ТЕМА 4

Принцип сжимающих отображений. Метод последовательных приближений для уравнения Фредгольма 2-рода с "малым" λ.

Основные определения и теоремы

Пусть D – оператор, вообще говоря, нелинейный, действующий $D:\ B \to B$, где B - банахово (полное нормированное) пространство.

Оператор D называется сжимающим (или сжимающим отображением), если существует константа q: $0 \le q < 1$, такая, что для любых $y_1, y_2 \in B$ имеет место неравенство $\| Dy_1 - Dy_2 \| \le q \| y_1 - y_2 \|$.

Элемент y называется неподвижной точкой оператора D, если $Dy = y$.

Теорема (о неподвижной точке). Пусть D – сжимающий оператор. Тогда существует, и притом единственная, точка $y \in B$ такая, что $Dy = y$. Эта точка может быть найдена методом последовательных приближений: $y_{n+1} = Dy_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где $y_0 \in B$ - произвольная фиксированная точка из B (начальное приближение), причем $y_n \to y : Dy = y$.

Теорема. Пусть D - оператор, отображающий банахово пространство В в себя, и пусть существует натуральное число k такое, что D^k - сжимающий оператор. Тогда оператор D имеет единственную неподвижную точку (т.е. такую, что $Dy = y$), причем y может быть найдено методом последовательных приближений: для любого $y_0 \in B$ $y_{n+1} = D\, y_n$, $n = 0,1,\ldots$, $y_n \to y$.

Рассмотрим интегральный оператор Фредгольма $A:\ C[a,b] \to C[a,b]$: $Ay \equiv \int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds$, где ядро $K(x,s)$ непрерывно по совокупности переменных x, s, но, вообще говоря, не симметрическое. Обозначим: $\max\limits_{x,s\in[a,b]} |K(x,s)| = K_0$, тогда при $|\lambda| < \dfrac{1}{K_0\,(b-a)}$ оператор λA является сжимающим. Заметим, что $C[a,b]$ - банахово, т.е. полное нормированное пространство.

Теорема. Если $|\lambda| < \dfrac{1}{K_0\,(b-a)}$ (такие λ будем называть «малыми»), то неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода $y(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds + f(x)$ имеет единственное решение для любой непрерывной функции $f(x) \in C[a,b]$, причем решение может быть найдено методом последовательных приближений.

Следствие 1. При $|\lambda| < \dfrac{1}{K_0\,(b-a)}$ однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

Следствие 2. Если у оператора Фредгольма есть характеристические числа, то $|\lambda_{\min}| \ge \dfrac{1}{K_0\,(b-a)}$.

Если записать уравнение Фредгольма 2-го рода в операторной форме $y = \lambda Ay + f$ или $(I - \lambda A)y = f$, то в случае, когда решение существует и единственно, его (решение) можно представить в виде $y = (I - \lambda A)^{-1} f = (I + \lambda R_\lambda) f = f + \lambda R_\lambda f$, где R_λ - интегральный оператор с непрерывным по x, s ядром $R(x,s,\lambda)$, т.е. $y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda) f(s) ds$.

Ядро $R(x,s,\lambda)$ оператора R_λ называется <u>резольвентой</u>.

Функции $K_1(x,s) \equiv K(x,s)$, $K_n(x,s) = \int_a^b K(x,t) K_{n-1}(t,s)\,dt$, $n = 2, 3, \ldots$ называются <u>повторными (итерированными)</u> ядрами. Так как при "малых" λ ($|\lambda| < \dfrac{1}{K_0 (b-a)}$) ряд $\underbrace{K_1(x,s)}_{=K(x,s)} + \lambda K_2(x,s) + \ldots + \lambda^{n-1} K_n(x,s) + \ldots$ сходится равномерно по $x, s \in [a,b]$, то резольвента $R(x,s,\lambda)$ может быть найдена по формуле $R(x,s,\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,s)$.

В случае "малых" λ для оператора R_λ имеет место представление $R_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} A^n$ - ряд Неймана.

Примеры решения задач

Пример 4.1. Доказать, что сжимающий оператор является непрерывным.

Решение. Напомним определение сжимающего оператора. Оператор A, действующий в банаховом пространстве B называется сжимающим, если $\exists\, q$**:** $0 \le q < 1$ такое, что $\forall\ y_1, y_2 \in B$: $\|Ay_1 - Ay_2\| \le q \cdot \|y_1 - y_2\|$.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и пусть $0 < \delta \le \varepsilon$, тогда для любых элементов y, y_0 таких, что $\|y - y_0\| \le \delta$, учитывая $0 \le q < 1$, имеем: $\|Ay - Ay_0\| \le q \cdot \|y - y_0\| < \|y - y_0\| \le \delta \le \varepsilon$. Таким образом, оператор является непрерывным, что и требовалось доказать.

Пример 4.2. Пусть оператор A, действующий в банаховом пространстве B, обладает свойством, что $P = A^n$ является сжимающим оператором.
Доказать, что уравнение $y = Ay$ имеет единственное решение.

Решение. Так как P - сжимающий, то существует единственная неподвижная точка y: $y = Py$ этого оператора, которая может быть найдена методом последовательных приближений, т.е. для указанного y справедливы следующие утверждения:

а) для $\forall\ y_0 \in B$ последовательность $P^k y_0 \xrightarrow[k\to\infty]{} y$ (неподвижной точке оператора P);

б) $Py = y \Rightarrow P(Py) = Py = y \Rightarrow \ldots\ldots \Rightarrow P^k y = y$ для любого *k=1,2,3…* .

Рассмотрим $Ay = A\underbrace{P^k y}_{=y} = A A^{nk} y = A^{nk} Ay = P^k Ay$. Обозначив $Ay \equiv y_0$ и продолжая предыдущее равенство, с учетом а) получим $Ay = P^k Ay = P^k y_0 \xrightarrow[\text{см. а)}]{k\to\infty} y$, откуда следует, что $y = Ay$, т.е. неподвижная точка оператора P является также и неподвижной точкой оператора A.

Для доказательства единственности неподвижной точки оператора A предположим противное, т.е. пусть существуют две точки $\tilde{y} \neq \overline{y}$ такие что $A\tilde{y} = \tilde{y}$ и $A\overline{y} = \overline{y}$, тогда $A^n \tilde{y} \equiv P\tilde{y} = \tilde{y}$ и $A^n \overline{y} \equiv P\overline{y} = \overline{y}$, откуда следует, что $\tilde{y} = \overline{y}$ в силу единственности неподвижной точки оператора P.

Пример 4.3. Пусть в банаховом пространстве B заданы два сжимающих оператора A и D, т.е. для любых элементов $x, y \in B$ имеют место соотношения $\| Ax - Ay \| \le \alpha_A \cdot \| x - y \|, \quad 0 \le \alpha_A < 1$ и $\| Dx - Dy \| \le \alpha_D \cdot \| x - y \|, \quad 0 \le \alpha_D < 1$.

Зададим некоторое число $\varepsilon > 0$. Назовем операторы A и D ε-близкими, если для $\forall z \in B$ выполнено $\| Az - Dz \| \le \varepsilon$.

Доказать, что неподвижные точки x^* и y^* этих операторов находятся на расстоянии $\rho(x^*, y^*) \equiv \| x^* - y^* \| \le \dfrac{\varepsilon}{1-\alpha}$, где $\alpha = \max\{\alpha_A, \alpha_D\} < 1$.

Решение. Пусть x^*- неподвижная точка оператора A, т.е. $x^* = Ax^*$, а y^* - неподвижная точка оператора D: $y^* = Dy^*$.

Возьмем x^* в качестве начального приближения итерационного процесса для определения y^*, т.е. $y_0 = x^*$, $y_1 = Dy_0 \equiv Dx^*, \ldots,$ $y_k = D^k x^*$; $y^* = \lim\limits_{k\to\infty} D^k x^*$. Тогда

$$\| x^* - y_k \| \le \| x^* - y_1 \| + \| y_1 - y_2 \| + \ldots + \| y_{k-1} - y_k \| \le \| x^* - y_1 \| \cdot (1 + \alpha_D + \alpha_D^2 + \ldots + \alpha_D^{k-1}) \le \frac{\| x^* - Dx^* \|}{1-\alpha_D}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим $\| x^* - y^* \| \le \dfrac{\| x^* - Dx^* \|}{1-\alpha_D} = \dfrac{\| Ax^* - Dx^* \|}{1-\alpha_D} \le \dfrac{\| Ax^* - Dx^* \|}{1-\alpha} \le \dfrac{\varepsilon}{1-\alpha}$, что и требовалось доказать.

Пример 4.4. Привести пример оператора, переводящего банахово пространство B в себя, удовлетворяющего условию $\| Ay - Az \|_B < \| y - z \|_B$ для любых $y, z \in B$, и не имеющего неподвижной точки.

Решение. Рассмотрим следующий оператор в пространстве R^1 : $Ax = x + \dfrac{\pi}{2} - arctg\, x$. Для любых $y, z \in B$, применяя формулу Лагранжа (ξ между y и z), получим $\| Ay - Az \|_{R^1} = | y - arctg\, y - (z - arctg\, z) | = | 1 - \dfrac{1}{1+\xi^2} | \cdot | y - z | < | y - z | \equiv \| y - z \|_{R^1}$. Однако, для всех y имеет место неравенство $Ay = y + \dfrac{\pi}{2} - arctg\, y > y$, что и означает отсутствие неподвижной точки рассматриваемого оператора.

Замечание. Указанный оператор не удовлетворяет теореме о неподвижной точке!!!

Пример 4.5. При каких λ оператор Фредгольма $Ay = \lambda\int\limits_0^1 (x-s)\,y(s)\,ds$ является сжимающим

а) при действии $C[0,1] \to C[0,1]$;

б) при действии $h[0,1] \to h[0,1]$.

Решение.

а) Рассмотрим две произвольные непрерывные функции $y(x),\ z(x) \in C[0,1]$, тогда

$$\| Ay - Az \|_{C[0,1]} = |\lambda| \cdot \max_{x\in[0,1]} \left| \int\limits_0^1 (x-s)[y(s)-z(s)]\,ds \right| \le |\lambda| \cdot \max_{s\in[0,1]} |y(s)-z(s)| \cdot \max_{x,s\in[0,1]} |x-s| =$$

$= |\lambda| \cdot \| y - z \|_{C[0,1]}$, т.е. оператор A: $C[0,1] \to C[0,1]$ является сжимающим при $|\lambda| < 1$.

б) Рассмотрим две произвольные непрерывные функции $y(x),\ z(x) \in h[0,1]$, тогда

$$\| Ay - Az \|^2_{h[0,1]} = \lambda^2 \cdot \int\limits_0^1 dx \left[\int\limits_0^1 (x-s)\cdot[y(s)-z(s)]\,ds \right]^2 \le \quad \text{(неравенство Коши-Буняковского)}$$

$$\le \lambda^2 \cdot \int\limits_0^1 \{\int\limits_0^1 (x-s)^2\,ds \cdot \underbrace{\int\limits_0^1 [y(s)-z(s)]^2 ds\}}_{=\|y-z\|^2_{h[0,1]}}\, dx = \lambda^2 \cdot \| y - z \|^2_{h[0,1]} \cdot \int\limits_0^1\int\limits_0^1 (x-s)^2\,ds\,dx = \lambda^2 \cdot \| y - z \|^2_{h[0,1]} \cdot \frac{1}{6},$$

следовательно, оператор A: $h[0,1] \to h[0,1]$ является сжимающим при условии $|\lambda| < \sqrt{6}$.

Пример 4.6. При каких λ оператор Вольтерра $By = \lambda\int\limits_0^x (x-s)\,y(s)\,ds$ является сжимающим

а) при действии $C[0,1] \to C[0,1]$;

б) при действии $h[0,1] \to h[0,1]$.

Решение.

а) Рассмотрим любые две непрерывные функции $y(x),\ z(x) \in C[0,1]$, тогда

$$\| Ay - Az \|_{C[0,1]} = |\lambda| \cdot \max_{x\in[0,1]} \left| \int\limits_0^x \underbrace{(x-s)}_{\ge 0}[y(s)-z(s)]\,ds \right| \le |\lambda| \cdot \max_{s\in[0,1]} |y(s)-z(s)| \cdot \max_{x\in[0,1]} \int\limits_0^x (x-s)\,ds =$$

$= \dfrac{|\lambda|}{2} \cdot \| y - z \|_{C[0,1]}$, т.е. оператор B: $C[0,1] \to C[0,1]$ является сжимающим при $|\lambda| < 2$.

б) Рассмотрим две произвольные непрерывные функции $y(x),\ z(x) \in h[0,1]$, тогда

$$\| Ay - Az \|^2_{h[0,1]} = \lambda^2 \cdot \int\limits_0^1 dx \left[\int\limits_0^x (x-s)\cdot[y(s)-z(s)]\,ds \right]^2 \le \quad \text{(неравенство Коши-Буняковского)}$$

$$\le \lambda^2 \cdot \int\limits_0^1 [\int\limits_0^x (x-s)^2\,ds \cdot \underbrace{\int\limits_0^x [y(s)-z(s)]^2 ds]}_{\le\|y-z\|^2_{h[0,1]}}\, dx = \lambda^2 \cdot \| y - z \|^2_{h[0,1]} \cdot \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x (x-s)^2\,ds = \frac{\lambda^2}{12} \cdot \| y - z \|^2_{h[0,1]},$$

следовательно, оператор B: $h[0,1] \to h[0,1]$ будет сжимающим при $|\lambda| < \sqrt{12}$.

Пример 4.7. Считая параметр λ "малым", методом последовательных приближений построить резольвенту и получить решение уравнения Фредгольма $y(x) = \lambda \int\limits_0^{\pi} \sin(x+s)\, y(s)\, ds + \cos x$. Сформулировать критерий "малого" λ.

Замечание. Приведенный ниже способ построения резольвенты служит иллюстрацией к доказанной в курсе лекций теореме о возможности представления резольвенты $R(x,s,\lambda)$ в виде ряда $R(x,s,\lambda) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,s)$ при "малых" λ. Так как ядро оператора Фредгольма в данной задаче является вырожденным, то решение уравнения может быть получено более эффективно методами, рассмотренными в примерах 6.1-6.2 (тема 6). Для построения резольвенты также могут быть использованы и другие приемы (сравните с результатом примера 6.3!!!).

Решение. Начнем с построения резольвенты $R(x,s,\lambda)$, выписав итерированные ядра:

$K_1(x,s) \equiv K(x,s) = \sin(x+s)$,

$$K_2(x,s) = \int\limits_0^{\pi} K(x,t) K_1(t,s)\, dt = \int\limits_0^{\pi} \sin(x+t)\, \sin(t+s)\, dt = \frac{\pi}{2} \cdot \cos(x-s),$$

$$K_3(x,s) = \int\limits_0^{\pi} K(x,t) K_2(t,s)\, dt = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^{\pi} \sin(x+t)\, \cos(t-s)\, dt = \frac{\pi^2}{4} \cdot \sin(x+s),$$

………………

$$K_{2m}(x,s) = \int\limits_0^{\pi} K(x,t) K_{2m-1}(t,s)\, dt = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m-1} \cdot \cos(x-s), \quad m = 1,2,3\ldots,$$

$$K_{2m+1}(x,s) = \int\limits_0^{\pi} K(x,t) K_{2m}(t,s)\, dt = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m} \cdot \sin(x+s), \quad m = 1,2,3\ldots .$$

Используя формулу для резольвенты $R(x,s,\lambda) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x,s)$ и суммируя ряд отдельно по четным и нечетным номерам, найдем $R(x,s,\lambda) = \dfrac{\sin(x+s) + \dfrac{\pi\lambda}{2} \cos(x-s)}{1 - \left(\dfrac{\pi\lambda}{2}\right)^2}$.

Критерий "малого" λ в данном случае совпадает с условием сходимости ряда Неймана $|\lambda| < \dfrac{2}{\pi}$, и как легко видеть, выполняется на более широком множестве значений λ, чем достаточное условие, сформулированное в теореме о разрешимости уравнения Фредгольма 2-го рода: $|\lambda| < \dfrac{1}{K_0\,(b-a)} = \dfrac{1}{\pi}$.

Далее, так как решение представимо в виде $y(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b R(x,s,\lambda)\, f(s)\, ds$, то полагая $f(x) = \cos x$, получим

$$y(x) = \cos x + \lambda \int\limits_0^{\pi} R(x,s,\lambda) \cos s\, ds = \cos x + \frac{\dfrac{\lambda\pi}{2} \cdot \sin x + \left(\dfrac{\pi\lambda}{2}\right)^2 \cdot \cos x}{1 - \left(\dfrac{\pi\lambda}{2}\right)^2} = \frac{\cos x + \dfrac{\lambda\pi}{2} \cdot \sin x}{1 - \left(\dfrac{\pi\lambda}{2}\right)^2}.$$

Тот же результат дает и непосредственное применение метода последовательных приближений. Положим $y_0 \equiv 0$, $y_{n+1} = \lambda A y_n + f$, $n = 0,1,2,...$, тогда

$$y_1 = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+s) \cdot 0 \cdot ds + \cos x = \cos x\,;$$

$$y_2 = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+s) \cos s\, ds + \cos x = \lambda \frac{\pi}{2} \sin x + \cos x\,;$$

$$y_3 = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+s)[\lambda \frac{\pi}{2} \sin s + \cos s]\, ds + \cos x = \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 \cos x + \lambda \frac{\pi}{2} \sin x + \cos x\,;$$

………………

$$y_{2n+1} = \cos x \left[1 + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^{2n}\right] + \sin x \cdot \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) \cdot \left[1 + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^{2n-2}\right];$$

$$y_{2n+2} = \cos x \left[1 + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^{2n}\right] + \sin x \cdot \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) \cdot \left[1 + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^{2n}\right].$$

Легко видеть, что если $|\lambda| < \dfrac{2}{\pi}$, то при $n \to \infty$ обе подпоследовательности сходятся к одной и той же функции $y(x) = \dfrac{\cos x + \dfrac{\lambda\pi}{2} \cdot \sin x}{1 - \left(\dfrac{\pi\lambda}{2}\right)^2}$, которая уже была получена выше в качестве решения задачи другим способом.

Пример 4.8. Методом последовательных приближений решить уравнение Фредгольма $y(x) = \lambda \int_0^1 y(s)\, ds + 1$. Показать, что ряд Неймана сходится лишь в области $|\lambda| < 1$, однако решение, полученное при этом условии, существует при всех $\lambda \neq 1$.

Решение. Решение уравнения Фредгольма $y = \lambda A y + f$ может быть записано в виде ряда Неймана $y(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n A^n f(x)$.

В нашем случае $Af(x) = \int_0^1 f(x)\, dx$, $f(x) = 1$, поэтому $Af(x) = \int_0^1 1 \cdot dx = 1$ и, аналогично, $A^n f(x) = 1$ $(n = 2,3,...)$. Следовательно, при условии $|\lambda| < 1$, ряд Неймана $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n A^n f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$ сходится, и решением уравнения является функция $y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n = \dfrac{1}{1-\lambda}$, однако если $|\lambda| \geq 1$, то ряд расходится, и справедливость полученной формулы оказывается под сомнением.

С другой стороны, обозначив $\int_0^1 y(s)\,ds = C$, будем иметь $y(x) = \lambda C + 1$, откуда $C = \int_0^1 (\lambda C + 1)\,ds = \lambda C + 1$. Поэтому, при $\lambda = 1$ уравнение неразрешимо, а для остальных $\lambda \neq 1$ находим $C = \dfrac{1}{1-\lambda}$ и $y(x) = 1 + \lambda C = 1 + \dfrac{\lambda}{1-\lambda} = \dfrac{1}{1-\lambda}$.

Итак, решение задачи существует при всех $\lambda \neq 1$ и дается формулой $y(x) = \dfrac{1}{1-\lambda}$, что совпадает с выражением, полученным ранее лишь на множестве $|\lambda| < 1$. Заметим, что при условии $|\lambda| > 1$ решение также существует, несмотря на то, что ряд Неймана расходится.

Задачи для самостоятельного решения

4.1 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма с вещественным непрерывным ядром, действующий в пространстве $C[a,b]$, не имеет характеристических чисел на интервале $\lambda \in \left(0,\ \dfrac{1}{K_0(b-a)}\right)$, где $K_0 = \max\limits_{x,s\in[a,b]} |K(x,s)|$.

4.2 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма с вещественным непрерывным ядром, действующий в пространстве $h[a,b]$, не имеет характеристических чисел на интервале $\lambda \in \left(0,\ \dfrac{1}{K_0(b-a)}\right)$, где $K_0 = \max\limits_{x,s\in[a,b]} |K(x,s)|$.

4.3 Доказать, что задача решения уравнения Фредгольма 2-рода $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds + f(x)$ с вещественным непрерывным ядром корректно поставлена при условии $|\lambda| < \dfrac{1}{K_0(b-a)}$, где $K_0 = \max\limits_{x,s\in[a,b]} |K(x,s)|$

а) в пространстве $C[a,b]$;

б) в пространстве $h[a,b]$.

4.4 Доказать, что оператор Фредгольма $y(x) = \dfrac{1}{2}\int_0^1 x s^2\, y(s)\,ds + 1$ является сжимающим в пространстве $C[0,1]$, и найти его неподвижную точку.

4.5 Методом последовательных приближений построить резольвенту и получить решение уравнения Фредгольма 2-го рода:

а) $y(x) = \lambda \int_0^1 x s\ y(s)\,ds + x$;

б) $y(x) = \lambda \int_0^1 \dfrac{x}{1+s^2}\ y(s)\,ds + 1 + x^2$;

в) $y(x) = \lambda \int_0^1 y(s)\,ds + \sin \pi x$;

г) $y(x)=\lambda\int\limits_0^{\pi} x\sin 2s\, y(s)\,ds+\cos 2x$;

д) $y(x)=\lambda\int\limits_0^{2\pi} \sin(x+s)\, y(s)\,ds+2$;

е) $y(x)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot\cos s\;\; y(s)\,ds+1 \qquad (\lambda=1)$;

ж) $y(x)=\dfrac{1}{2}\int\limits_0^{1} x\,e^{s}\cdot y(s)\,ds+e^{-x} \qquad (\lambda=\dfrac{1}{2})$;

з) $y(x)=\int\limits_0^{\frac{1}{2}} y(s)\,ds+x \qquad (\lambda=1)$.

В случаях а) - д) сформулировать критерий "малого" λ ; в примерах е) - з) проверить выполнение соответствующего условия.

Ответы к задачам

4.4 $y=\dfrac{4}{21}x+1$.

4.5 а) Резольвента $R(x,s,\lambda)=\dfrac{3xs}{3-\lambda}$, решение $y(x)=\dfrac{3x}{3-\lambda}$; условие сходимости последовательных приближений $|\lambda|<3$, достаточное условие теоремы выполнено при $|\lambda|<1$.

б) Резольвента $R(x,s,\lambda)=\dfrac{1}{1-\lambda\dfrac{\ln 2}{2}}\cdot\dfrac{x}{1+s^2}$, решение $y(x)=1+\dfrac{\lambda x}{1-\lambda\dfrac{\ln 2}{2}}+x^2$;

условие сходимости последовательных приближений $|\lambda|<\dfrac{2}{\ln 2}$, достаточное условие теоремы выполнено лишь при $|\lambda|<1$.

в) Резольвента $R(x,s,\lambda)=\dfrac{1}{1-\lambda}$, решение $y(x)=\sin\pi x+\dfrac{2\lambda}{\pi(1-\lambda)}$; условие сходимости последовательных приближений $|\lambda|<1$ совпадает с достаточным условием теоремы.

г) Резольвента $R(x,s,\lambda)=\dfrac{x\cdot\sin 2s}{1+\dfrac{\lambda\pi}{2}}$, решение $y(x)=\cos 2x$; последовательные приближения сходятся при $|\lambda|<\dfrac{2}{\pi}$, достаточное условие теоремы выполнено только для $|\lambda|<\dfrac{1}{\pi^2}$.

д) Резольвента $R(x,s,\lambda)=\dfrac{\sin(x+s)+\lambda\pi\cos(x-s)}{1-\lambda^2\pi^2}$, решение $y(x)=2$; последовательные приближения сходятся при $|\lambda|<\dfrac{1}{\pi}$, достаточное условие теоремы выполнено только при $|\lambda|<\dfrac{1}{2\pi}$.

е) Резольвента $R(x,s,\lambda)=\dfrac{2\sin x\cdot\cos s}{2-\lambda}$, решение $y(x)=1+2\sin x$; последовательные приближения сходятся при $|\lambda|<2$, однако достаточное условие "малого" λ: $|\lambda|=1<\dfrac{2}{\pi}$, сформулированное в теореме, - не выполнено.

ж) Резольвента $R(x,s,\lambda)=\dfrac{xe^s}{1-\lambda}$, решение $y(x)=x+e^{-x}$; последовательные приближения сходятся при $|\lambda|<1$, однако достаточное условие теоремы $|\lambda|=\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{e}$ не выполняется.

з) Резольвента $R(x,s,\lambda)=\dfrac{2}{2-\lambda}$, решение $y(x)=x+\dfrac{1}{4}$; последовательные приближения сходятся при $|\lambda|<2$, достаточное условие теоремы $|\lambda|=1<2$ также выполняется.