ТЕМА 2

Элементы теории линейных операторов. Обратный оператор. Вполне непрерывный оператор.

Основные определения и теоремы

Оператор A, действующий из линейного пространства L_1 в линейное пространство L_2, называется линейным, если для любых элементов y_1 и y_2 из L_1 и любых вещественных чисел α_1 и α_2 выполнено равенство $A(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A y_1 + \alpha_2 A y_2$.

Пусть $D(A)$ - область определения, а $R(A)$ - множество значений оператора A. Если оператор $A: \; y = Ax$, действующий из линейного пространства L_1 в линейное пространство L_2, взаимно однозначный, то можно ввести обратный оператор $A^{-1}: \; A^{-1}y = x$ с областью определения $D(A^{-1}) = R(A)$ и множеством значений $R(A^{-1}) = D(A) = L_1$.

Нуль-пространством оператора A называется множество $Ker\,A = \{x \in L_1 : \; Ax = \theta\}$. Очевидно, что $Ker\,A$ – линейное подпространство L_1, причем $\theta \in Ker\,A$. Если $Ker\,A \neq \{\theta\}$ (нуль-пространство нетривиально), то оператор A называется вырожденным.

Определение А. Оператор A, действующий из нормированного пространства N_1 в нормированное пространство N_2, называется непрерывным в точке $y_0 \in D(A) \subset N_1$, если для любой последовательности $y_n \in D(A)$, такой что $y_n \to y_0$, последовательность Ay_n сходится к Ay_0.

Определение Б. Оператор A, действующий из нормированного пространства N_1 в нормированное пространство N_2, называется непрерывным в точке $y_0 \in D(A) \subset N_1$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $y \in D(A)$ и удовлетворяющих неравенству $\| y - y_0 \| \le \delta$ выполняется неравенство $\| Ay - Ay_0 \| \le \varepsilon$.

Сформулированные определения А и Б эквивалентны.

Оператор A называется непрерывным на множестве $D(A)$ (на N_1), если он непрерывен в каждой точке этого множества. Линейный оператор непрерывен тогда и только тогда, если он является непрерывным в нуле.

Нормой линейного оператора A называется число $\|A\|_{N_1 \to N_2} = \sup\limits_{\|y\|_{N_1}=1} \|Ay\|_{N_2}$

Линейный оператор называется ограниченным, если существует $\sup\limits_{\|y\|_{N_1}=1} \|Ay\|_{N_2} < +\infty$.

Теорема. Линейный оператор $A: N_1 \to N_2$, является непрерывным тогда и только тогда, когда он ограничен.

Теорема. Для любого $y \in N_1$ выполнено неравенство $\|Ay\|_{N_2} \le \|A\|_{N_1 \to N_2} \cdot \|y\|_{N_1}$, где A – линейный ограниченный оператор, действующий из нормированного пространства N_1 в нормированное пространство N_2.

Линейный оператор A называется вполне непрерывным, если для любой ограниченной последовательности элементов y_n из N_1 последовательность $z_n = Ay_n$ элементов N_2 такова, что из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность (т.е. вполне непрерывный оператор преобразует любую ограниченную последовательность в компактную).

Вполне непрерывный оператор является ограниченным (следовательно, непрерывным), однако не любой непрерывный линейный оператор является вполне непрерывным.

Примеры решения задач

Пример 2.1. Докажите, что интегральный оператор Фредгольма $Ay = \int_a^b K(x,s)y(s)ds$ с непрерывным ядром является ограниченным при действии из $C[a,b]$ в $C[a,b]$ и найдите оценку сверху для нормы оператора.

Решение. Пусть $z(x) = Ay \equiv \int_a^b K(x,s)y(s)ds$, где $y(s)$ - произвольная непрерывная на $[a,b]$ функция, причем $\| y \|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} | y(x) | = 1$. Так как ядро $K(x,s)$ непрерывно на замкнутом ограниченном множестве (квадрате $[a,b]\times[a,b]$), то оно ограничено.

Обозначив $K_0 = \max_{x,s\in[a,b]} | K(x,s) |$, получим, что <u>для любого</u> $x \in [a,b]$ имеет место

$$| z(x) | = \left| \int_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds \right| \le \int_a^b | K(x,s) | \cdot | y(s) | ds \le \max_{s\in[a,b]} | y(s) | \cdot \int_a^b | K(x,s) | ds \le \| y \|_{C[a,b]} \cdot K_0 \cdot (b-a) .$$

Тогда $\| Ay \|_{C[a,b]} = \| z \|_{C[a,b]} \equiv \max_{x\in[a,b]} | z(x) | \le \underbrace{\| y \|_{C[a,b]}}_{=1} \cdot K_0 \cdot (b-a) = K_0 \cdot (b-a)$, откуда следует, что оператор Фредгольма с непрерывным ядром, действующий из $C[a,b]$ в $C[a,b]$, ограничен.

Так как доказанное выше неравенство верно для любой непрерывной функции $y(x)$: $\| y \|_{C[a,b]} = 1$, то и для нормы оператора справедлива оценка

$$\| A \| \equiv \sup_{\|y\|=1} \| Ay \| \le K_0 \cdot (b-a) .$$

Пример 2.2. Докажите, что интегральный оператор Фредгольма с непрерывным ядром является вполне непрерывным при действии из $C[a,b]$ в $C[a,b]$.

Решение. Рассмотрим произвольную ограниченную последовательность непрерывных на $[a,b]$ функций $y_n(x)$ и заметим, что для любого n имеет место оценка $\| y_n \|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} | y_n(x) | \le M$.

Пусть $z_n(x) = Ay_n \equiv \int_a^b K(x,s)y_n(s)ds$. Для решения задачи достаточно показать, что последовательность $z_n(x)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на отрезке $[a,b]$.

а) Докажем сначала равномерную ограниченность. Обозначим $K_0 = \max_{x,s\in[a,b]} | K(x,s) |$. Тогда $| z_n(x) | = \left| \int_a^b K(x,s)\, y_n(s)\, ds \right| \le \int_a^b \underbrace{| K(x,s) |}_{\le K_0} \cdot \underbrace{| y_n(s) |}_{\le M} ds \le M \cdot K_0 \cdot (b-a) = C$, что и требовалось доказать.

б) Докажем теперь равностепенную непрерывность последовательности $z_n(x)$. Возьмем произвольные точки $x_1, x_2 \in [a,b]$. Имеем

$$\left| z_n(x_1) - z_n(x_2) \right| = \left| \int_a^b [K(x_1,s) - K(x_2,s)]\ y_n(s)\ ds \right| \le \int_a^b | K(x_1,s) - K(x_2,s) | \cdot \underbrace{| y_n(s) |}_{\le M} ds .$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Функция $K(x,s)$ непрерывна по совокупности аргументов x, s на замкнутом ограниченном множестве $[a,b]\times[a,b]$ и, следовательно, равномерно непрерывна на этом множестве. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\left|K(x_1,s) - K(x_2,s)\right| \le \dfrac{\varepsilon}{M\cdot(b-a)}$ при условии $\left|x_1 - x_2\right| \le \delta$.

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что

$$\left|z_n(x_1) - z_n(x_2)\right| \le \int_a^b |K(x_1,s) - K(x_2,s)|\cdot|y_n(s)|ds \le \int_a^b \underbrace{|K(x_1,s) - K(x_2,s)|}_{\le \frac{\varepsilon}{M\cdot(b-a)}}\cdot\underbrace{|y_n(s)|}_{\le M}ds \le \varepsilon$$

для всех $n = 1,2,...$ и любых $x_1, x_2 \in [a,b]$, удовлетворяющих неравенству $\left|x_1 - x_2\right| \le \delta$, т.е. последовательность $z_n(x)$ равностепенно непрерывна.

По теореме Арцела, из последовательности непрерывных функций $z_n(x)$ можно выделить равномерно сходящуюся (к непрерывной функции!) подпоследовательность. Этим же свойством обладает и любая подпоследовательность последовательности $z_n(x)$, поэтому оператор A является вполне непрерывным при действии $C[a,b] \to C[a,b]$.

Пример 2.3. Доказать, что если линейный оператор $B:\ N_2 \to N_3$ является ограниченным, а линейный оператор $A:\ N_1 \to N_2$ вполне непрерывным, то $BA:\ N_1 \to N_3$ – вполне непрерывный оператор (N_1, N_2, N_3 – нормированные пространства).

Решение.

а) Оператор A: $N_1 \to N_2$ является вполне непрерывным, поэтому для любой ограниченной последовательности $z_n \in N_1$ соответствующая ей последовательность $Az_n \in N_2$ является компактной.

б) Докажем, что ограниченный оператор B: $N_2 \to N_3$ переводит компактную последовательность $y_n \in N_2$ в компактную $By_n \in N_3$. Так как y_n компактна, то из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся $y_{nk} \to y_0 \in N_2$. Рассмотрим последовательность $By_n \in N_3$ и любую ее подпоследовательность By_{nk}. Из соответствующей последовательности $y_{nk} \in N_2$ можно выделить подпоследовательность $y_{nm} \to y_0$. Ввиду непрерывности оператора B последовательность By_{nm} также сходится: $By_{nm} \to By_0 \in N_3$, а значит By_n является компактной.

Поэтому оператор $BA:\ N_1 \to N_3$ переводит любую ограниченную последовательность $z_n \in N_1$ в компактную $BA\,z_n \in N_3$, т.е. является вполне непрерывным.

Пример 2.4. Пусть A - линейный ограниченный оператор, действующий в нормированном пространстве. Доказать, что множество элементов пространства таких, что $Ay = \theta$, образует замкнутое линейное подпространство (нуль-пространство оператора).

Решение.

а) Рассмотрим произвольные элементы y_1 и y_2 такие, что $Ay_1 = \theta$ и $Ay_2 = \theta$. Тогда для любых α_1, α_2 выполнено $A(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 Ay_1 + \alpha_2 Ay_2 = \theta$, т.е. множество элементов $y : Ay = \theta$ - линейное пространство.

б) Докажем его замкнутость, т.е. если $Ay_n = \theta$ и $y_n \to y_0$, то $Ay_0 = \theta$.

Так как A - ограниченный линейный оператор, то

$$\| Ay_0 \| = \| (Ay_0 - Ay_n) + Ay_n \| \le \| Ay_0 - Ay_n \| + \underbrace{\| Ay_n \|}_{=0} \le \| A \| \cdot \| y_0 - y_n \| \to 0 \text{ при } n \to \infty .$$

Поэтому $\| Ay_0 \| = 0$, а значит $Ay_0 = \theta$, что и требовалось доказать.

Замечание. Так как вполне непрерывный оператор является ограниченным, то доказанное утверждение справедливо и для вполне непрерывного оператора.

Пример 2.5. Доказать, что если линейный оператор A имеет обратный, то обратный оператор A^{-1} также является линейным.

Решение. Пусть A - взаимно однозначный оператор, тогда существует обратный оператор A^{-1}. Для решения задачи достаточно проверить при любых $y_1, y_2 \in R(A)$ и любых α_1, α_2 справедливость равенства $A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2$.

Пусть $Ax_1 = y_1$, $Ax_2 = y_2$, тогда из линейности оператора A следует

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 ,$$

и по определению обратного оператора $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$.

С другой стороны, $A^{-1} y_1 = x_1$, $A^{-1} y_2 = x_2$, откуда умножая на α_1, α_2 и складывая, получим

$$\alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 .$$

Из двух последних равенств имеем $A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2$, что и требовалось доказать.

Пример 2.6. Доказать, что если оператор A линейный, то обратный оператор A^{-1} существует тогда и только тогда, когда оператор A невырожденный.

Решение.

а) Достаточность. Пусть оператор A невырожденный, т.е. $Ax = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ (нуль-пространство оператора A тривиально). Тогда для любых двух элементов $x_1 \ne x_2$ имеем $A(x_1 - x_2) \ne \theta \Rightarrow Ax_1 \ne Ax_2$, т.е. оператор A взаимно однозначный, а значит существует обратный оператор A^{-1}.

б) Необходимость. Пусть оператор A имеет обратный A^{-1}. Заметим; что A^{-1} - линейный оператор (см. пример 2.5) и докажем что A - невырожденный. Пусть это не так, т.е. существует $x \ne \theta$ такой, что $Ax = \theta$. Тогда $\theta \ne x = A^{-1}Ax = A^{-1}\underbrace{(Ax)}_{=\theta} = A^{-1}\theta = \theta$. Полученное противоречие показывает, что если $Ax = \theta$, то $x = \theta$, т.е. оператор A - невырожденный.

Пример 2.7. Пусть оператор дифференцирования $A = \dfrac{d}{dx}$ определен на подпространстве $C_0^{(1)}[0,1]$ непрерывно дифференцируемых функций $y(x)$, удовлетворяющих условию $y(0) = 0$. Доказать, что оператор A имеет обратный и найти A^{-1}.

Решение. Множеством значений оператора A является пространство $C[0,1]$. Докажем, что обратный оператор A^{-1} существует. Так как уравнение $Ay = \theta \Leftrightarrow \dfrac{d}{dx} y(x) \equiv 0,\ y(0) = 0$ имеет единственное решение $y(x) \equiv 0 = \theta$, т.е. нуль-пространство оператора A тривиально, то оператор A невырожденный, и обратный оператор A^{-1} существует.

Чтобы найти A^{-1}, нужно для любой функции $z(x) \in C[0,1]$ решить уравнение $Ay = z \quad (y(x) \in C_0^{(1)}[0,1])$, или $\frac{d}{dx} y(x) = z(x), \quad y(0) = 0$. Решением указанной задачи Коши является $y(x) = \int\limits_0^x z(s)\, ds$, т.е. $A^{-1} z = \int\limits_0^x z(s)\, ds$.

Замечание. Если рассматривать оператор дифференцирования $A = \frac{d}{dx}$, действующим $C^{(1)}[0,1] \to C[0,1]$, то он является вырожденным, так как нуль-пространство в этом случае нетривиально и состоит из функций $y(x) = c$. Поэтому обратный оператор не существует. Вспомните, что первообразная непрерывной функции определяется с точностью до постоянной (элемент из $Ker\, A$ (нуль-пространства) оператора $A = \frac{d}{dx}$), т.е. отображение $C^{(1)}[0,1] \to C[0,1]$, осуществляемое оператором дифференцирования, не является взаимно однозначным.

Пример 2.8. Доказать, что если оператор A, действующий в бесконечномерном нормированном пространстве, является вполне непрерывным, то обратный оператор неограничен.

Решение. Предположим, что обратный оператор A^{-1} является ограниченным. Так как A - вполне непрерывный оператор, а по предположению, оператор A^{-1} является ограниченным, то оператор $A^{-1}A$ является вполне непрерывным (см. пример 2.3), что неверно, так тождественный оператор $A^{-1}A = I$ не является вполне непрерывным (см. курс лекций). Полученное противоречие доказывает, что A^{-1} - неограничен.

Пример 2.9. Рассмотрим оператор Вольтерра $By = \int\limits_0^x y(s)\, ds \quad (x \in [0,1])$, действующий в пространстве $C[0,1]$.

а) Доказать, что B является ограниченным.

б) Доказать, что B имеет обратный оператор, который определен на некотором подпространстве и неограничен.

в) Построить оператор $(I - B)^{-1}$.

Решение.

а) Очевидно, что оператор B является линейным и определен на всем пространстве $C[0,1]$. Рассмотрим множество $\| y \| = \max\limits_{x \in [0,1]} | y(x) | = 1$. На этом множестве имеем $\| By \|_{C[0,1]} = \max\limits_{x \in [0,1]} | \int\limits_0^x y(s)\, ds | \le \max\limits_{x \in [0,1]} \int\limits_0^x | y(s) | ds \le 1$, что и доказывает ограниченность рассматриваемого оператора.

б) Оператор B отображает все пространство $C[0,1]$ на линейное подпространство непрерывно дифференцируемых функций $z(x) = By = \int\limits_0^x y(s)\, ds$, удовлетворяющих условию $z(0) = 0$. Так как из равенства $\int\limits_0^x y(s)\, ds = 0$ (верного для всех $x \in [0,1]$) вытекает, что

$y(x) \equiv 0$, то $By = \theta \Leftrightarrow y = \theta$, т.е. нуль-пространство оператора B содержит только нулевой элемент. Следовательно, оператор B - невырожденный, и имеет обратный, который определен на указанном выше подпространстве. Обозначим $D(A^{-1})$ - область определения оператора A^{-1}.

Легко видеть, что $B^{-1} = \dfrac{d}{dx}$, так как $BB^{-1}y = \int\limits_0^x y'(s)\,ds = y(x) - y(0) = y(x)$ и $B^{-1}By = \dfrac{d}{dx}\int\limits_0^x y(s)\,ds = y(x)$.

Докажем, что обратный оператор неограничен. Рассмотрим последовательность $y_n \in D(A^{-1}) \subset C[0,1]$: $y_n(x) = \sin 2\pi nx$, $(y_n(0) = 0!!!)$, $\| y_n \|_{C[0,1]} = 1$, $n = 1,2,3...$. Тогда $\| B^{-1}y_n \|_{C[0,1]} = \max\limits_{x\in[0,1]}\left|\dfrac{d}{dx}\sin 2\pi nx\right| = 2\pi n \to \infty$, т.е. $\sup\limits_{y\in D(A^{-1}),\, \|y\|=1} \| B^{-1}y \|$ не существует, и оператор B^{-1} является неограниченным.

Замечание 1. Действуя аналогично примеру 2.2, можно показать, что рассматриваемый в данном примере оператор Вольтерра является вполне непрерывным, следовательно, обратный оператор неограничен (пример 2.8).

в) Чтобы построить оператор $(I-B)^{-1}$, нужно для произвольной непрерывной функции $z(x)$ решить уравнение $y(x) - \int\limits_0^x y(s)ds = z(x)$. Заметим сразу, что $y(0) = z(0)$.

Так как $z(x)$ может не быть дифференцируемой, то ищем решение в виде $y(x) = z(x) + w(x)$, где $w(x)$ - новая неизвестная функция, для которой имеем $w(x) = \int\limits_0^x z(s)ds + \int\limits_0^x w(s)ds,\quad w(0) = 0$. Очевидно, что $w(x)$ дифференцируема; для ее определения получаем задачу Коши $w'(x) = w(x) + z(x),\quad w(0) = 0$, решение которой имеет вид $w(x) = e^x\int\limits_0^x z(s)\,e^{-s}ds$. Поэтому $y(x) = z(x) + e^x\int\limits_0^x z(s)\,e^{-s}ds$, и обратный оператор $(I-B)^{-1}$ определяется формулой $(I-B)^{-1}z = z(x) + \int\limits_0^x z(s)\,e^{x-s}ds$.

Замечание 2. Рассмотрим оператор $B^2 y = \int\limits_0^x dt\int\limits_0^t y(s)\,ds = \int\limits_0^x y(s)ds\int\limits_s^x dt = \int\limits_0^x (x-s)\,y(s)ds$. Легко показать, например, методом математической индукции, что

$$B^{n+1}y = BB^n y = \int\limits_0^x dt\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,y(s)\,ds = \int\limits_0^x y(s)\,ds\int\limits_s^x \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}dt = \int\limits_0^x \frac{(x-s)^n}{n!}y(s)\,ds.$$

Далее, разложив функцию e^{x-s} в ряд $e^{x-s} = \sum\limits_0^\infty \dfrac{(x-s)^n}{n!}$, будем иметь $(I-B)^{-1}z = z(x) + \int\limits_0^x \sum\limits_0^\infty \dfrac{(x-s)^n}{n!}\,z(s)\,ds = z + \sum\limits_0^\infty B^{n+1}z$. Таким образом, мы получили представление оператора $(I-B)^{-1}$ в виде ряда Неймана $(I-B)^{-1} = I + \sum\limits_1^\infty B^n$.

Пример 2.10. Доказать, что оператор дифференцирования $A = \dfrac{d}{dx}$

а) не является вполне непрерывным при действии $C^{(1)}[0,1] \to C[0,1]$;

б) является вполне непрерывным при действии $C^{(2)}[0,1] \to C[0,1]$.

Решение.

а) Рассмотрим в пространстве $C^{(1)}[0,1]$ последовательность $y_n = \dfrac{1}{2^n}\cos 2^n \pi x$, *n=1,2,3,…*.

Эта последовательность ограничена в $C^{(1)}[0,1]$, так как для любого номера n имеем $\| y_n \|_{C^{(1)}[0,1]} = \max\limits_{x\in[0,1]} | y_n(x) | + \max\limits_{x\in[0,1]} | y_n'(x) | = \dfrac{1}{2^n} + 1 < 2$. Однако последовательность образов ее элементов, получаемая при действии оператора дифференцирования $Ay_n = \pi \sin 2^n \pi x$, $n = 1,2,3,...$ некомпактна в пространстве $C[0,1]$ (см. пример 1.7). Поэтому оператор дифференцирования не является вполне непрерывным при действии $C^{(1)}[0,1] \to C[0,1]$.

а) Пусть y_n - произвольная ограниченная последовательность в пространстве $C^{(2)}[0,1]$, т.е. существует $M > 0$ такая, что $\| y_n \|_{C^{(2)}[0,1]} = \max\limits_{x\in[0,1]} | y_n(x) | + \max\limits_{x\in[0,1]} | y_n'(x) | + \max\limits_{x\in[0,1]} | y_n''(x) | \le M$ для любого номера n. Заметим, что отсюда сразу вытекают два неравенства: $\max\limits_{x\in[0,1]} | y_n'(x) | \le M$ и $\max\limits_{x\in[0,1]} | y_n''(x) | \le M$.

Рассмотрим последовательность $z_n(x) = Ay_n = \dfrac{d}{dx} y_n(x)$. Все функции $z_n(x)$ непрерывны, причем, ввиду сделанного замечания, последовательность $z_n(x) = y_n'(x)$ равномерно ограничена.

Докажем, что последовательность $z_n(x)$ равностепенно непрерывна. Действительно, так как $\max\limits_{x\in[0,1]} | y_n''(x) | \le M$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, что $0 < \delta \le \dfrac{\varepsilon}{M}$. Поэтому при всех $x_1, x_2 \in [0,1]$, $|x_1 - x_2| \le \delta$ имеет место неравенство $|y_n'(x_1) - y_n'(x_2)| = | y_n''(x) | \cdot | x_1 - x_2 | \le M\delta \le \varepsilon$.

Далее, применяя теорему Арцела, получаем, что последовательность $z_n = Ay_n$ компактна в $C[0,1]$, а оператор дифференцирования $A = \dfrac{d}{dx}$ является вполне непрерывным при действии $C^{(2)}[0,1] \to C[0,1]$.

Задачи для самостоятельного решения

2.1 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма отображает линейное пространство $h[a,b]$ в себя и является линейным оператором.

2.2 Доказать, что интегральный оператор Вольтерра отображает линейное пространство $h[a,b]$ в себя и является линейным оператором.

2.3 Доказать, что линейный оператор, действующий в нормированных пространствах, непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен в нуле.

2.4 Доказать, что линейный оператор, действующий в нормированных пространствах, непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.

2.5 Доказать, что нелинейный интегральный оператор $Ay = \int\limits_0^1 e^{xs} y^2(s)\,ds$, действующий $C[0,1] \to C[0,1]$, является непрерывным и $\sup\limits_{\|y\|=1} \| Ay \| < +\infty$.

Замечание: результат предыдущей задачи в данном случае, вообще говоря, неприменим, так как оператор не является линейным.

2.6 Доказать эквивалентность двух определений непрерывности в точке оператора, действующего в нормированных пространствах.

2.7 Доказать, что линейный оператор ограничен тогда и только тогда, если существует постоянная $C > 0$, что для любого элемента y выполнено неравенство $\| Ay \| \le C \| y \|$.

2.8 Доказать, что оператор дифференцирования, действующий из $C^{(1)}[a,b]$ в $C[a,b]$, является ограниченным.

2.9 Доказать, что оператор дифференцирования, определенный на подпространстве непрерывно дифференцируемых функций пространства $C[a,b]$ и действующий из $C[a,b]$ в $C[a,b]$, не является ограниченным.

2.10 Доказать, что если A - линейный ограниченный оператор, действующий A: $N_1 \to N_2$, где N_1 и N_2 – нормированные пространства, причем $Ay \neq 0$, то $\| A \| > 0$.

2.11 а) Доказать, что линейный оператор A имеет ограниченный обратный тогда и только тогда, если существует число $m > 0$ такое, что для всех $y \in D(A)$ выполнено $\| Ay \| \ge m \| y \|$.

б) Доказать, что в этом случае норма обратного оператора равна $\| A^{-1} \| = \dfrac{1}{M}$, где M - максимальное из возможных значений m, найденных в п. а).

2.12 Доказать, что если линейный оператор B: $N_2 \to N_3$ является вполне непрерывным, а линейный оператор A: $N_1 \to N_2$ ограниченный, то BA: $N_1 \to N_3$ - вполне непрерывный оператор (N_1, N_2, N_3 – нормированные пространства). Сравнить с результатом примера 2.3.

2.13 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий из $h[a,b]$ в $C[a,b]$, является вполне непрерывным оператором.

2.14 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий из $h[a,b]$ в $h[a,b]$, является вполне непрерывным оператором.

2.15 Доказать, что интегральный оператор Вольтерра $By = \int\limits_a^x K(x,s)\, y(s)\,ds$ является вполне непрерывным при действии $C[a,b] \to C[a,b]$.

2.16 Доказать, что оператор умножения на независимую переменную x: $Ay = x \cdot y(x)$, действующий $C[a,b] \to C[a,b]$, не является вполне непрерывным.

2.17 Доказать, что единичный оператор, действующий в пространстве $C[a,b]$, не является вполне непрерывным.

2.18 Доказать, что интегральный оператор $Ay = \int\limits_0^1 \dfrac{y(s)}{\sqrt{(x-s)^2}}\,ds$ не является вполне непрерывным при действии $C[0,1] \to C[0,1]$.

2.19 Доказать, что дифференциальный оператор $Ay = \dfrac{d}{dx} y(x) + 4y(x)$, действующий $C_0^{(1)}[0,1] \to C[0,1]$ ($C_0^{(1)}[0,1]$ - подпространство непрерывно дифференцируемых на [0,1] функций, удовлетворяющих условию $y(0) = 0$, с нормой пространства $C^{(1)}[0,1]$), имеет ограниченный обратный, и найти его.

Ответ: $A^{-1}y = \int\limits_0^x e^{-4(x-s)} y(s)\,ds$.