b F(x,y,y')\,dx$ с условиями $y(a)=A,\ y(b)=B$ и является дважды непрерывно дифференцируемой.
2) Пусть функция $F(x,y,y')$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно при $x \in [a,b]$ и в некоторой области изменения y и y', содержащей $y(x)$.

Тогда $y(x)$ является решением краевой задачи для уравнения Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0; \qquad y(a)=A, \quad y(b)=B.$$

Решения этой задачи называются <u>экстремалями</u> функционала $V[y]=\int\limits_a^b F(x,y,y')\,dx$.

Так как уравнение Эйлера, вообще говоря, дифференциальное уравнение второго порядка, то решение его может быть как единственным, так и не единственным, и может не существовать вовсе.

Приемы интегрирования уравнения Эйлера зависят от конкретного вида функции $F(x,y,y')$. Приведем некоторые примеры для некоторых, часто встречающихся случаев.

1. F не зависит от y': $F(x,y,y')=F(x,y)$.

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид $F_y(x,y)=0$, т.е. является не дифференциальным, а алгебраическим, поэтому его решение (если оно существует) представляет собой одну или несколько кривых, которые, вообще говоря, не удовлетворяют граничным условиям $y(a)=A,\quad y(b)=B$.

Итак, решение краевой задачи для уравнения Эйлера в рассматриваемом случае, вообще говоря, не существует.

2. F зависит от y' линейно: $F(x,y,y') = M(x,y) + y' \cdot N(x,y)$.

Уравнение Эйлера имеет вид $M_y + y'N_y - \dfrac{d}{dx}N(x,y) = M_y + y' \cdot N_y - N_x - N_y \cdot y' = 0$,

т.е.

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0 .$$

Полученное уравнение не является дифференциальным, поэтому краевая задача для уравнения Эйлера также, вообще говоря, не имеет решения.

В частном случае $\dfrac{\partial M}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial N}{\partial x}$ выражение $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ является полным дифференциалом, и значение функционала $V[y] = \int\limits_a^b F(x,y,y')\,dx = \int\limits_{(a,A)}^{(b,B)} M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ не зависит от выбора кривой, соединяющей точки (a,A) и (b,B).

3. F зависит только от y': $F(x,y,y') = F(y')$.

Уравнение Эйлера имеет вид $y'' \cdot F_{y'y'}(y') = 0$. Далее возможны два варианта:

а) $y'' = 0$, тогда общее решение есть $y(x) = C_1 x + C_2$, где C_1, C_2 - произвольные постоянные, определяемые из граничных условий;

б) $F_{y'y'}(y') = 0$, тогда $y' = k_i$, где k_i - корни алгебраического уравнения $F''(t) = 0$, и соответствующие решения $y_i(x) = k_i x + \tilde{C}_i$ являются частными случаями п. а).

Поэтому, решениями уравнения Эйлера в обоих случаях а) и б) являются прямые.

4. F не зависит от y: $F(x,y,y') = F(x,y')$.

Уравнение Эйлера принимает вид $\dfrac{d}{dx}F_{y'}(x,y') = 0$ и имеет первый интеграл $F_{y'}(x,y') = C$, где C - произвольная постоянная. Дальнейшее интегрирование производится путем разрешения относительно производной, либо путем введения параметра.

5. F не зависит от x: $F(x,y,y') = F(y,y')$.

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид $F_y - y' \cdot F_{yy'} - y'' \cdot F_{y'y'} = 0$.

Умножив на y', получим $\dfrac{d}{dx}(F - y' \cdot F_{y'}) = 0$ и найдем первый интеграл $F - y' \cdot F_{y'} = C$. Дальнейшее интегрирование также производится методами, развитыми для дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной.

Итак, если экстремаль существует, то она, как правило, может быть включена в однопараметрическое семейство решений уравнения Эйлера $y = y(x,C)$.

Определение. Если через каждую точку области *G* на плоскости *xOy* проходит единственная кривая семейства $y = y(x,C)$, то это семейство называют *собственным полем* в области *G*.

Определение. Если все кривые семейства $y = y(x,C)$ проходят через некоторую точку $(x_0, y_0) \in G$ (центр пучка), а через каждую точку области, отличную от (x_0, y_0), проходит одна и только одна кривая семейства, то $y = y(x,C)$ называют *центральным полем* в области *G*.

Выбор любой точки области *G* (кроме центра пучка во втором случае) определяет единственную экстремаль, проходящую через эту точку, и задает в области *G* некоторую функцию $p(x,y)$ - наклон поля экстремалей: $p(x,y)$ в каждой точке $(x,y)\in G$ равна тангенсу угла наклона той экстремали, которая проходит через эту точку.

Сформулируем достаточные условия экстремума в задаче с закрепленными концами.

Достаточные условия Вейерштрасса. Пусть функция $y=y_0(x)$ удовлетворяет необходимому условию экстремума, т.е. является экстремалью в задаче с закрепленными концами. Будем считать, что экстремаль $y=y_0(x)$ на сегменте $[a,b]$ может быть включена в поле экстремалей (собственное или центральное).

Рассмотрим кривые $y=y(x)$, удовлетворяющие тем же граничным условиям, что и экстремаль $y=y_0(x),\ y(x)\in C^{(1)}[a,b]$ (кривые сравнения).

Функция $E(x,y,p,y')=F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)F_p(x,y,p)$ называется *функцией Вейерштрасса*. В аргументах функции $E(x,y,p,y')$ через y' обозначается производная кривой сравнения $y(x)$ в точке (x,y), а через $p=p(x,y)$ - наклон поля экстремалей в этой точке.

Приращение функционала $V[y]$ выражается через функцию Вейерштрасса ($y_0(x)$ - исследуемая экстремаль, а $y(x)$ - кривая сравнения):

$$\Delta V=V[y(x)]-V[y_0(x)]=\int_a^b E(x,y(x),p(x,y(x)),y'(x))dx\,.$$

Поэтому достаточным условием достижения функционалом $V[y]$ экстремума на экстремали $y_0(x)$ является знакоопределенность функции $E(x,y,p,y')$ в окрестности экстремали $y_0(x)$. Экстремум будет слабым или сильным в зависимости от того, в слабой или сильной окрестности экстремали $y_0(x)$ сохраняет знак функция Вейерштрасса.

Достаточные условия слабого экстремума:

Кривая $y=y_0(x)$ доставляет слабый экстремум функционалу $V[y]=\int_a^b F(x,y,y')\,dx$ в задаче с закрепленными концами $y(a)=A,\ \ y(b)=B$, если:

1) кривая $y=y_0(x)$ является экстремалью функционала, т.е. является решением краевой задачи для уравнения Эйлера с условиями $y(a)=A,\ \ y(b)=B$;
2) экстремаль $y=y_0(x)$ может быть включена в поле экстремалей на отрезке $[a,b]$;
3) функция Вейерштрасса сохраняет знак во всех точках слабой окрестности экстремали $y=y_0(x)$, т.е. в точках (x,y), близких к экстремали $y=y_0(x)$, и для значений y', близких к значениям $p(x,y)$ ($p(x,y)$ - заданная функция, так как определено поле экстремалей).

Если $E\ge 0$, то функционал $V[y]$ имеет на $y_0(x)$ слабый минимум, если $E\le 0$, то функционал $V[y]$ имеет на $y_0(x)$ слабый максимум.

Достаточные условия сильного экстремума.

Кривая $y=y_0(x)$ доставляет сильный экстремум функционалу $V[y]=\int_a^b F(x,y,y')\,dx$ в задаче с закрепленными концами $y(a)=A,\ \ y(b)=B$, если:

1) кривая $y=y_0(x)$ является экстремалью функционала т.е. является решением краевой задачи для уравнения Эйлера с условиями $y(a)=A,\ \ y(b)=B$;
2) экстремаль $y=y_0(x)$ может быть включена в поле экстремалей на отрезке $[a,b]$;

3) функция Вейерштрасса сохраняет знак во всех точках сильной окрестности экстремали $y=y_0(x)$, т.е. в точках (x,y), близких к экстремали $y=y_0(x)$, и для произвольных значений y'.

Если $E \geq 0$, то функционал $V[y]$ имеет на $y_0(x)$ сильный минимум, если $E \leq 0$, то функционал $V[y]$ имеет на $y_0(x)$ сильный максимум.

Достаточное условие отсутствия экстремума.

Если в точках экстремали $y=y_0(x)$ при некоторых значениях y' функция E имеет противоположные знаки, то сильный экстремум на $y_0(x)$ не достигается.

Если в точках экстремали $y=y_0(x)$ при значениях y' сколь угодно близких к $p(x,y)$, функция E имеет противоположные знаки, то на $y_0(x)$ не достигается и слабый экстремум.

Достаточные условия Лежандра.

Пусть функция $F(x,y,y')$ имеет непрерывную вторую производную $F_{y'y'}(x,y,y')$ и экстремаль $y=y_0(x)$ включена в поле экстремалей.

Достаточные условия слабого экстремума ($F_{y'y'}$ исследуется на самой экстремали $y=y_0(x)$).

Если на экстремали $y=y_0(x)F_{y'y'}>0$, то функционал $V[y]$ имеет на $y_0(x)$ слабый минимум; если на экстремали $y=y_0(x)\,F_{y'y'}<0$, то функционал $V[y]$ имеет на $y_0(x)$ слабый максимум.

Достаточные условия сильного экстремума (($F_{y'y'}$ исследуется в сильной окрестности экстремали $y=y_0(x)$).

Если $F_{y'y'} \geq 0$ в точках (x,y), близких к экстремали $y=y_0(x)$, и для произвольных значений y', то $V[y]$ имеет на экстремали $y_0(x)$ сильный минимум.

Если $F_{y'y'} \leq 0$ в точках (x,y), близких к экстремали $y=y_0(x)$, и для произвольных значений y', то $V[y]$ имеет на экстремали $y_0(x)$ сильный максимум.

Примеры решения задач

Пример 8.1. Вычислить вариацию функционала $V[y]=y^2(0)+\int\limits_{-1}^{1}(xy+y'^2)\,dx$ в точке *y*.

Решение. Найдем сначала вариацию функционала $V[y]$, воспользовавшись первым определением (слабую вариацию):

$$\delta V(y,h) \equiv \frac{d}{dt}V[y+th]\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left[(y(0)+th(0))^2+\int\limits_{-1}^{1}[x(y(x)+th(x))+(y'(x)+th'(x))^2]dx\right]_{t=0} =$$

$$= 2y(0)h(0)+\int\limits_{-1}^{1}[x\cdot h(x)+2y'\cdot h'(x)]dx\,.$$

Теперь воспользуемся вторым определением и найдем вариацию как линейную часть приращения функционала в точке *y* (сильную вариацию). Зададим приращение аргумента функционала - произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $h(x)$: $h(-1)=h(1)=0$, и вычислим приращение $\Delta V = V[y+h]-V[y]=$

$$=[y(0)+h(0)]^2-y^2(0)+\int\limits_{-1}^{1}[x(y(x)+h(x))+(y'(x)+h'(x))^2]dx-\int\limits_{-1}^{1}[xy(x)+y'^2(x)]dx=$$

$$=2y(0)h(0)+\int\limits_{-1}^{1}[x\cdot h(x)+2y'(x)\cdot h'(x)]dx+h^2(0)+\int\limits_{-1}^{1}h'^2(x)\,dx\,.$$

Линейная относительно h часть приращения - первые два слагаемые последнего равенства - и есть искомая (сильная) вариация

$$dV[y,h]=2y(0)h(0)+\int\limits_{-1}^{1}[x\cdot h(x)+2y'\cdot h'(x)]dx\,,$$

которая в данном случае совпадает с полученной ранее (слабой) вариацией $\delta V[y,h]$.

Пример 8.2. Найти экстремаль функционала $V[y]=\int\limits_0^1 (y^2+y'^2)\,dx$ с дополнительными условиями $y(0)=0,\ \ y(1)=0$.

Доказать, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала

а) путем непосредственного вычисления приращения функционала;

б) применив достаточные условия в форме Вейерштрасса и Лежандра.

Решение. Уравнение Эйлера для функционала в исследуемой задаче $y''-y=0$ имеет общее решение $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. Граничным условиям удовлетворяет экстремаль $y_0(x)\equiv 0$.

а) Непосредственное вычисление приращения функционала на кривой $y_0(x)\equiv 0$ дает $\Delta V=V[y]-V[y_0(x)\equiv 0]=\int\limits_0^1(y^2+y'^2)dx\ge 0$. Поэтому на ней реализуется сильный (а, следовательно, и слабый) минимум.

б) Заметим, что экстремаль $y_0(x)\equiv 0$ при $x\in[0,1]$ может быть включена в собственное поле экстремалей $y=C\,e^x$.

1. Функция Вейерштрасса $E(x,y,p,y')=y^2+y'^2-y^2-p^2-(y'-p)2p=\left(y'-p\right)^2\ge 0$ при любых y,y', т.е. сохраняет знак в сильной окрестности кривой $y_0(x)\equiv 0$. Следовательно, выполнено достаточное условие Вейерштрасса, и экстремаль $y_0(x)\equiv 0$ реализует сильный (и слабый) минимум.
2. $F_{y'y'}=2>0$ при любых y,y', поэтому выполнено достаточное условие Лежандра. Функционал на экстремали $y_0(x)\equiv 0$ достигает сильного (и слабого) минимума.

Пример 8.3. Найти экстремаль функционала $V[y]=\int\limits_{-1}^{0}(12xy-y'^2)\,dx$ с дополнительными условиями $y(-1)=1,\ \ y(0)=0$.

Доказать, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала

а) путем непосредственного вычисления приращения функционала;

б) применив достаточные условия в форме Вейерштрасса и Лежандра.

Решение. Уравнение Эйлера для функционала в рассматриваемой задаче $y''+6x=0$ имеет общее решение $y=-x^3+C_1x+C_2$. Граничным условиям удовлетворяет экстремаль $y_0(x)=-x^3$.

а) Зададим приращение аргумента функционала - произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $h(x)$, удовлетворяющую условиям $h(-1)=h(0)=0$, - и вычислим приращение функционала на экстремали $y_0(x)=-x^3$:

$$\Delta V = V[-x^3+h]-V[-x^3]=\int_{-1}^{0}[12x(-x^3+h(x))-(-3x^2+h'(x))^2]dx-\int_{-1}^{0}[12x(-x^3)-(-3x^2)^2]dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}[12x\,h(x)+6x^2h'(x)-h'^2(x)]dx=\int_{-1}^{0}[12x\,h(x)-h'^2(x)]dx+\underbrace{\int_{-1}^{0}6x^2h'(x)dx}_{инт.\ по\ частям}=$$

$$=\underbrace{6x^2h(x)\Big|_{-1}^{0}}_{=0}-\int_{-1}^{0}12x\,h(x)dx+\int_{-1}^{0}[12x\,h(x)-h'^2(x)]dx=-\int_{-1}^{0}h'^2(x)dx\le 0\,.$$

Итак, $\Delta V\le 0$ независимо от y' (в сильной окрестности), поэтому на экстремали $y_0(x)=-x^3$ реализуется сильный (а, следовательно, и слабый) максимум.

б) Заметим, что экстремаль $y_0(x)=-x^3$ при $x\in[-1,0]$ может быть включена в собственное поле экстремалей (решений уравнения Эйлера) $y=-x^3+C$.

1. Функция Вейерштрасса

$$E(x,y,p,y')=12xy-y'^2-(12xy-p^2)-(y'-p)(-2p)=-\left(y'-p\right)^2\le 0$$

при любых $y,\,y'$, т.е. сохраняет знак в сильной окрестности кривой $y_0(x)=-x^3$. Следовательно, выполнено достаточное условие Вейерштрасса, и экстремаль $y_0(x)=-x^3$ реализует сильный (и слабый) максимум.

2. $F_{y'y'}=-2<0$ при любых $y,\,y'$, поэтому выполнено достаточное условие Лежандра. Функционал на экстремали $y_0(x)=-x^3$ достигает сильного (и слабого) максимума.

Пример 8.4. Пусть $V[y]=\int_a^b[p(x)y'^2+q(x)y^2+2y\varphi(x)]dx$, где функция $p(x)>0$ - непрерывно дифференцируема, а $q(x)\ge 0$ и $\varphi(x)$ непрерывные на $[a,b]$ функции.

а) Записать уравнение для экстремалей в задаче с закрепленными концами $y(a)=A,\ \ y(b)=B$.

б) Показать, что если $y_0(x)$ является экстремалью функционала $V[y]$, то на ней реализуется минимум этого функционала.

Решение. Уравнение Эйлера для экстремалей изучаемого функционала имеет вид $\dfrac{d}{dx}\left(p(x)y'\right)-q(x)y=\varphi(x)$. Нетрудно показать, что при сформулированных предположениях на функции $p(x),\,q(x),\,\varphi(x)$, это уравнение с дополнительными условиями $y(a)=A,\ \ y(b)=B$ имеет единственное решение $y=y_0(x)$, которое и определяет экстремаль в рассматриваемой задаче.

Зададим $h(x):h(a)=h(b)=0$ и определим знак приращения функционала на исследуемой экстремали:

$$\Delta V = V[y_0(x)+h(x)] - V[y_0(x)] = \int_a^b [p(x)((y_0'+h')^2 - y_0'^2) + q(x)((y_0+h)^2 - y_0^2) + 2\varphi(x)h]dx =$$

$$= \int_0^1 [2p(x)y_0'h' + 2q(x)\,y_0 h + 2\varphi(x)h]dx + \underbrace{\int_a^b p(x)h'^2(x)dx}_{>0} + \underbrace{\int_a^b q(x)h^2(x)dx}_{\geq 0} > 0\,,$$

так как первое слагаемое в этой сумме обращается в ноль. Действительно, интегрируя по частям первое слагаемое, получим

$$2\int_a^b [p(x)y_0'h' + q(x)\,y_0 h + \varphi(x)h]dx = \underbrace{2p(x)y_0(x)h(x)\Big|_a^b}_{=0,\ т.к.\ h(a)=h(b)=0} + 2\int_a^b \underbrace{[-(p(x)y_0')' + q(x)\,y_0 + \varphi(x)]}_{=0\ в\ силу\ ур-я\ Эйлера} h(x)dx = 0$$

.

Итак, $\Delta V = V[y_0(x)+h(x)] - V[y_0(x)] > 0$, поэтому на экстремали $y = y_0(x)$ достигается минимум исследуемого функционала, что и требовалось доказать.

Пример 8.5. Исследовать на экстремум функционал $V[y] = \int_0^a y'^3\,dx$ с граничными условиями $y(0)=0$, $y(a)=b$ ($a>0,\ b>0$).

Решение. Уравнение Эйлера для данного функционала имеет вид $y''=0$. Семейство экстремалей определяется формулой $y = C_1x + C_2$. Граничным условиям удовлетворяет единственная экстремаль $y = \dfrac{b}{a}x$.

Найденная экстремаль может быть включена в собственное поле $y = \dfrac{b}{a}x + C$, наклон поля экстремалей $p = \dfrac{b}{a}$.

Функция Вейерштрасса имеет вид

$$E(x,y,p,y') = y'^3 - p^3 - (y'-p)3p^2 = (y'-p)^2\,(y'+2p)$$

и знак ее определяется знаком выражения $y'+2p = y' + 2\dfrac{b}{a}$. Следовательно, $E(x,y,p,y')$ может менять знак в зависимости от y'. Поэтому сильного экстремума на исследуемой экстремали нет.

Вместе с тем, функция Вейерштрасса сохраняет знак, если y' близко к $p = \dfrac{b}{a} > 0$ (наклону поля экстремалей), т.е. $y'+2p = y'+2\dfrac{b}{a} \geq 0$ и неравенство $E(x,y,p,y') \geq 0$ выполнено для всех кривых сравнения $y = y(x)$ из некоторой слабой окрестности экстремали $y = \dfrac{b}{a}x$. Таким образом, на экстремали $y = \dfrac{b}{a}x$, согласно достаточному условию Вейерштрасса, достигается слабый минимум.

Пример 8.6. Показать, что в задаче с закрепленными концами

$$V[y]=\int_0^a (y^2-y'^2)\,dx,\quad y(0)=0,\quad y(a)=0$$

а) в случае $a=\frac{\pi}{2}<\pi$ на экстремали $y_0(x)\equiv 0$ реализуется сильный максимум функционала;

б) в случае $a=\frac{5\pi}{4}>\pi$ функция $y_0(x)\equiv 0$ также является единственной экстремалью в рассматриваемой задаче, причем функция Вейерштрасса сохраняет знак на этой кривой, однако экстремум на ней не достигается;

в) в случае $a=\pi$ экстремаль определяется не единственным образом.

Решение. Уравнение Эйлера имеет вид $y''+y=0$. Его общее решение есть $y=C_1\sin x+C_2\cos x$. Граничным условиям $y(0)=0$, $y(a)=0$, как в случае а), так и в случае б) удовлетворяет единственная функция $y_0(x)\equiv 0$.

а) Если $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, то экстремаль $y_0(x)\equiv 0$ может быть включена, например, в центральное поле экстремалей $y=C\sin x$.

Функция Вейерштрасса

$$E(x,y,p,y')=y^2-y'^2-(y^2-p^2)+(y'-p)2p=-\left(y'-p\right)^2\le 0$$

при любых $y,\,y'$, т.е. сохраняет знак в сильной окрестности кривой $y_0(x)\equiv 0$. Следовательно, выполнено достаточное условие Вейерштрасса, и экстремаль $y_0(x)\equiv 0$ реализует сильный (и слабый) максимум.

б) Если $x\in[0,\frac{5\pi}{4}]$, то функция Вейерштрасса $E(x,y,p,y')=-\left(y'-p\right)^2\le 0$ также сохраняет знак в сильной окрестности кривой $y_0(x)\equiv 0$. Заметим, что $V[y\equiv 0]=0$ и докажем, что на функции $y_0(x)\equiv 0$ не достигается слабый (следовательно, и сильный) экстремум.

Рассмотрим последовательность $\varphi_n(x)=\frac{1}{n}\sin\frac{4}{5}x$. Ясно, что при достаточно больших n выполнено $\|\varphi_n-y_0\|_{C^1[0,\frac{4\pi}{5}]}=\max\limits_{x\in[0,\frac{4\pi}{5}]}\left|\frac{1}{n}\sin\frac{4x}{5}\right|+\max\limits_{x\in[0,\frac{4\pi}{5}]}\left|\frac{4}{5n}\cos\frac{4x}{5}\right|\le r$, т.е. все указанные функции, начиная с некоторого номера, принадлежат слабой окрестности $y_0(x)\equiv 0$. Однако

$$V[\varphi_n]=\int_0^{\frac{5\pi}{4}}\frac{1}{n^2}\sin^2\frac{4x}{5}dx-\int_0^{\frac{5\pi}{4}}\frac{16}{25n^2}\cos^2\frac{4x}{5}dx=\frac{9}{25n^2}\int_0^{\frac{5\pi}{4}}\cos^2\frac{4x}{5}dx>0=V[0],$$

следовательно, на функции $y_0(x)\equiv 0$ слабый (и сильный) максимум не достигается.

Рассмотрим последовательность $\psi_n(x)=\frac{1}{n^2}\sin\frac{4n}{5}x$. Ясно, что при достаточно больших n выполнено $\|\psi_n-y_0\|_{C^1[0,\frac{4\pi}{5}]}=\max\limits_{x\in[0,\frac{4\pi}{5}]}\left|\frac{1}{n^2}\sin\frac{4nx}{5}\right|+\max\limits_{x\in[0,\frac{4\pi}{5}]}\left|\frac{4}{5n}\cos\frac{4nx}{5}\right|\le r$, т.е. все указанные функции, начиная с некоторого номера, принадлежат слабой окрестности $y_0(x)\equiv 0$.

Однако, при достаточно больших n

$$V[\psi_n]=\int\limits_0^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{n^4}\sin^2\frac{4nx}{5}dx-\int\limits_0^{\frac{5\pi}{4}} \frac{16}{25n^2}\cos^2\frac{4nx}{5}dx=\frac{5\pi}{8}\left(\frac{1}{n^4}-\frac{16}{25n^2}\right)<0=V[0].$$

Следовательно, на функции $y_0(x)\equiv 0$ минимум также не достигается.

Причина указанного явления состоит в том, что экстремаль $y_0(x)\equiv 0$ нельзя включить в поле экстремалей при $x\in[0,\frac{5\pi}{4}]$, так как все решения уравнения Эйлера $y=C_1\sin x+C_2\cos x$, удовлетворяющие одному из граничных условий $y(0)=0$ или $y(\frac{5\pi}{4})=0$, обращаются в ноль одновременно еще в одной точке $x_0\in[0,\frac{5\pi}{4}]$. Например, если потребовать $y(0)=0$, то все кривые семейства $y=C\sin x$ обращаются в ноль при $x_0=\pi\in[0,\frac{5\pi}{4}]$.

в) В случае $a=\pi$ уравнение Эйлера $y''+y=0$ имеет семейство решений $y=C\sin x$, удовлетворяющих граничными условиям $y(0)=0$, $y(\pi)=0$, следовательно, экстремаль определяется не единственным образом. Легко проверить, что в этом случае на любой функции семейства $y=C\sin x$ выполнено $V[y]=\int\limits_0^{\pi}(y^2-y'^2)dx=0$.

Пример 8.7. Пусть тело перемещается по кривой $y=y(x)$ со скоростью $\vec{v}$ такой, что $|\vec{v}|=v(x,y)=y$. Какова должна быть траектория его движения, чтобы тело попало из точки $y(a)=A$ в точку $y(b)=B$ за минимальное время?

Решение. Время, необходимое для перемещения из точки $(a,y(a))$ в точку $(b,y(b))$ по заданной кривой $y=y(x)$, определяется функционалом $t=\int\limits_a^b\frac{ds}{v(x,y)}=\int\limits_a^b\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx\equiv V[y]$. Таким образом, решение поставленной задачи дается экстремалями функционала $V[y]$ при условиях $y(a)=A$, $y(b)=B$.

Уравнение Эйлера в рассматриваемом случае $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=F_y-F_{y'y'}y''-F_{y'y}y'=0$. Умножая на y', получим $\frac{d}{dx}\left(F-y'F_{y'}\right)=0$, и найдем первый интеграл $\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}-y'\frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}}=\frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}}=C_1$. Положим $y'=tg\,t$, тогда $y=\frac{\cos t}{C_1}$, $dx=\frac{dy}{y'}=ctg\,t\,dy=\frac{\cos t\,dt}{C_1}$, откуда $x=\frac{\sin t}{C_1}+C_2$. Исключив параметр *t*, получим $(x-C_2)^2+y^2=\frac{1}{C_1^2}$, т.е. экстремалями задачи являются окружности с центрами на оси *x*.

Итак, искомая траектория движения тела - дуга окружности с центром на оси *x*, соединяющая точки (a,A) и (b,B). Легко видеть, что такая окружность определяется единственным образом при заданных дополнительных условиях $y(a)=A$, $y(b)=B$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти вариацию функционала

8.1 $V[y] = \int\limits_a^b yy'dx$.

8.2 $V[y] = \int\limits_a^b (x+y)dx$.

8.3 $V[y] = \int\limits_a^b (y^2 - y'^2)dx$.

8.4 $V[y] = \int\limits_0^\pi y' \sin y\, dx$.

Исследовать на экстремум функционалы в задаче с закрепленными концами (найти экстремали и проверить достаточные условия каким либо способом):

8.5 $V[y] = \int\limits_0^1 e^x \left(y^2 + \frac{1}{2} y'^2 \right) dx$ $\quad y(0) = 1, \quad y(1) = e$.

8.6 $V[y] = \int\limits_0^1 e^y y'^2 dx$ $\quad y(0) = 0, \quad y(1) = \ln 4$.

8.7 $V[y] = \int\limits_1^2 \frac{x^3}{y'^2} dx$ $\quad y(1) = 1, \quad y(2) = 4$.

8.8 $V[y] = \int\limits_0^a \frac{dx}{y'}$ $\quad y(0) = 0, \quad y(a) = b \quad (a > 0, b > 0)$.

8.9 $V[y] = \int\limits_0^1 (1+x) y'^2 dx$ $\quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$.

8.10 $V[y] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (y^2 - y'^2) dx$ $\quad y(0) = 1, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

8.11 $V[y] = \int\limits_{-1}^2 y'(1 + x^2 y') dx$ $\quad y(-1) = 1, \quad y(2) = 4$.

8.12 $V[y] = \int\limits_{-1}^1 (y'^3 + y'^2) dx$ $\quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 3$.

8.13 $V[y] = \int\limits_1^2 (xy'^4 - 2yy'^3) dx$ $\quad y(1) = 0, \quad y(2) = 1$.

8.14 $V[y] = \int\limits_0^a (1 - e^{-y'^2}) dx$ $\quad y(0) = 0, \quad y(a) = b \quad (a > 0)$.

8.15 Найти семейство экстремалей функционала $V[y] = \int\limits_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx, \qquad -\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}$.

8.16 Среди всех кривых, соединяющих точки $(-1, ch1)$ и $(1, ch1)$, определить ту, которая при вращении вокруг оси Ox образует поверхность наименьшей площади.

Ответы к задачам

8.1 $\delta V = \int_a^b (y'h + yh')dx \qquad (\delta y = h(x))$.

8.2 $\delta V = \int_a^b h(x)dx \qquad (\delta y = h(x))$.

8.3 $\delta V = 2\int_a^b (yh - y'h')dx \qquad (\delta y = h(x))$.

8.4 $\delta V = \int_0^\pi (y'\cos y \cdot h + \sin y \cdot h')dx \qquad (\delta y = h(x))$.

8.5 Экстремаль $y(x) = e^x$ реализует сильный (и слабый) минимум.

8.6 Экстремаль $y(x) = 2\ln(x+1)$ реализует сильный (и слабый) минимум.

8.7 Экстремаль $y(x) = x^2$ реализует слабый минимум.

8.8 Экстремаль $y(x) = \frac{b}{a}x$ реализует слабый минимум.

8.9 Экстремаль $y(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln 2}$ реализует сильный (и слабый) минимум.

8.10 Экстремаль $y(x) = \sin x + \cos x$ реализует сильный (и слабый) максимум.

8.11 На непрерывных кривых экстремум не достигается.

8.12 Экстремаль $y(x) = 2x+1$ реализует слабый минимум.

8.13 Экстремаль $y(x) = x-1$ реализует слабый минимум.

8.14 На экстремали $y(x) = \frac{b}{a}x$: при $|b| < \frac{a}{\sqrt{2}}$ достигается слабый минимум; при $|b| > \frac{a}{\sqrt{2}}$ - слабый максимум; при $|b| = \frac{a}{\sqrt{2}}$ - экстремума нет.

8.15 Окружности $x^2 + (y - C_1)^2 = C_2^2$.

8.16 $y(x) = ch\, x$.

ТЕМА 9

Задачи с подвижной границей. Условия трансверсальности.

Основные определения и теоремы

Рассмотрим функционал $V[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\,dx$, заданный на кривых $y(x) \in C^{(1)}[a,b]$, граничные точки которых $A(x_{0,}y_0)$ и $B(x_{1,}y_1)$ в свою очередь лежат на фиксированных гладких кривых $y=\varphi(x),\ y=\psi(x),$ так что $y_0=\varphi(x_0),\ y_1=\psi(x_1)$.

<u>*Задача с подвижными границами*</u> ставится так: среди всех функций $y(x) \in C^{(1)}[a,b]$, графики которых соединяют точки двух данных кривых $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$, найти ту, которая доставляет экстремум функционалу $V[y]$. Отметим, что абсциссы x_0 и x_1 точек *A* и *B* заранее не известны, и также подлежат определению.

Необходимые условия экстремума. Для того, чтобы функция $y=\tilde{y}(x)$ доставляла экстремум функционалу $V[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\,dx$ среди всех кривых $y(x) \in C^{(1)}[a,b]$, соединяющих точки двух заданных линий $y=\varphi(x),\quad y=\psi(x),$ необходимо, чтобы:

1) кривая $y=\tilde{y}(x)$ была решением уравнения Эйлера для функционала $V[y]$ (являлась экстремалью),
2) в точках $A(x_0,y_0)$, $B(x_1,y_1)$ пересечения экстремали $y=\tilde{y}(x)$ с кривыми $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$ выполнялись условия трансверсальности

$$[F+(\varphi'-\tilde{y}')\,F_{y'}]_{\,x=x_0}=0,$$
$$[F+(\psi'-\tilde{y}')\,F_{y'}]_{\,x=x_1}=0.$$

Условия трансверсальности устанавливают связь между угловыми коэффициентами кривых $\tilde{y}'$ и φ', а также $\tilde{y}'$ и ψ' в граничных точках *A* и *B*.

Для определения четырех параметров - C_1, C_2 из общего решения уравнения Эйлера и значений x_0, x_1 (координат концов экстремали) - два условия трансверсальности нужно дополнить двумя естественными условиями пересечения заданных кривых и искомой экстремали $\tilde{y}(x_0)=\varphi(x_0),\ \tilde{y}(x_1)=\psi(x_1)$.

Замечание 1. Если граничная точка (пусть точка *A*) может перемещаться только по горизонтальной прямой $y=x_0$ (т.е. $\varphi'=0$), то условие трансверсальности в точке $A(x_0,y_0)$ принимает вид $[F-y'F_{y'}]_{x=x_0}=0$.

Замечание 2. Если граничная точка (например, точка *B*) может перемещаться только по вертикальной прямой $x=x_1$ (т.е. $\psi'=\infty$), то такая задача называется <u>*задачей со свободным концом*</u>, и условие трансверсальности при $x=x_1$ в этом случае принимает вид $F_{y'}\Big|_{x=x_1}=0$.

Примеры решения задач

Пример 9.1. Показать, что если в задаче об экстремуме функционала

$$V[y]=\int_a^{x_0=B[y]} A(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

с левым закрепленным и правым подвижным концами функция $A(x,y)\neq 0$ дифференцируема, то условие трансверсальности переходит в условие ортогональности.

Решение. Условие трансверсальности $F+(\varphi'-y')F_{y'}=0$ при $x=x_0=B[y]$ в данной задаче имеет вид $A(x,y)\sqrt{1+y'^2}+(\varphi'-y')\cdot\dfrac{A(x,y)\ y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0$ или $\dfrac{A(x,y)\,(1+\varphi' y')}{\sqrt{1+y'^2}}=0$. Так как $A(x,y)\neq 0$, то $1+y'\varphi'\big|_{x=x_0}=0$ или $y'(x_0)=-\dfrac{1}{\varphi'(x_0)}$, что и требовалось.

Итак, условие трансверсальности совпадает с условием ортогональности.

Пример 9.2. Исследовать на экстремум функционал $V[y]=\displaystyle\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx$ при условии, что левый конец закреплен $y(0)=0$, а правый (x_1,y_1) может перемещаться вдоль заданной прямой $y=x-5$.

Решение. Функция $F(x,y,y')=\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{y}$ не зависит явно от *x*. Поэтому уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F-y'F_{y'}=C$, т.е. $\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{y}-y'\dfrac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}}=C$, или $Cy\sqrt{1+y'^2}=1$.

Положим $y'=\operatorname{tg}t$. Тогда $y=C_1\cos t$, а $dx=\dfrac{dy}{y'}=-\dfrac{C_1\sin t\,dt}{\operatorname{tg}t}=-C_1\cos t\,dt$, откуда $x=-C_1\sin t+C_2$.

Исключая параметр *t*, получаем уравнение семейства окружностей $(x-C_2)^2+y^2=C_1^2$ с центрами на оси x. Из условия $y(0)=0$ найдем $C_1=C_2=C$ и $(x-C)^2+y^2=C^2$.

Константа C может быть определена из условия трансверсальности, которое для данного функционала совпадает с условием ортогональности (пример 9.1) кривой $y=y(x)$ семейства $(x-C)^2+y^2=C^2$ и прямой $y=x-5$ в точке их пересечения (x_1,y_1). В нашем случае $\varphi(x)=x-5,\ \ \varphi'=1$, поэтому из $1+y'\varphi'\big|_{x=x_1}=0$ вытекает $y'\big|_{x=x_1}=-1$.

Дифференцируя семейство решений уравнения Эйлера, получим $yy'=C-x$. В точке пересечения кривых (x_1,y_1) имеем $\underbrace{y(x_1)}_{\equiv y_1}\cdot\underbrace{y'(x_1)}_{=-1}=C-x_1$, поэтому $-y_1=C-x_1$ и $y_1=x_1-5$, откуда $C=5$ и искомая экстремаль дается формулой $y=\pm\sqrt{10x-x^2}$.

Замечание. Этот результат можно получить и из геометрических соображений. Условие ортогональности прямой $y=x-5$ и окружности $(x-C)^2+y^2=C^2$ в точке их пересечения означает, что центр окружности $(C,0)$ лежит на этой прямой. Следовательно, центр окружности есть точка пересечения прямой $y=x-5$ с осью *x*, т.е. $C=5$.

Пример 9.3. Среди кривых, соединяющих точки прямой $2y+2x+3=0$ и параболы $x^2=2y$, найти ту, которая имеет наименьшую длину.

Решение. Введем обозначения: $y=\varphi(x)\equiv\dfrac{1}{2}x^2$ - уравнение параболы, $y=\psi(x)\equiv -x-\dfrac{3}{2}$ - уравнение прямой. Пусть точка с координатами (x_1,y_1) находится на параболе, т.е. $y_1=\dfrac{1}{2}{x_1}^2$, а точка (x_2,y_2) - на прямой, т.е. $y_2=-x_2-\dfrac{3}{2}$. Длина дуги кривой $y=y(x)$, соединяющей точки (x_1,y_1) и (x_2,y_2), определятся функционалом

$V[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}dx$. Таким образом, решение поставленной задачи дается экстремалью задачи с подвижной границей для функционала $V[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}dx$ с условиями $y(x_1)=y_1=\varphi(x_1)$, $y(x_2)=y_2=\psi(x_2)$.

Уравнение Эйлера $y''=0$ имеет общее решение $y(x)=\alpha x+\beta$. Для определения постоянных α и β, а также координат концов дуги экстремали получим следующие условия в точках (x_1,y_1) и (x_2,y_2):

$$\begin{cases} y_1=\alpha x_1+\beta, \qquad y_1=\dfrac{1}{2}x_1^2 \\ \sqrt{1+y'^2(x_1)}+[\underbrace{\varphi'(x_1)}_{=x_1}-\underbrace{y'(x_1)}_{=\alpha}]\dfrac{y'(x_1)}{\sqrt{1+y'^2(x_1)}}=0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} y_2=\alpha x_2+\beta, \qquad y_2=-x_2-\dfrac{3}{2} \\ \sqrt{1+y'^2(x_2)}+[\underbrace{\varphi'(x_2)}_{=-1}-\underbrace{y'(x_2)}_{=\alpha}]\dfrac{y'(x_2)}{\sqrt{1+y'^2(x_2)}}=0 \end{cases}$$

Во второй и четвертой строках записаны условия трансверсальности $F+(\varphi'-y')F_{y'}=0$, где $F(x,y,y')=\sqrt{1+y'^2}$, в точках (x_1,y_1) и (x_2,y_2). Легко видеть, что они совпадают с условиями ортогональности $y'(x_{1,2})\cdot\varphi'(x_{1,2})+1=0$.

Решая систему, найдем $x_1=-1,\quad x_2=-\dfrac{3}{2},\quad y_1=\dfrac{1}{2},\quad y_2=0$, и экстремаль $y(x)=x+\dfrac{3}{2}$.

Замечание. Длина дуги полученной экстремали $l=\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}dx=\int\limits_{-\frac{3}{2}}^{-1}\sqrt{1+1}\,dx=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ дает минимальное расстояние от прямой до параболы. Этот результат легко получить и из геометрических соображений.

Пример 9.4. Найти экстремали функционала $V[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(y'^2-y^2)\,dx$ с условием $y(0)=1$ (задача со свободным правым концом при $x=\frac{\pi}{4}$).

Решение. Граничное условие при $x=\frac{\pi}{4}$ следует поставить так: $F_{y'}\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=2y'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=0$.

Экстремали в данной задаче находятся из условий $\begin{cases} y''+y=0 & (\textit{ур}-\textit{е Эйлера}) \\ y(0)=1, & y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0 \end{cases}$,

откуда получаем единственное решение $y(x)=\sin x+\cos x$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти экстремали и значение ξ в следующих задачах с подвижной границей:

9.1 $V[y]=\int\limits_0^{\xi} y'^2 dx$ $\quad y(0)=0,\quad y(\xi)=-\xi-1$.

9.2 $V[y]=\int\limits_0^{\xi} y'^2 dx$ $\quad y(0)=0,\quad y(\xi)=\dfrac{2}{1-\xi}$.

9.3 $V[y]=\int\limits_0^{\xi} \sqrt{1+y'^2}\,dx$ $\quad y(0)=0,\quad y(\xi)=\dfrac{1}{\xi^2}$.

9.4 $V[y]=\int\limits_0^{\xi} (y'^2+x^2)dx$ $\quad y(0)=0,\quad y(\xi)=1\quad (\xi>0)$.

9.5 $V[y]=\int\limits_0^{\xi} \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx$ $\quad y(0)=1,\quad y(\xi)=\xi-1$.

9.6 Найти минимальное расстояние от точки $M_0(-1,5)$ до параболы $x=y^2$.

9.7 Найти минимальное расстояние от точки $M_0(1,0)$ до эллипса $4x^2+9y^2=36$.

9.8 Найти минимальное расстояние между точками параболы $y=x^2$ и прямой $x-y=5$.

9.9 Найти минимальное расстояние от прямой $x+y=4$ до окружности $x^2+y^2=1$.

Найти экстремали в задачах со свободными концами:

9.10 $V[y]=\int\limits_0^{2} (2xy+y'^2)dx$ $\quad y(0)=0$.

9.11 $V[y]=\int\limits_0^{1} (2y+6y'+y'^2)dx$ $\quad y(0)=0$.

9.12 $V[y]=\int\limits_0^{1} (2yy'+y'^2)dx$.

9.13 $V[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(4y^2+y'^2+2y\cos x)dx$.

9.14 $V[y]=\int\limits_1^2(2y+yy'+x^2y'^2)dx$.

9.15 $V[y]=\int\limits_1^2(2y-yy'+xy'^2)dx$

Ответы к задачам

9.1 $y(x)=-2x,\qquad \xi=1$.

9.2 $y(x)=9x,\qquad \xi=\dfrac{1}{3}$.

9.3 $y(x)=\dfrac{x}{\sqrt{2}},\qquad \xi=\sqrt[6]{2}$.

9.4 $y(x)=x,\qquad \xi=1$.

9.5 $y(x)=\sqrt{1+2x-x^2},\qquad \xi=2$.

9.6 $2\sqrt{5}$.

9.7 $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$, экстремаль $y(x)=2x-2$.

9.8 $\dfrac{19\sqrt{2}}{8}$, экстремаль $y(x)=-x+\dfrac{3}{4}$.

9.9 $2\sqrt{2}-1$.

9.10 $y(x)=\dfrac{x^3}{6}-2x$.

9.11 $y(x)=\dfrac{x^2}{2}-4x$.

9.12 $y(x)\equiv 0$.

9.13 $y(x)=-\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{ch\,2x}{2\;sh\;\pi}+\cos x\right)$.

9.14 $y(x)=2+\ln(4x)+\dfrac{4+\ln 4}{x}$.

9.15 $y(x)=x+1+\dfrac{2+\ln x}{\ln 2}$.

ТЕМА 10

Условный экстремум.
Задача Лагранжа. Изопериметрические задачи.

Основные определения и теоремы

В вариационных задачах на условный экстремум множество функций, на которых исследуется функционал, подчиняется дополнительным условиям связи.

Рассмотрим функционал $$V[y,z]=\int_a^b F(x,y,z,y',z')dx \qquad (1)$$

с граничными условиями $$\begin{aligned} y(a) &= y_0, \quad y(b) = y_1, \\ z(a) &= z_0, \quad z(b) = z_1. \end{aligned} \qquad (2)$$

и дополнительным условием связи вида $$\Phi(x,y,z,y',z') = 0. \qquad (3)$$

Среди всех кривых $y(x)$, $z(x) \in C^{(1)}[a,b]$, удовлетворяющих граничным условиям (2), а также условию связи (3), требуется определить те, на которых реализуется экстремум функционала $V[y,z]$. Сформулированную проблему иногда называют *задачей Лагранжа.*

Связи типа $\Phi(x,y,z) = 0$ (т.е. не зависящие от производных) в механике называются *голономными*, а связи вида $\Phi(x,y,z,y',z') = 0$ (зависящие от производных) называются *неголономными*.

Необходимые условия экстремума (задача Лагранжа).

Пусть

1) функции $y(x)$, $z(x)$ реализуют экстремум функционала $V[y,z]$ на множестве пар функций, удовлетворяющий граничным условиям (2) и условию связи (3);
2) функции F, Φ трижды дифференцируемы;
3) $y(x)$ и $z(x)$ дважды дифференцируемы и $\Phi_z'^2 + \Phi_y'^2 \neq 0$.

Тогда существует дифференцируемая функция $\lambda(x)$ такая, что функции $y(x)$, $z(x)$, а также $\lambda(x)$ удовлетворяют системе уравнений Эйлера, записанной для вспомогательного функционала $\int_a^b H(x,y,z,y',z')\,dx$, где $H \equiv F(x,y,z,y',z')+\lambda(x)\Phi(x,y,z,y',z')$ (конструкция, аналогичная функции Лагранжа в задаче об условном экстремуме функций нескольких переменных):

$$H_y - \frac{d}{dx}H_{y'} = 0, \quad H_z - \frac{d}{dx}H_{z'} = 0.$$

Замечание 1. В случае голономных связей (не зависящих от производных) *условие* 3) *теоремы отсутствует*.

Замечание 2. Естественно, что приведенное в исследуемом функционале количество функций - две, является минимально необходимым для постановки задачи об условном экстремуме. В общем случае, количество связей должно быть *меньше* количества функций в функционале *V*.

Изопериметрическая задача. Условия связи могут быть заданы не в виде функций, а виде дополнительных функционалов. Важнейшим примером таких задач является так называемая изопериметрическая задача, которая ставится следующим образом:

среди всех функций $y(x) \in C^{(1)}[a,b]$ найти ту, которая доставляет экстремум функционалу $V[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx$, с граничными условиями $y(a)=y_0$, $y(b)=y_1$ при наличии связи $J[y]=\int_a^b G(x,y,y')dx = l$, где l - заданная постоянная.

Изопериметрическая задача сводится к задаче Лагранжа введением функции $z(x)=\int_a^x G(x,y,y')dx$. Тогда очевидно, что $z(a)=0$, $z(b)=l$, $z'=G(x,y,y')$, и рассматриваемая изопериметрическая задача приведена к виду (1)-(3), где $V[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx$, граничные условия $y(a)=y_0$, $y(b)=y_1$, $z(a)=0$, $z(b)=l$, а соотношение $\Phi(x,y,z,y',z') \equiv G(x,y,y')-z'=0$ играет роль неголономной связи типа (3) (в данном случае функция $z(x)$ входит только в условие связи).

Необходимые условия экстремума (изопериметрическая задача). Пусть

1) на функции $y(x)$ достигается экстремум функционала $V[y]$ при сформулированных граничных условия и условиях связи;
2) функция F трижды дифференцируема;
3) $y(x)$ дважды дифференцируема и не является экстремалью функционала $J[y]$.

Тогда существует постоянная λ такая, что функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера для вспомогательного функционала $\int_a^b H(x,y,y')\,dx$, где обозначено $F(x,y,y') + \lambda G(x,y,y') \equiv H(x,y,y')$.

Замечание. Если $y(x)$ - экстремаль функционала $J[y]$, то $G_y - \frac{d}{dx}G_{y'}=0$, т.е. уравнение Эйлера для функционала $\int_a^b H(x,y,y')dx$ совпадает с обычным уравнением Эйлера $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}=0$ для функционала $V[y]$.

Примеры решения задач

Пример 10.1. Найти экстремали в изопериметрической задаче для функционала

$$V[y]=\int_a^b [p(x)y'^2+q(x)y^2]\,dx$$

с дополнительными условиями $J[y]=\int_a^b \rho(x)y^2\,dx=1$, $y(a)=0$, $y(b)=0$,

где $p(x)$ непрерывно дифференцируемая, $q(x)$ и $\rho(x)$ непрерывные на $[a,b]$ функции, причем $\rho(x)>0$, $p(x)>0$, $q(x)\ge 0$.

Решение. В принятых выше обозначениях $F(x,y,y')=p(x)y'^2+q(x)y^2$, $G(x,y,y')=\rho(x)y^2$, $H(x,y,y')=p(x)y'^2+q(x)y^2+\lambda\rho(x)y^2$, поэтому вспомогательный функционал имеет вид $\quad V[y]+\lambda J[y]=\int\limits_a^b [p(x)y'^2+q(x)y^2+\lambda\rho(x)y^2]\,dx$.

Уравнение Эйлера $\dfrac{d}{dx}[p(x)y']-q(x)y-\lambda\rho(x)y=0$ с краевыми условиями $y(a)=0$, $y(b)=0$, очевидно, имеет решение $y(x)\equiv 0$, которое, однако, не удовлетворяет изопериметрическому условию $\int\limits_a^b \rho(x)y^2\,dx=1$. Поэтому экстремали следует определить как решения задачи Штурма-Лиувилля, т.е. экстремалями в данном случае являются собственные функции $y_n(x)$, отвечающие собственным значениям λ_n, причем $\lambda_n<0$.

Умножив уравнение Эйлера на функцию $y_n(x)$ и проинтегрировав по отрезку $[a,b]$, с учетом дополнительных условий получим

$$\underbrace{p(x)y_n'(x)y_n(x)\Big|_a^b}_{=0}-\int\limits_a^b p(x)y_n'^2dx-\int\limits_a^b q(x)y_n^2dx=\lambda_n\underbrace{\int\limits_a^b \rho(x)y_n^2dx}_{=1},$$

т.е. значение функционала $V[y]$ на найденных экстремалях $V[y_n(x)]=-\lambda_n$.

Итак, экстремалями рассматриваемой изопериметрической задачи являются ортонормированные с весом $\rho(x)$ собственные функции $y_n(x)$ задачи Штурма-Лиувилля; при этом соответствующие им собственные значения λ_n представляют собой экстремальные значения функционала $-V[y]$.

Пример 10.2. Найти тело вращения наименьшего объема с заданной площадью осевого сечения.

Решение. Пусть ось Ox выбранной системы координат совпадает с осью вращения, тогда для ответа на вопрос задачи нужно найти минимум функционала $V[y]=\pi\int\limits_a^b y^2\,dx$ при условиях $2\int\limits_a^b y\,dx=S$, $y(a)=A$, $y(b)=B$. Уравнение Эйлера для функционала Лагранжа $V[y]=\int\limits_a^b (y^2+\lambda y)\,dx$ в рассматриваемом случае не дифференциальное, а алгебраическое $2y+\lambda=0$, и его решение $y(x)=-\dfrac{\lambda}{2}$ существует лишь, если $A=B=-\dfrac{\lambda}{2}$ и $-\lambda(b-a)=S$, т.е. искомым телом является цилиндр.

Пример 10.3. На поверхности цилиндра $x^2+y^2=a^2$ найти кривую наименьшей длины, соединяющую точки $(a,0,0)$ и $(0,a,h)$, и расстояние между этими точками, измеренное по поверхности цилиндра.

Решение. Зададим искомую кривую в параметрической форме $L:\{x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)\}$, тогда длина дуги этой кривой дается функционалом $l=V[x,y,z]=\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$. Конкретный способ выбора параметра t будет указан ниже.

Для решения задачи требуется найти экстремали функционала $V[x,y,z]=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$ в задаче Лагранжа с голономной связью $\varphi(x,y,z)\equiv x^2+y^2-a^2=0$ и граничными условиями

$$\begin{cases} x(\alpha)=a, & y(\alpha)=0, & z(\alpha)=0 \\ x(\beta)=0, & y(\beta)=a, & z(\beta)=h \end{cases}.$$

Составим вспомогательный функционал $\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}+\lambda(t)(x^2+y^2-a^2)\right]dt$, тогда

система уравнений Эйлера выглядит так: $$\begin{cases} 2\lambda(t)\cdot x-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}=0 \\ 2\lambda(t)\cdot y-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}=0 \\ -\dfrac{d}{dt}\dfrac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}=0 \end{cases}.$$

Выберем в качестве t естественный параметр - длину дуги кривой, отсчитанную от точки $(a,0,0)$, тогда $\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=1$ и уравнения Эйлера примут более простой вид

$$\begin{cases} \ddot{x}=2\lambda(t)\cdot x \\ \ddot{y}=2\lambda(t)\cdot y \\ \ddot{z}=0 \end{cases}.$$

Отсюда сразу найдем $\dot{z}=C$, где $|C|<1$.

Далее, дифференцируя дважды уравнение поверхности $x^2+y^2=a^2$, получим $x\ddot{x}+y\ddot{y}+\underbrace{\dot{x}^2+\dot{y}^2}_{=1-\dot{z}^2}=0$, откуда $x\ddot{x}+y\ddot{y}=\dot{z}^2-1=C^2-1$. Подставляя это соотношение в первые два уравнения последней системы, найдем $C^2-1=2\lambda(t)\underbrace{(x^2+y^2)}_{=a^2}\ \Rightarrow 2\lambda(t)=\dfrac{C^2-1}{a^2}$.

Теперь уравнения Эйлера легко интегрируются и, так как $|C|<1$, т.е. $C^2-1<0$, то их решение есть $x(t)=A_1\sin\gamma t+A_2\cos\gamma t$, $y(t)=B_1\sin\gamma t+B_2\cos\gamma t$, $z(t)=Ct+C_1$ - винтовая линия (здесь введено обозначение $\gamma=\sqrt{\dfrac{1-C^2}{a^2}}$).

Дополнительные условия при выбранном способе параметризации кривой следует поставить так:

$$\begin{cases} x(0)=a, & y(0)=0, & z(0)=0 \\ x(l)=0, & y(l)=a, & z(l)=h \end{cases}.$$

Условия при $t=0$ с учетом $x^2+y^2=a^2$ дают $x(t)=a\cos\gamma t,\ y(t)=a\sin\gamma t,\ z(t)=Ct$; при $t=l$ имеем $\cos\gamma l=0,\ \sin\gamma l=1,\ C=\dfrac{h}{l}$, откуда следует $\gamma=\dfrac{\pi}{2l}$, и уравнения экстремали принимают вид $x(t)=a\cos\dfrac{\pi}{2l}t,\ y(t)=a\sin\dfrac{\pi}{2l}t,\ z(t)=\dfrac{h}{l}t$.

Подставив полученные формулы в соотношение $\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=1$, определявшее выбор параметризации, найдем $\left(\frac{\pi a}{2l}\right)^2+\left(\frac{h}{l}\right)^2=1$, откуда $l=\sqrt{h^2+\left(\frac{\pi a}{2}\right)^2}$. Итак, кратчайшее расстояние между точками $(a,0,0)$ и $(0,a,h)$, измеренное на поверхности цилиндра $x^2+y^2=a^2$, равно $l=\sqrt{h^2+\left(\frac{\pi a}{2}\right)^2}$.

Замечание. Эту формулу можно вывести и из простых геометрических соображений: если "разрезать" поверхность цилиндра по образующей, проходящей через точку $(a,0)$ и "развернуть" ее, то получим прямоугольник со сторонами длиной $\frac{\pi a}{2}$ и h, диагональ которого равна $l=\sqrt{h^2+\left(\frac{\pi a}{2}\right)^2}$ и дает искомое минимальное расстояние между заданными точками.

Пример 10.4. На поверхности $15x-7y+z=22$ найти кривую наименьшей длины, соединяющую точки $A(1,-1,0)$ и $B(2,1,-1)$, и расстояние между этими точками, измеренное по данной поверхности.

Решение. Зададим искомую кривую в параметрической форме $L:\{x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)\}$, $0\le t\le\alpha$, где значение α будет определено позднее. Тогда длина дуги кривой дается функционалом $l=V[x,y,z]=\int\limits_A^B dl=\int\limits_0^\alpha\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$.

Для решения задачи нужно найти экстремали функционала $V[x,y,z]=\int\limits_0^\alpha\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$ в задаче Лагранжа с голономной связью $\varphi(x,y,z)\equiv 15x-7y+z-22=0$ и граничными условиями

$$\begin{cases} x(0)=1, & y(0)=-1, & z(0)=0 \\ x(\alpha)=2, & y(\alpha)=1, & z(\alpha)=-1 \end{cases}.$$

Составим вспомогательный функционал $\int\limits_0^\alpha\left[\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}+\lambda(t)(15x-7y+z-22)\right]dt$, система уравнений Эйлера для которого выглядит так:

$$\begin{cases} 15\lambda(t)-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}=0 \\ -7\lambda(t)-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}=0 \\ \lambda(t)-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}=0 \end{cases}.$$

Как и в предыдущем примере выберем в качестве t естественный параметр - длину дуги кривой, отсчитанную от точки A, тогда $\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=1$ и $\alpha=l$, а уравнения Эйлера примут вид: $\ddot{x}=15\lambda(t),\quad \ddot{y}=-7\lambda(t),\quad \ddot{z}=\lambda(t)$.

Продифференцировав дважды уравнение поверхности $15x - 7y + z = 22$, получим $15\ddot{x} - 7\ddot{y} + \ddot{z} = 0$, откуда, учитывая уравнения Эйлера, найдем $\lambda(t) = 0$. Поэтому $\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$, и экстремалями задачи являются прямые.

Дополнительное условие в точке $A(1,-1,0)$ и способ выбора параметра, т.е. соотношение $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1$, определяют искомую кривую в параметрической форме $x(t) = 1 + \frac{1}{\sqrt{6}}t,\quad y(t) = -1 + \frac{2}{\sqrt{6}}t,\quad z(t) = -\frac{1}{\sqrt{6}}t$, а условие в точке $B(2,1,-1)$ (т.е. при $t = \alpha$) дает расстояние между точками: $l = \alpha = \sqrt{6}$.

Замечание. Результат, полученный нами средствами вариационного исчисления, был очевиден заранее из геометрических соображений, так как заданная поверхность $15x - 7y + z = 22$ - плоскость, следовательно, минимальное расстояние между любыми двумя точками на ней есть длина отрезка, соединяющего эти точки.

Пример 10.5. (задача Чаплыгина). Определить траекторию, по которой должен двигаться самолет с постоянной относительно воздуха скоростью $\vec{u} : |\vec{u}| = u = const$, чтобы за фиксированное время T облететь территорию максимальной площади, если скорость ветра $\vec{v}$ постоянна и $|\vec{v}| = v < u$.

Решение. Выберем систему координат так, что ось Ox направлена вдоль скорости ветра. Пусть искомая траектория задана в параметрической форме $x = x(t),\ y = y(t)$, тогда скорость самолета в этой системе координат $\vec{V} \equiv \{\dot{x}(t), \dot{y}(t)\} = \vec{u} + \vec{v}$ и имеет место соотношение $(\dot{x} - v)^2 + \dot{y}^2 = u^2$.

Задача состоит в нахождении кривой, реализующей минимум функционала площади $S[x,y] = \frac{1}{2}\int\limits_0^T (x\dot{y} - y\dot{x})\,dt$ при наличии неголономной связи $(\dot{x} - v)^2 + \dot{y}^2 - u^2 = 0$. Граничные условия: $x(0) = x(T) = x_0,\quad y(0) = y(T) = y_0$, т.е. самолет вылетает из некоторой точки и в нее же возвращается (выбор начальной точки будет указан ниже).

Функционал Лагранжа
$$L[x,y] = \int\limits_0^T \left[\frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) + \lambda(t)\left((\dot{x} - v)^2 + \dot{y}^2 - u^2 \right) \right] dt$$

порождает систему уравнений Эйлера
$$\begin{cases} \frac{1}{2}\dot{y} - \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}y + 2\lambda(t)(\dot{x} - v) \right) = 0 \\ -\frac{1}{2}\dot{x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x + 2\lambda(t)\dot{y} \right) = 0 \end{cases},$$

интегрируя которую получим
$$\begin{cases} y - 2\lambda(t)(\dot{x} - v) = C_1 \\ x + 2\lambda(t)\dot{y} = C_2 \end{cases}.$$

Сделаем сдвиг исходной системы координат, т.е. выберем начальную точку траектории (x_0, y_0) так, что $C_1 = C_2 = 0$, тогда в новых координатах имеем
$$\begin{cases} y = 2\lambda(t)(\dot{x} - v) \\ x = -2\lambda(t)\dot{y} \\ (\dot{x} - v)^2 + \dot{y}^2 - u^2 = 0 \end{cases}.$$

Далее, исключая функцию $\lambda(t)$ из первого и второго уравнения, приведем систему к виду $\begin{cases} \dot{x}-v=-\dfrac{y\dot{y}}{x} \\ (\dot{x}-v)^2+\dot{y}^2-u^2=0 \end{cases}$, откуда $\dot{y}^2=\dfrac{u^2x^2}{x^2+y^2}$, $(\dot{x}-v)^2=\dfrac{u^2y^2}{x^2+y^2}$. Учитывая, что $\dfrac{\dot{x}}{\dot{y}}=\dfrac{dx}{dy}$, получим дифференциальное уравнение искомой траектории $x\dfrac{dx}{dy}+y=\pm\dfrac{v}{u}\sqrt{x^2+y^2}$, которое легко интегрируется, так как $\dfrac{x\dfrac{dx}{dy}+y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{d}{dy}\sqrt{x^2+y^2}$.

Следовательно, решение задачи дается формулой $\sqrt{x^2+y^2}=\pm\dfrac{v}{u}y+C$ и представляет собой семейство эллипсов с эксцентриситетом $\varepsilon=\dfrac{v}{u}<1$, большая ось которых перпендикулярна оси Ox, т.е. направлению ветра.

Задачи для самостоятельного решения

10.1 Найти экстремали изопериметрической задачи для функционала $V[y]=\int\limits_a^b F(x,y,y')\,dx$ в следующих случаях:

а) $V[y]=\int\limits_0^1 y'^2dx$, $\int\limits_0^1 y\,dx=3$, $y(0)=1,\ y(1)=6$;

б) $V[y]=\int\limits_0^\pi (y'^2+x^2)dx$, $\int\limits_0^\pi y^2dx=1$, $y(0)=0,\ y(\pi)=0$;

в) $V[y]=\int\limits_0^1 y'^2dx$, $\int\limits_0^1 (y-y'^2)\,dx=\dfrac{1}{12}$, $y(0)=0,\ y(1)=\dfrac{1}{4}$;

г) $V[y]=\int\limits_0^1 y'^2dx$, $\int\limits_0^1 y\,dx=1$, $\int\limits_0^1 xy\,dx=0$, $y(0)=0,\ y(1)=0$.

10.2 Найти экстремали задачи на условный экстремум для функционала $V[y,z]=\int\limits_a^b F(x,y,z,y',z')\,dx$ с голономными связями в следующих случаях:

а) $V[y,z]=\int\limits_0^1 (y'^2+z'^2)dx$, $y^2+z^2=1$,

$y(0)=1,\ y(1)=0,\ z(0)=0,\ z(1)=1$;

б) $V[y,z]=\int\limits_0^1 (y'^2+z'^2+x^3)dx$, $y-2z+3x=0$,

$y(0)=2,\ y(1)=1,\ z(0)=1,\ z(1)=2$;

в) $V[y,z]=\int\limits_0^1 (y'^2+z'^2+1)\,dx$, $y+z=2x^2$,

$y(0)=0,\ y(1)=2,\ z(0)=0,\ z(1)=0$;

г) $V[y,z]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(y^2+z^2-y'^2-z'^2+\cos x)\,dx$,

$$y-z=2\sin x,$$

$y(0)=1,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1,\ \ z(0)=1,\ \ z\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$.

10.3 Найти экстремали задачи на условный экстремум для функционала $V[y,z]=\int\limits_a^b F(x,y,z,y',z')\,dx$ с неголономными связями в следующих случаях:

а) $V[y,z]=\int\limits_0^1(y'^2+2z'^2+z^2)dx$, $\qquad y-z'=0$,

$y(0)=-2,\ y(1)=-\dfrac{1}{e},\ \ z(0)=1,\ \ z(1)=0$;

б) $V[y,z]=\int\limits_0^1(y'^2+z'^2)dx$, $\qquad y'-z=0$,

$y(0)=0,\ y(1)=1,\ \ z(0)=1,\ \ z(1)=0$;

в) $V[y,z]=\int\limits_0^{\pi}(y'^2-z'^2)dx$, $\qquad y'=\sin x-z$,

$y(0)=0,\ y(\pi)=0,\ \ z(0)=0,\ \ z(\pi)=\dfrac{\pi}{2}$;

г) $V[y,z]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(y^2-4x^2z^2\right)dx$, $\qquad z'=2y-4xz$, $\qquad z(0)=0,\qquad z\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$.

Ответы к задачам

10.1 а) $y(x)=3x^2+2x+1$;

б) $y_k(x)=\pm\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin kx,\quad k\in\mathbb{N}$;

в) $y(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{4}$;

г) $y(x)=60x^3-96x^2+36x$.

10.2 а) $y(x)=\cos\dfrac{\pi x}{2},\qquad z(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$;

б) $y(x)=2-x,\qquad z(x)=1+x$;

в) $y(x)=x^2+x,\qquad z(x)=x^2-x$

г) $y(x)=\cos x+\sin x,\qquad z(x)=\cos x-\sin x$.

10.3 а) $y(x)=(x-2)e^{-x},\qquad z(x)=(1-x)e^{-x}$;

б) решений нет;

в) $y(x)=\dfrac{x}{2}\sin x,\qquad z(x)=\dfrac{1}{2}(\sin x-x\cos x)$;

г) $y(x)=\cos 2x+2x\cdot\sin 2x,\qquad z(x)=\sin 2x$.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Волков В.Т., Ягола А.Г. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. Курс лекций. М.: КДУ, 2008.
2. Васильева А.Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. М.: Физматлит, 2002.
3. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: УРСС, 2000.
4. Васильева А.Б., Медведев Г.Н., Тихонов Н.А., Уразгильдина Т.А. Дифференциальные и интегральные уравнения. Вариационное исчисление. М.: Физматлит, 2003.

Дополнительная

1. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
2. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2002.
3. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984.
4. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями. Серия "Вся высшая математика в задачах". М.: УРСС, 2003.
5. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. Задачи и примеры с подробными решениями. Серия "Вся высшая математика в задачах". М.: УРСС, 2002.
6. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2001.
7. Владимиров В.С., Вашарин А.А. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001.