ТЕМА 10

Условный экстремум. Задача Лагранжа. Изопериметрические задачи.

Основные определения и теоремы

В вариационных задачах на условный экстремум множество функций, на которых исследуется функционал, подчиняется дополнительным условиям связи.

Рассмотрим функционал
$$V[y,z]=\int_a^b F(x,y,z,y',z')dx \qquad (1)$$
с граничными условиями
$$y(a)=y_0,\quad y(b)=y_1,$$
$$z(a)=z_0,\quad z(b)=z_1. \qquad (2)$$
и дополнительным условием связи вида
$$\Phi(x,y,z,y',z')=0. \qquad (3)$$

Среди всех кривых $y(x)$, $z(x)\in C^{(1)}[a,b]$, удовлетворяющих граничным условиям (2), а также условию связи (3), требуется определить те, на которых реализуется экстремум функционала $V[y,z]$. Сформулированную проблему иногда называют *задачей Лагранжа.*

Связи типа $\Phi(x,y,z)=0$ (т.е. не зависящие от производных) в механике называются *голономными*, а связи вида $\Phi(x,y,z,y',z')=0$ (зависящие от производных) называются *неголономными*.

Необходимые условия экстремума (задача Лагранжа).

Пусть

1) функции $y(x)$, $z(x)$ реализуют экстремум функционала $V[y,z]$ на множестве пар функций, удовлетворяющий граничным условиям (2) и условию связи (3);
2) функции F, Φ трижды дифференцируемы;
3) $y(x)$ и $z(x)$ дважды дифференцируемы и $\Phi_z'^2+\Phi_y'^2\neq 0$.

Тогда существует дифференцируемая функция $\lambda(x)$ такая, что функции $y(x)$, $z(x)$, а также $\lambda(x)$ удовлетворяют системе уравнений Эйлера, записанной для вспомогательного функционала $\int_a^b H(x,y,z,y',z')\,dx$, где $H\equiv F(x,y,z,y',z')+\lambda(x)\Phi(x,y,z,y',z')$ (конструкция, аналогичная функции Лагранжа в задаче об условном экстремуме функций нескольких переменных):
$$H_y-\frac{d}{dx}H_{y'}=0,\quad H_z-\frac{d}{dx}H_{z'}=0.$$

Замечание 1. В случае голономных связей (не зависящих от производных) *условие* 3) *теоремы отсутствует*.

Замечание 2. Естественно, что приведенное в исследуемом функционале количество функций - две, является минимально необходимым для постановки задачи об условном экстремуме. В общем случае, количество связей должно быть *меньше* количества функций в функционале V.

Изопериметрическая задача. Условия связи могут быть заданы не в виде функций, а виде дополнительных функционалов. Важнейшим примером таких задач является так называемая изопериметрическая задача, которая ставится следующим образом:

среди всех функций $y(x) \in C^{(1)}[a,b]$ найти ту, которая доставляет экстремум функционалу $V[y]=\int\limits_a^b F(x,y,y')dx$, с граничными условиями $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$ при наличии связи $J[y]=\int\limits_a^b G(x,y,y')dx = l$, где l - заданная постоянная.

Изопериметрическая задача сводится к задаче Лагранжа введением функции $z(x)=\int\limits_a^x G(x,y,y')dx$. Тогда очевидно, что $z(a) = 0$, $z(b) = l$, $z' = G(x,y,y')$, и рассматриваемая изопериметрическая задача приведена к виду (1)-(3), где $V[y]=\int\limits_a^b F(x,y,y')dx$, граничные условия $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$, $z(a) = 0$, $z(b) = l$, а соотношение $\Phi(x,y,z,y',z') \equiv G(x,y,y') - z' = 0$ играет роль неголономной связи типа (3) (в данном случае функция $z(x)$ входит только в условие связи).

Необходимые условия экстремума (изопериметрическая задача). Пусть
1) на функции $y(x)$ достигается экстремум функционала $V[y]$ при сформулированных граничных условия и условиях связи;
2) функция F трижды дифференцируема;
3) $y(x)$ дважды дифференцируема и не является экстремалью функционала $J[y]$.

Тогда существует постоянная λ такая, что функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера для вспомогательного функционала $\int\limits_a^b H(x,y,y')\,dx$, где обозначено $F(x,y,y') + \lambda G(x,y,y') \equiv H(x,y,y')$.

Замечание. Если $y(x)$ - экстремаль функционала $J[y]$, то $G_y - \frac{d}{dx} G_{y'} = 0$, т.е. уравнение Эйлера для функционала $\int\limits_a^b H(x,y,y')dx$ совпадает с обычным уравнением Эйлера $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$ для функционала $V[y]$.

Примеры решения задач

Пример 10.1. Найти экстремали в изопериметрической задаче для функционала

$$V[y]=\int\limits_a^b [p(x)y'^2 + q(x)y^2]\,dx$$

с дополнительными условиями $J[y]=\int\limits_a^b \rho(x)y^2\,dx = 1$, $y(a)=0$, $y(b)=0$,

где $p(x)$ непрерывно дифференцируемая, $q(x)$ и $\rho(x)$ непрерывные на $[a,b]$ функции, причем $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$.

Решение. В принятых выше обозначениях $F(x,y,y') = p(x)y'^2 + q(x)y^2$, $G(x,y,y') = \rho(x)y^2$, $H(x,y,y') = p(x)y'^2 + q(x)y^2 + \lambda\rho(x)y^2$, поэтому вспомогательный функционал имеет вид $V[y]+\lambda J[y]=\int\limits_a^b [p(x)y'^2+q(x)y^2+\lambda\rho(x)y^2]\,dx$.

Уравнение Эйлера $\dfrac{d}{dx}[p(x)y']-q(x)y-\lambda\rho(x)y=0$ с краевыми условиями $y(a)=0$, $y(b)=0$, очевидно, имеет решение $y(x)\equiv 0$, которое, однако, не удовлетворяет изопериметрическому условию $\int\limits_a^b \rho(x)y^2\,dx=1$. Поэтому экстремали следует определить как решения задачи Штурма-Лиувилля, т.е. экстремалями в данном случае являются собственные функции $y_n(x)$, отвечающие собственным значениям λ_n, причем $\lambda_n<0$.

Умножив уравнение Эйлера на функцию $y_n(x)$ и проинтегрировав по отрезку $[a,b]$, с учетом дополнительных условий получим

$$\underbrace{p(x)y_n'(x)y_n(x)\Big|_a^b}_{=0}-\int\limits_a^b p(x)y_n'^2dx-\int\limits_a^b q(x)y_n^2dx=\lambda_n\underbrace{\int\limits_a^b \rho(x)y_n^2dx}_{=1},$$

т.е. значение функционала $V[y]$ на найденных экстремалях $V[y_n(x)]=-\lambda_n$.

Итак, экстремалями рассматриваемой изопериметрической задачи являются ортонормированные с весом $\rho(x)$ собственные функции $y_n(x)$ задачи Штурма-Лиувилля; при этом соответствующие им собственные значения λ_n представляют собой экстремальные значения функционала $-V[y]$.

Пример 10.2. Найти тело вращения наименьшего объема с заданной площадью осевого сечения.

Решение. Пусть ось Ox выбранной системы координат совпадает с осью вращения, тогда для ответа на вопрос задачи нужно найти минимум функционала $V[y]=\pi\int\limits_a^b y^2\,dx$ при условиях $2\int\limits_a^b y\,dx=S$, $y(a)=A$, $y(b)=B$. Уравнение Эйлера для функционала Лагранжа $V[y]=\int\limits_a^b (y^2+\lambda y)\,dx$ в рассматриваемом случае не дифференциальное, а алгебраическое $2y+\lambda=0$, и его решение $y(x)=-\dfrac{\lambda}{2}$ существует лишь, если $A=B=-\dfrac{\lambda}{2}$ и $-\lambda(b-a)=S$, т.е. искомым телом является цилиндр.

Пример 10.3. На поверхности цилиндра $x^2+y^2=a^2$ найти кривую наименьшей длины, соединяющую точки $(a,0,0)$ и $(0,a,h)$, и расстояние между этими точками, измеренное по поверхности цилиндра.

Решение. Зададим искомую кривую в параметрической форме $L:\{x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)\}$, тогда длина дуги этой кривой дается функционалом $l=V[x,y,z]=\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$. Конкретный способ выбора параметра t будет указан ниже.

Для решения задачи требуется найти экстремали функционала $V[x,y,z]=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$ в задаче Лагранжа с голономной связью $\varphi(x,y,z)\equiv x^2+y^2-a^2=0$ и граничными условиями

$$\begin{cases} x(\alpha)=a, & y(\alpha)=0, & z(\alpha)=0 \\ x(\beta)=0, & y(\beta)=a, & z(\beta)=h \end{cases}.$$

Составим вспомогательный функционал $\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}+\lambda(t)(x^2+y^2-a^2)\right]dt$, тогда система уравнений Эйлера выглядит так:

$$\begin{cases} 2\lambda(t)\cdot x-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}=0 \\ 2\lambda(t)\cdot y-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}=0 \\ -\dfrac{d}{dt}\dfrac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}=0 \end{cases}.$$

Выберем в качестве t естественный параметр - длину дуги кривой, отсчитанную от точки $(a,0,0)$, тогда $\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=1$ и уравнения Эйлера примут более простой вид

$$\begin{cases} \ddot{x}=2\lambda(t)\cdot x \\ \ddot{y}=2\lambda(t)\cdot y \\ \ddot{z}=0 \end{cases}.$$

Отсюда сразу найдем $\dot{z}=C$, где $|C|<1$.

Далее, дифференцируя дважды уравнение поверхности $x^2+y^2=a^2$, получим $x\ddot{x}+y\ddot{y}+\underbrace{\dot{x}^2+\dot{y}^2}_{=1-\dot{z}^2}=0$, откуда $x\ddot{x}+y\ddot{y}=\dot{z}^2-1=C^2-1$. Подставляя это соотношение в первые два уравнения последней системы, найдем $C^2-1=2\lambda(t)\underbrace{(x^2+y^2)}_{=a^2}\ \Rightarrow 2\lambda(t)=\dfrac{C^2-1}{a^2}$.

Теперь уравнения Эйлера легко интегрируются и, так как $|C|<1$, т.е. $C^2-1<0$, то их решение есть $x(t)=A_1\sin\gamma t+A_2\cos\gamma t$, $y(t)=B_1\sin\gamma t+B_2\cos\gamma t$, $z(t)=Ct+C_1$ - винтовая линия (здесь введено обозначение $\gamma=\sqrt{\dfrac{1-C^2}{a^2}}$).

Дополнительные условия при выбранном способе параметризации кривой следует поставить так:

$$\begin{cases} x(0)=a, & y(0)=0, & z(0)=0 \\ x(l)=0, & y(l)=a, & z(l)=h \end{cases}.$$

Условия при $t=0$ с учетом $x^2+y^2=a^2$ дают $x(t)=a\cos\gamma t,\ y(t)=a\sin\gamma t,\ z(t)=Ct$; при $t=l$ имеем $\cos\gamma l=0,\ \sin\gamma l=1,\ C=\dfrac{h}{l}$, откуда следует $\gamma=\dfrac{\pi}{2l}$, и уравнения экстремали принимают вид $x(t)=a\cos\dfrac{\pi}{2l}t,\ y(t)=a\sin\dfrac{\pi}{2l}t,\ z(t)=\dfrac{h}{l}t$.

Подставив полученные формулы в соотношение $\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=1$, определявшее выбор параметризации, найдем $\left(\frac{\pi a}{2l}\right)^2+\left(\frac{h}{l}\right)^2=1$, откуда $l=\sqrt{h^2+\left(\frac{\pi a}{2}\right)^2}$. Итак, кратчайшее расстояние между точками $(a,0,0)$ и $(0,a,h)$, измеренное на поверхности цилиндра $x^2+y^2=a^2$, равно $l=\sqrt{h^2+\left(\frac{\pi a}{2}\right)^2}$.

Замечание. Эту формулу можно вывести и из простых геометрических соображений: если "разрезать" поверхность цилиндра по образующей, проходящей через точку $(a,0)$ и "развернуть" ее, то получим прямоугольник со сторонами длиной $\frac{\pi a}{2}$ и h, диагональ которого равна $l=\sqrt{h^2+\left(\frac{\pi a}{2}\right)^2}$ и дает искомое минимальное расстояние между заданными точками.

Пример 10.4. На поверхности $15x-7y+z=22$ найти кривую наименьшей длины, соединяющую точки $A(1,-1,0)$ и $B(2,1,-1)$, и расстояние между этими точками, измеренное по данной поверхности.

Решение. Зададим искомую кривую в параметрической форме $L:\{x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)\}$, $0\le t\le\alpha$, где значение α будет определено позднее. Тогда длина дуги кривой дается функционалом $l=V[x,y,z]=\int\limits_A^B dl=\int\limits_0^\alpha\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$.

Для решения задачи нужно найти экстремали функционала $V[x,y,z]=\int\limits_0^\alpha\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt$ в задаче Лагранжа с голономной связью $\varphi(x,y,z)\equiv 15x-7y+z-22=0$ и граничными условиями

$$\begin{cases} x(0)=1, & y(0)=-1, & z(0)=0 \\ x(\alpha)=2, & y(\alpha)=1, & z(\alpha)=-1 \end{cases}.$$

Составим вспомогательный функционал $\int\limits_0^\alpha\left[\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}+\lambda(t)(15x-7y+z-22)\right]dt$, система уравнений Эйлера для которого выглядит так:

$$\begin{cases} 15\lambda(t)-\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}=0 \\ -7\lambda(t)-\frac{d}{dt}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}=0 \\ \lambda(t)-\frac{d}{dt}\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}=0 \end{cases}.$$

Как и в предыдущем примере выберем в качестве t естественный параметр - длину дуги кривой, отсчитанную от точки A, тогда $\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=1$ и $\alpha=l$, а уравнения Эйлера примут вид: $\ddot{x}=15\lambda(t),\quad \ddot{y}=-7\lambda(t),\quad \ddot{z}=\lambda(t)$.

Продифференцировав дважды уравнение поверхности $15x-7y+z=22$, получим $15\ddot{x}-7\ddot{y}+\ddot{z}=0$, откуда, учитывая уравнения Эйлера, найдем $\lambda(t)=0$. Поэтому $\ddot{x}=\ddot{y}=\ddot{z}=0$, и экстремалями задачи являются прямые.

Дополнительное условие в точке $A(1,-1,0)$ и способ выбора параметра, т.е. соотношение $\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=1$, определяют искомую кривую в параметрической форме $x(t)=1+\frac{1}{\sqrt{6}}t,\quad y(t)=-1+\frac{2}{\sqrt{6}}t,\quad z(t)=-\frac{1}{\sqrt{6}}t$, а условие в точке $B(2,1,-1)$ (т.е. при $t=\alpha$) дает расстояние между точками: $l=\alpha=\sqrt{6}$.

Замечание. Результат, полученный нами средствами вариационного исчисления, был очевиден заранее из геометрических соображений, так как заданная поверхность $15x-7y+z=22$ - плоскость, следовательно, минимальное расстояние между любыми двумя точками на ней есть длина отрезка, соединяющего эти точки.

Пример 10.5. (задача Чаплыгина). Определить траекторию, по которой должен двигаться самолет с постоянной относительно воздуха скоростью $\vec{u}: |\vec{u}|=u=const$, чтобы за фиксированное время T облететь территорию максимальной площади, если скорость ветра $\vec{v}$ постоянна и $|\vec{v}|=v<u$.

Решение. Выберем систему координат так, что ось Ox направлена вдоль скорости ветра. Пусть искомая траектория задана в параметрической форме $x=x(t),\ y=y(t)$, тогда скорость самолета в этой системе координат $\vec{V}\equiv\{\dot{x}(t),\dot{y}(t)\}=\vec{u}+\vec{v}$ и имеет место соотношение $(\dot{x}-v)^2+\dot{y}^2=u^2$.

Задача состоит в нахождении кривой, реализующей минимум функционала площади $S[x,y]=\frac{1}{2}\int_0^T(x\dot{y}-y\dot{x})\,dt$ при наличии неголономной связи $(\dot{x}-v)^2+\dot{y}^2-u^2=0$. Граничные условия: $x(0)=x(T)=x_0,\quad y(0)=y(T)=y_0$, т.е. самолет вылетает из некоторой точки и в нее же возвращается (выбор начальной точки будет указан ниже).

Функционал Лагранжа $$L[x,y]=\int_0^T\left[\frac{1}{2}(x\dot{y}-y\dot{x})+\lambda(t)\left((\dot{x}-v)^2+\dot{y}^2-u^2\right)\right]dt$$

порождает систему уравнений Эйлера
$$\begin{cases}\frac{1}{2}\dot{y}-\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}y+2\lambda(t)(\dot{x}-v)\right)=0\\ -\frac{1}{2}\dot{x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}x+2\lambda(t)\dot{y}\right)=0\end{cases},$$

интегрируя которую получим
$$\begin{cases}y-2\lambda(t)(\dot{x}-v)=C_1\\ x+2\lambda(t)\dot{y}=C_2\end{cases}.$$

Сделаем сдвиг исходной системы координат, т.е. выберем начальную точку траектории (x_0,y_0) так, что $C_1=C_2=0$, тогда в новых координатах имеем
$$\begin{cases}y=2\lambda(t)(\dot{x}-v)\\ x=-2\lambda(t)\dot{y}\\ (\dot{x}-v)^2+\dot{y}^2-u^2=0\end{cases}.$$

Далее, исключая функцию $\lambda(t)$ из первого и второго уравнения, приведем систему к виду $\begin{cases} \dot{x}-v=-\dfrac{y\dot{y}}{x} \\ (\dot{x}-v)^2+\dot{y}^2-u^2=0 \end{cases}$, откуда $\dot{y}^2=\dfrac{u^2x^2}{x^2+y^2}$, $(\dot{x}-v)^2=\dfrac{u^2y^2}{x^2+y^2}$. Учитывая, что $\dfrac{\dot{x}}{\dot{y}}=\dfrac{dx}{dy}$, получим дифференциальное уравнение искомой траектории $x\dfrac{dx}{dy}+y=\pm\dfrac{v}{u}\sqrt{x^2+y^2}$, которое легко интегрируется, так как $\dfrac{x\dfrac{dx}{dy}+y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{d}{dy}\sqrt{x^2+y^2}$.

Следовательно, решение задачи дается формулой $\sqrt{x^2+y^2}=\pm\dfrac{v}{u}y+C$ и представляет собой семейство эллипсов с эксцентриситетом $\varepsilon=\dfrac{v}{u}<1$, большая ось которых перпендикулярна оси Ox, т.е. направлению ветра.

Задачи для самостоятельного решения

10.1 Найти экстремали изопериметрической задачи для функционала $V[y]=\int_a^b F(x,y,y')\,dx$ в следующих случаях:

а) $V[y]=\int_0^1 y'^2dx$, $\int_0^1 y\,dx=3$, $y(0)=1,\ y(1)=6$;

б) $V[y]=\int_0^\pi (y'^2+x^2)dx$, $\int_0^\pi y^2dx=1$, $y(0)=0,\ y(\pi)=0$;

в) $V[y]=\int_0^1 y'^2dx$, $\int_0^1 (y-y'^2)\,dx=\dfrac{1}{12}$, $y(0)=0,\ y(1)=\dfrac{1}{4}$;

г) $V[y]=\int_0^1 y'^2dx$, $\int_0^1 y\,dx=1$, $\int_0^1 xy\,dx=0$, $y(0)=0,\ y(1)=0$.

10.2 Найти экстремали задачи на условный экстремум для функционала $V[y,z]=\int_a^b F(x,y,z,y',z')\,dx$ с голономными связями в следующих случаях:

а) $V[y,z]=\int_0^1 (y'^2+z'^2)dx$, $y^2+z^2=1$,
$y(0)=1,\ y(1)=0,\ z(0)=0,\ z(1)=1$;

б) $V[y,z]=\int_0^1 (y'^2+z'^2+x^3)dx$, $y-2z+3x=0$,
$y(0)=2,\ y(1)=1,\ z(0)=1,\ z(1)=2$;

в) $V[y,z]=\int_0^1 (y'^2+z'^2+1)\,dx$, $y+z=2x^2$,
$y(0)=0,\ y(1)=2,\ z(0)=0,\ z(1)=0$;

г) $V[y,z]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(y^2+z^2-y'^2-z'^2+\cos x)\,dx$,

$$y-z=2\sin x,$$

$y(0)=1,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1,\ \ z(0)=1,\ \ z\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$.

10.3 Найти экстремали задачи на условный экстремум для функционала $V[y,z]=\int\limits_a^b F(x,y,z,y',z')\,dx$ с неголономными связями в следующих случаях:

а) $V[y,z]=\int\limits_0^1(y'^2+2z'^2+z^2)dx$, $\qquad y-z'=0$,

$y(0)=-2,\ y(1)=-\dfrac{1}{e},\ \ z(0)=1,\ \ z(1)=0$;

б) $V[y,z]=\int\limits_0^1(y'^2+z'^2)dx$, $\qquad y'-z=0$,

$y(0)=0,\ y(1)=1,\ \ z(0)=1,\ \ z(1)=0$;

в) $V[y,z]=\int\limits_0^{\pi}(y'^2-z'^2)dx$, $\qquad y'=\sin x-z$,

$y(0)=0,\ y(\pi)=0,\ \ z(0)=0,\ \ z(\pi)=\dfrac{\pi}{2}$;

г) $V[y,z]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(y^2-4x^2z^2\right)dx$, $\qquad z'=2y-4xz$, $\qquad z(0)=0,\qquad z\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$.

Ответы к задачам

10.1 а) $y(x)=3x^2+2x+1$;

б) $y_k(x)=\pm\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin kx,\quad k\in\mathbb{N}$;

в) $y(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{4}$;

г) $y(x)=60x^3-96x^2+36x$.

10.2 а) $y(x)=\cos\dfrac{\pi x}{2},\qquad z(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$;

б) $y(x)=2-x,\qquad z(x)=1+x$;

в) $y(x)=x^2+x,\qquad z(x)=x^2-x$

г) $y(x)=\cos x+\sin x,\qquad z(x)=\cos x-\sin x$.

10.3 а) $y(x)=(x-2)e^{-x},\qquad z(x)=(1-x)e^{-x}$;

б) решений нет;

в) $y(x)=\dfrac{x}{2}\sin x,\qquad z(x)=\dfrac{1}{2}(\sin x-x\cos x)$;

г) $y(x)=\cos 2x+2x\cdot\sin 2x,\qquad z(x)=\sin 2x$.