ТЕМА 8

Основные понятия вариационного исчисления. Задача с закрепленными концами.

Основные определения и теоремы

Если на некотором множестве функций указано правило, которое ставит в соответствие каждой функции некоторое число, то на этом множестве задан функционал. Будем рассматривать функционалы, действующие из линейного нормированного пространства E в пространство вещественных чисел $\mathbb{R}^1$: $E \to \mathbb{R}^1$. Итак, функционал – это оператор, множество значений которого состоит из чисел.

Будем рассматривать следующие линейные пространства E (или их подмножества E'):

1) $C[a,b]$ – пространство непрерывных на $[a,b]$ функций, в котором определена норма

$$\| y \|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} | y(x) | .$$

2) $C^{(1)}[a,b]$ – пространство функций, непрерывных вместе со своими первыми производными на $[a,b]$. Норма в этом пространстве определяется как

$$\| y \|_{C^{(1)}[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} | y(x) | + \max_{x\in[a,b]} | y'(x) | .$$

Определение. Функционал $V[y]$ называется непрерывным в точке $y_0 \in E$, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что при $\forall y \in E$: $\| y - y_0 \| \le \delta$ выполняется неравенство $| V[y] - V[y_0] | \le \varepsilon$.

Аналогично можно дать определение непрерывности функционала в точке $y_0 \in E'$, если функционал рассматривается только на множестве E'. Функционал называется непрерывным на всём пространстве E (множестве E'), если он непрерывен в каждой точке $E(E')$.

Определение. Точка y_0 является точкой локального минимума (максимума) функционала $V[y]$, если найдется число $r > 0$ такое, что для любого $y \in E : \| y - y_0 \|_E \le r$ выполнено неравенство $V[y] \ge V[y_0]$ ($V[y] \le V[y_0]$).

Пусть $y_0 \in E$ - произвольная фиксированная точка, $h \in E$ - произвольный элемент E. Рассмотрим функцию вещественной переменной t $\quad \Phi(t) \equiv V[y_0 + th]$, t – вещественное число.

Определение. Если для любого $h \in E$ существует $\Phi'(t)_{t=0} = \dfrac{d}{dt} V[y_0 + th]_{t=0}$, то эта производная называется вариацией (слабой вариацией) функционала V в точке y_0 и обозначается $\delta V(y_0, h)$. Очевидно, что $V[y_0 + th] - V[y_0] = t\,\delta V(y_0, h) + o(|t|)$.

Определение. Функционал $V[y]$ называется дифференцируемым в точке y_0, если для любого $h \in E$ $\quad V[y_0 + h] - V[y_0] = dV(y_0, h) + o(\| h \|)$, где $dV(y_0, h)$ - линейный и непрерывный по h функционал, который иногда называют сильной вариацией в точке y_0, в то время как функционал (от h) $\delta V(y_0, h)$ - слабой вариацией в точке y_0.

Если существует сильная вариация, то существует и вариация (слабая вариация). Обратное, вообще говоря, неверно.

<u>Теорема (необходимое условие экстремума)</u>. Пусть $y_0 \in E$ - точка экстремума $V[y]$ и существует $\delta V(y_0,h)$ для всякого $h \in E$. Тогда $\delta V(y_0,h)=0$.

Конкретизируем вид функционала и множество допустимых функций. Рассмотрим функционал $V[y]=\int\limits_a^b F(x,y,y')\,dx$ на множестве функций $E' \subseteq E = C^1[a,b]$ таком, что $E' = \{y \in C^{(1)}[a,b],\ \ y(a)=A,\ y(b)=B\}$. Простейшая задача вариационного исчисления (задача с закрепленными концами): среди всех функций из множества E' определить ту, которая реализует экстремум функционала $V[y]=\int\limits_a^b F(x,y,y')\,dx$.

Определение. Функционал достигает <u>сильного</u> минимума (максимума) на функции $y_0(x)$, если найдется число $r>0$ такое, что для любой функции из сильной окрестности $y_0(x)$, т.е. $y \in E'$: $\| y-y_0 \|_{C[a,b]} = \max\limits_{x\in[a,b]} | y(x)-y_0(x) | \le r$, выполнено неравенство $V[y] \ge V[y_0]$ ($V[y] \le V[y_0]$).

Определение. Функционал достигает <u>слабого</u> минимума (максимума) на функции $y_0(x)$, если найдется число $r>0$ такое, что для любой функции из слабой окрестности $y_0(x)$, т.е. $y \in E'$: $\| y-y_0 \|_{C^{(1)}[a,b]} = \max\limits_{x\in[a,b]} | y(x)-y_0(x) | + \max\limits_{x\in[a,b]} | y'(x)-y_0'(x) | \le r$, выполнено неравенство $V[y] \ge V[y_0]$ ($V[y] \le V[y_0]$).

Ясно, что если на функции $y_0(x)$ реализуется сильный экстремум, то имеет место и слабый в той же точке. Обратное, вообще говоря, неверно.

Теорема (необходимое условие экстремума в задаче с закрепленными концами).

1) Пусть $y(x)$ реализует экстремум (сильный или слабый) функционала $V[y]=\int\limits_a^b F(x,y,y')\,dx$ с условиями $y(a)=A,\ y(b)=B$ и является дважды непрерывно дифференцируемой.
2) Пусть функция $F(x,y,y')$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно при $x \in [a,b]$ и в некоторой области изменения y и y', содержащей $y(x)$.

Тогда $y(x)$ является решением краевой задачи для уравнения Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0; \qquad y(a)=A, \quad y(b)=B.$$

Решения этой задачи называются <u>экстремалями</u> функционала $V[y]=\int\limits_a^b F(x,y,y')\,dx$.

Так как уравнение Эйлера, вообще говоря, дифференциальное уравнение второго порядка, то решение его может быть как единственным, так и не единственным, и может не существовать вовсе.

Приемы интегрирования уравнения Эйлера зависят от конкретного вида функции $F(x,y,y')$. Приведем некоторые примеры для некоторых, часто встречающихся случаев.

1. F не зависит от y': $F(x,y,y')=F(x,y)$.

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид $F_y(x,y)=0$, т.е. является не дифференциальным, а алгебраическим, поэтому его решение (если оно существует) представляет собой одну или несколько кривых, которые, вообще говоря, не удовлетворяют граничным условиям $y(a)=A,\ \ y(b)=B$.

Итак, решение краевой задачи для уравнения Эйлера в рассматриваемом случае, вообще говоря, не существует.

2. F зависит от y' линейно: $F(x,y,y') = M(x,y) + y' \cdot N(x,y)$.

Уравнение Эйлера имеет вид $M_y + y'N_y - \dfrac{d}{dx}N(x,y) = M_y + y' \cdot N_y - N_x - N_y \cdot y' = 0$,

т.е.

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0 .$$

Полученное уравнение не является дифференциальным, поэтому краевая задача для уравнения Эйлера также, вообще говоря, не имеет решения.

В частном случае $\dfrac{\partial M}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial N}{\partial x}$ выражение $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ является полным дифференциалом, и значение функционала $V[y] = \int\limits_a^b F(x,y,y')\,dx = \int\limits_{(a,A)}^{(b,B)} M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ не зависит от выбора кривой, соединяющей точки (a,A) и (b,B).

3. F зависит только от y': $F(x,y,y') = F(y')$.

Уравнение Эйлера имеет вид $y'' \cdot F_{y'y'}(y') = 0$. Далее возможны два варианта:

а) $y'' = 0$, тогда общее решение есть $y(x) = C_1 x + C_2$, где C_1, C_2 - произвольные постоянные, определяемые из граничных условий;

б) $F_{y'y'}(y') = 0$, тогда $y' = k_i$, где k_i - корни алгебраического уравнения $F''(t) = 0$, и соответствующие решения $y_i(x) = k_i x + \tilde{C}_i$ являются частными случаями п. а).

Поэтому, решениями уравнения Эйлера в обоих случаях а) и б) являются прямые.

4. F не зависит от y: $F(x,y,y') = F(x,y')$.

Уравнение Эйлера принимает вид $\dfrac{d}{dx}F_{y'}(x,y') = 0$ и имеет первый интеграл $F_{y'}(x,y') = C$, где C - произвольная постоянная. Дальнейшее интегрирование производится путем разрешения относительно производной, либо путем введения параметра.

5. F не зависит от x: $F(x,y,y') = F(y,y')$.

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид $F_y - y' \cdot F_{yy'} - y'' \cdot F_{y'y'} = 0$.

Умножив на y', получим $\dfrac{d}{dx}(F - y' \cdot F_{y'}) = 0$ и найдем первый интеграл $F - y' \cdot F_{y'} = C$. Дальнейшее интегрирование также производится методами, развитыми для дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной.

Итак, если экстремаль существует, то она, как правило, может быть включена в однопараметрическое семейство решений уравнения Эйлера $y = y(x,C)$.

Определение. Если через каждую точку области G на плоскости xOy проходит единственная кривая семейства $y = y(x,C)$, то это семейство называют *собственным полем* в области G.

Определение. Если все кривые семейства $y = y(x,C)$ проходят через некоторую точку $(x_0, y_0) \in G$ (центр пучка), а через каждую точку области, отличную от (x_0, y_0), проходит одна и только одна кривая семейства, то $y = y(x,C)$ называют *центральным полем* в области G.

Выбор любой точки области G (кроме центра пучка во втором случае) определяет единственную экстремаль, проходящую через эту точку, и задает в области G некоторую функцию $p(x,y)$ - наклон поля экстремалей: $p(x,y)$ в каждой точке $(x,y)\in G$ равна тангенсу угла наклона той экстремали, которая проходит через эту точку.

Сформулируем достаточные условия экстремума в задаче с закрепленными концами.

Достаточные условия Вейерштрасса. Пусть функция $y=y_0(x)$ удовлетворяет необходимому условию экстремума, т.е. является экстремалью в задаче с закрепленными концами. Будем считать, что экстремаль $y=y_0(x)$ на сегменте $[a,b]$ может быть включена в поле экстремалей (собственное или центральное).

Рассмотрим кривые $y=y(x)$, удовлетворяющие тем же граничным условиям, что и экстремаль $y=y_0(x),\ y(x)\in C^{(1)}[a,b]$ (кривые сравнения).

Функция $E(x,y,p,y')=F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)F_p(x,y,p)$ называется *функцией Вейерштрасса*. В аргументах функции $E(x,y,p,y')$ через y' обозначается производная кривой сравнения $y(x)$ в точке (x,y), а через $p=p(x,y)$ - наклон поля экстремалей в этой точке.

Приращение функционала $V[y]$ выражается через функцию Вейерштрасса ($y_0(x)$ - исследуемая экстремаль, а $y(x)$ - кривая сравнения):

$$\Delta V=V[y(x)]-V[y_0(x)]=\int_a^b E(x,y(x),p(x,y(x)),y'(x))dx\,.$$

Поэтому достаточным условием достижения функционалом $V[y]$ экстремума на экстремали $y_0(x)$ является знакоопределенность функции $E(x,y,p,y')$ в окрестности экстремали $y_0(x)$. Экстремум будет слабым или сильным в зависимости от того, в слабой или сильной окрестности экстремали $y_0(x)$ сохраняет знак функция Вейерштрасса.

Достаточные условия слабого экстремума:

Кривая $y=y_0(x)$ доставляет слабый экстремум функционалу $V[y]=\int_a^b F(x,y,y')\,dx$ в задаче с закрепленными концами $y(a)=A,\quad y(b)=B$, если:

1) кривая $y=y_0(x)$ является экстремалью функционала, т.е. является решением краевой задачи для уравнения Эйлера с условиями $y(a)=A,\quad y(b)=B$;
2) экстремаль $y=y_0(x)$ может быть включена в поле экстремалей на отрезке $[a,b]$;
3) функция Вейерштрасса сохраняет знак во всех точках слабой окрестности экстремали $y=y_0(x)$, т.е. в точках (x,y), близких к экстремали $y=y_0(x)$, и для значений y', близких к значениям $p(x,y)$ ($p(x,y)$ - заданная функция, так как определено поле экстремалей).

Если $E\ge 0$, то функционал $V[y]$ имеет на $y_0(x)$ слабый минимум, если $E\le 0$, то функционал $V[y]$ имеет на $y_0(x)$ слабый максимум.

Достаточные условия сильного экстремума.

Кривая $y=y_0(x)$ доставляет сильный экстремум функционалу $V[y]=\int_a^b F(x,y,y')\,dx$ в задаче с закрепленными концами $y(a)=A,\quad y(b)=B$, если:

1) кривая $y=y_0(x)$ является экстремалью функционала т.е. является решением краевой задачи для уравнения Эйлера с условиями $y(a)=A,\quad y(b)=B$;
2) экстремаль $y=y_0(x)$ может быть включена в поле экстремалей на отрезке $[a,b]$;

3) функция Вейерштрасса сохраняет знак во всех точках сильной окрестности экстремали $y = y_0(x)$, т.е. в точках (x, y), близких к экстремали $y = y_0(x)$, и для произвольных значений y'.

Если $E \geq 0$, то функционал $V[y]$ имеет на $y_0(x)$ сильный минимум, если $E \leq 0$, то функционал $V[y]$ имеет на $y_0(x)$ сильный максимум.

Достаточное условие отсутствия экстремума.

Если в точках экстремали $y = y_0(x)$ при некоторых значениях y' функция E имеет противоположные знаки, то сильный экстремум на $y_0(x)$ не достигается.

Если в точках экстремали $y = y_0(x)$ при значениях y' сколь угодно близких к $p(x, y)$, функция E имеет противоположные знаки, то на $y_0(x)$ не достигается и слабый экстремум.

Достаточные условия Лежандра.

Пусть функция $F(x, y, y')$ имеет непрерывную вторую производную $F_{y'y'}(x, y, y')$ и экстремаль $y = y_0(x)$ включена в поле экстремалей.

Достаточные условия слабого экстремума ($F_{y'y'}$ исследуется на самой экстремали $y = y_0(x)$).

Если на экстремали $y = y_0(x) F_{y'y'} > 0$, то функционал $V[y]$ имеет на $y_0(x)$ слабый минимум; если на экстремали $y = y_0(x) F_{y'y'} < 0$, то функционал $V[y]$ имеет на $y_0(x)$ слабый максимум.

Достаточные условия сильного экстремума (($F_{y'y'}$ исследуется в сильной окрестности экстремали $y = y_0(x)$).

Если $F_{y'y'} \geq 0$ в точках (x, y), близких к экстремали $y = y_0(x)$, и для произвольных значений y', то $V[y]$ имеет на экстремали $y_0(x)$ сильный минимум.

Если $F_{y'y'} \leq 0$ в точках (x, y), близких к экстремали $y = y_0(x)$, и для произвольных значений y', то $V[y]$ имеет на экстремали $y_0(x)$ сильный максимум.

Примеры решения задач

Пример 8.1. Вычислить вариацию функционала $V[y] = y^2(0) + \int\limits_{-1}^{1} (xy + y'^2)\, dx$ в точке y.

Решение. Найдем сначала вариацию функционала $V[y]$, воспользовавшись первым определением (слабую вариацию):

$$\delta V(y, h) \equiv \frac{d}{dt} V[y + th]\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left[(y(0) + th(0))^2 + \int\limits_{-1}^{1} [x(y(x) + th(x)) + (y'(x) + th'(x))^2]dx \right]_{t=0} =$$

$$= 2y(0)h(0) + \int\limits_{-1}^{1} [x \cdot h(x) + 2y' \cdot h'(x)]dx .$$

Теперь воспользуемся вторым определением и найдем вариацию как линейную часть приращения функционала в точке y (сильную вариацию). Зададим приращение аргумента функционала - произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $h(x)$: $h(-1) = h(1) = 0$, и вычислим приращение $\Delta V = V[y + h] - V[y] =$

$$=[y(0)+h(0)]^2-y^2(0)+\int_{-1}^{1}[x(y(x)+h(x))+(y'(x)+h'(x))^2]dx-\int_{-1}^{1}[xy(x)+y'^2(x)]dx=$$

$$=2y(0)h(0)+\int_{-1}^{1}[x\cdot h(x)+2y'(x)\cdot h'(x)]dx+h^2(0)+\int_{-1}^{1}h'^2(x)\,dx.$$

Линейная относительно h часть приращения - первые два слагаемые последнего равенства - и есть искомая (сильная) вариация

$$dV[y,h]=2y(0)h(0)+\int_{-1}^{1}[x\cdot h(x)+2y'\cdot h'(x)]dx,$$

которая в данном случае совпадает с полученной ранее (слабой) вариацией $\delta V[y,h]$.

Пример 8.2. Найти экстремаль функционала $V[y]=\int_0^1 (y^2+y'^2)\,dx$ с дополнительными условиями $y(0)=0,\quad y(1)=0$.

Доказать, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала

а) путем непосредственного вычисления приращения функционала;

б) применив достаточные условия в форме Вейерштрасса и Лежандра.

Решение. Уравнение Эйлера для функционала в исследуемой задаче $y''-y=0$ имеет общее решение $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$. Граничным условиям удовлетворяет экстремаль $y_0(x)\equiv 0$.

а) Непосредственное вычисление приращения функционала на кривой $y_0(x)\equiv 0$ дает $\Delta V=V[y]-V[y_0(x)\equiv 0]=\int_0^1(y^2+y'^2)dx\geq 0$. Поэтому на ней реализуется сильный (а, следовательно, и слабый) минимум.

б) Заметим, что экстремаль $y_0(x)\equiv 0$ при $x\in[0,1]$ может быть включена в собственное поле экстремалей $y=C\,e^x$.

1. Функция Вейерштрасса $E(x,y,p,y')=y^2+y'^2-y^2-p^2-(y'-p)2p=\left(y'-p\right)^2\geq 0$ при любых $y,\,y'$, т.е. сохраняет знак в сильной окрестности кривой $y_0(x)\equiv 0$. Следовательно, выполнено достаточное условие Вейерштрасса, и экстремаль $y_0(x)\equiv 0$ реализует сильный (и слабый) минимум.
2. $F_{y'y'}=2>0$ при любых $y,\,y'$, поэтому выполнено достаточное условие Лежандра. Функционал на экстремали $y_0(x)\equiv 0$ достигает сильного (и слабого) минимума.

Пример 8.3. Найти экстремаль функционала $V[y]=\int_{-1}^{0}(12xy-y'^2)\,dx$ с дополнительными условиями $y(-1)=1,\quad y(0)=0$.

Доказать, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала

а) путем непосредственного вычисления приращения функционала;

б) применив достаточные условия в форме Вейерштрасса и Лежандра.

Решение. Уравнение Эйлера для функционала в рассматриваемой задаче $y''+6x=0$ имеет общее решение $y=-x^3+C_1x+C_2$. Граничным условиям удовлетворяет экстремаль $y_0(x)=-x^3$.

а) Зададим приращение аргумента функционала - произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $h(x)$, удовлетворяющую условиям $h(-1)=h(0)=0$, - и вычислим приращение функционала на экстремали $y_0(x)=-x^3$:

$$\Delta V = V[-x^3+h]-V[-x^3]=\int_{-1}^{0}[12x(-x^3+h(x))-(-3x^2+h'(x))^2]dx-\int_{-1}^{0}[12x(-x^3)-(-3x^2)^2]dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}[12x\,h(x)+6x^2h'(x)-h'^2(x)]dx=\int_{-1}^{0}[12x\,h(x)-h'^2(x)]dx+\underbrace{\int_{-1}^{0}6x^2h'(x)dx}_{инт.\ по\ частям}=$$

$$=\underbrace{6x^2h(x)\Big|_{-1}^{0}}_{=0}-\int_{-1}^{0}12x\,h(x)dx+\int_{-1}^{0}[12x\,h(x)-h'^2(x)]dx=-\int_{-1}^{0}h'^2(x)dx\le 0\,.$$

Итак, $\Delta V\le 0$ независимо от y' (в сильной окрестности), поэтому на экстремали $y_0(x)=-x^3$ реализуется сильный (а, следовательно, и слабый) максимум.

б) Заметим, что экстремаль $y_0(x)=-x^3$ при $x\in[-1,0]$ может быть включена в собственное поле экстремалей (решений уравнения Эйлера) $y=-x^3+C$.

1. Функция Вейерштрасса

$$E(x,y,p,y')=12xy-y'^2-(12xy-p^2)-(y'-p)(-2p)=-\left(y'-p\right)^2\le 0$$

при любых $y,\,y'$, т.е. сохраняет знак в сильной окрестности кривой $y_0(x)=-x^3$. Следовательно, выполнено достаточное условие Вейерштрасса, и экстремаль $y_0(x)=-x^3$ реализует сильный (и слабый) максимум.

2. $F_{y'y'}=-2<0$ при любых $y,\,y'$, поэтому выполнено достаточное условие Лежандра. Функционал на экстремали $y_0(x)=-x^3$ достигает сильного (и слабого) максимума.

Пример 8.4. Пусть $V[y]=\int_a^b[p(x)y'^2+q(x)y^2+2y\varphi(x)]dx$, где функция $p(x)>0$ - непрерывно дифференцируема, а $q(x)\ge 0$ и $\varphi(x)$ непрерывные на $[a,b]$ функции.

а) Записать уравнение для экстремалей в задаче с закрепленными концами $y(a)=A,\ \ y(b)=B$.

б) Показать, что если $y_0(x)$ является экстремалью функционала $V[y]$, то на ней реализуется минимум этого функционала.

Решение. Уравнение Эйлера для экстремалей изучаемого функционала имеет вид $\dfrac{d}{dx}\left(p(x)y'\right)-q(x)y=\varphi(x)$. Нетрудно показать, что при сформулированных предположениях на функции $p(x),q(x),\varphi(x)$, это уравнение с дополнительными условиями $y(a)=A,\ y(b)=B$ имеет единственное решение $y=y_0(x)$, которое и определяет экстремаль в рассматриваемой задаче.

Зададим $h(x):h(a)=h(b)=0$ и определим знак приращения функционала на исследуемой экстремали:

$$\Delta V = V[y_0(x)+h(x)] - V[y_0(x)] = \int_a^b [p(x)((y_0'+h')^2 - y_0'^2) + q(x)((y_0+h)^2 - y_0^2) + 2\varphi(x)h]dx =$$

$$= \int_0^1 [2p(x)y_0'h' + 2q(x)\,y_0 h + 2\varphi(x)h]dx + \underbrace{\int_a^b p(x)h'^2(x)dx}_{>0} + \underbrace{\int_a^b q(x)h^2(x)dx}_{\geq 0} > 0\,,$$

так как первое слагаемое в этой сумме обращается в ноль. Действительно, интегрируя по частям первое слагаемое, получим

$$2\int_a^b [p(x)y_0'h' + q(x)\,y_0 h + \varphi(x)h]dx = \underbrace{2p(x)y_0(x)h(x)\Big|_a^b}_{=0,\ т.к.\ h(a)=h(b)=0} + 2\int_a^b \underbrace{[-(p(x)y_0')' + q(x)\,y_0 + \varphi(x)]}_{=0\ в\ силу\ ур-я\ Эйлера} h(x)dx = 0$$

.

Итак, $\Delta V = V[y_0(x)+h(x)] - V[y_0(x)] > 0$, поэтому на экстремали $y = y_0(x)$ достигается минимум исследуемого функционала, что и требовалось доказать.

Пример 8.5. Исследовать на экстремум функционал $V[y] = \int_0^a y'^3\, dx$ с граничными условиями $y(0)=0$, $y(a)=b$ ($a>0$, $b>0$).

Решение. Уравнение Эйлера для данного функционала имеет вид $y''=0$. Семейство экстремалей определяется формулой $y = C_1 x + C_2$. Граничным условиям удовлетворяет единственная экстремаль $y = \frac{b}{a}x$.

Найденная экстремаль может быть включена в собственное поле $y = \frac{b}{a}x + C$, наклон поля экстремалей $p = \frac{b}{a}$.

Функция Вейерштрасса имеет вид

$$E(x,y,p,y') = y'^3 - p^3 - (y'-p)3p^2 = (y'-p)^2\,(y'+2p)$$

и знак ее определяется знаком выражения $y'+2p = y'+2\frac{b}{a}$. Следовательно, $E(x,y,p,y')$ может менять знак в зависимости от y'. Поэтому сильного экстремума на исследуемой экстремали нет.

Вместе с тем, функция Вейерштрасса сохраняет знак, если y' близко к $p = \frac{b}{a} > 0$ (наклону поля экстремалей), т.е. $y'+2p = y'+2\frac{b}{a} \geq 0$ и неравенство $E(x,y,p,y') \geq 0$ выполнено для всех кривых сравнения $y = y(x)$ из некоторой слабой окрестности экстремали $y = \frac{b}{a}x$. Таким образом, на экстремали $y = \frac{b}{a}x$, согласно достаточному условию Вейерштрасса, достигается слабый минимум.

Пример 8.6. Показать, что в задаче с закрепленными концами

$$V[y]=\int_0^a (y^2-y'^2)\,dx,\quad y(0)=0,\quad y(a)=0$$

а) в случае $a=\dfrac{\pi}{2}<\pi$ на экстремали $y_0(x)\equiv 0$ реализуется сильный максимум функционала;

б) в случае $a=\dfrac{5\pi}{4}>\pi$ функция $y_0(x)\equiv 0$ также является единственной экстремалью в рассматриваемой задаче, причем функция Вейерштрасса сохраняет знак на этой кривой, однако экстремум на ней не достигается;

в) в случае $a=\pi$ экстремаль определяется не единственным образом.

Решение. Уравнение Эйлера имеет вид $y''+y=0$. Его общее решение есть $y=C_1\sin x+C_2\cos x$. Граничным условиям $y(0)=0$, $y(a)=0$, как в случае а), так и в случае б) удовлетворяет единственная функция $y_0(x)\equiv 0$.

а) Если $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$, то экстремаль $y_0(x)\equiv 0$ может быть включена, например, в центральное поле экстремалей $y=C\sin x$.

Функция Вейерштрасса

$$E(x,y,p,y')=y^2-y'^2-(y^2-p^2)+(y'-p)2p=-\left(y'-p\right)^2\le 0$$

при любых $y,\,y'$, т.е. сохраняет знак в сильной окрестности кривой $y_0(x)\equiv 0$. Следовательно, выполнено достаточное условие Вейерштрасса, и экстремаль $y_0(x)\equiv 0$ реализует сильный (и слабый) максимум.

б) Если $x\in[0,\dfrac{5\pi}{4}]$, то функция Вейерштрасса $E(x,y,p,y')=-\left(y'-p\right)^2\le 0$ также сохраняет знак в сильной окрестности кривой $y_0(x)\equiv 0$. Заметим, что $V[y\equiv 0]=0$ и докажем, что на функции $y_0(x)\equiv 0$ не достигается слабый (следовательно, и сильный) экстремум.

Рассмотрим последовательность $\varphi_n(x)=\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{4}{5}x$. Ясно, что при достаточно больших n выполнено $\|\varphi_n-y_0\|_{C^1[0,\frac{4\pi}{5}]}=\max\limits_{x\in[0,\frac{4\pi}{5}]}\left|\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{4x}{5}\right|+\max\limits_{x\in[0,\frac{4\pi}{5}]}\left|\dfrac{4}{5n}\cos\dfrac{4x}{5}\right|\le r$, т.е. все указанные функции, начиная с некоторого номера, принадлежат слабой окрестности $y_0(x)\equiv 0$. Однако

$$V[\varphi_n]=\int_0^{\frac{5\pi}{4}}\frac{1}{n^2}\sin^2\frac{4x}{5}dx-\int_0^{\frac{5\pi}{4}}\frac{16}{25n^2}\cos^2\frac{4x}{5}dx=\frac{9}{25n^2}\int_0^{\frac{5\pi}{4}}\cos^2\frac{4x}{5}dx>0=V[0],$$

следовательно, на функции $y_0(x)\equiv 0$ слабый (и сильный) максимум не достигается.

Рассмотрим последовательность $\psi_n(x)=\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{4n}{5}x$. Ясно, что при достаточно больших n выполнено $\|\psi_n-y_0\|_{C^1[0,\frac{4\pi}{5}]}=\max\limits_{x\in[0,\frac{4\pi}{5}]}\left|\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{4nx}{5}\right|+\max\limits_{x\in[0,\frac{4\pi}{5}]}\left|\dfrac{4}{5n}\cos\dfrac{4nx}{5}\right|\le r$, т.е. все указанные функции, начиная с некоторого номера, принадлежат слабой окрестности $y_0(x)\equiv 0$.

Однако, при достаточно больших n

$$V[\psi_n]=\int\limits_0^{\frac{5\pi}{4}}\frac{1}{n^4}\sin^2\frac{4nx}{5}dx-\int\limits_0^{\frac{5\pi}{4}}\frac{16}{25n^2}\cos^2\frac{4nx}{5}dx=\frac{5\pi}{8}\left(\frac{1}{n^4}-\frac{16}{25n^2}\right)<0=V[0].$$

Следовательно, на функции $y_0(x)\equiv 0$ минимум также не достигается.

Причина указанного явления состоит в том, что экстремаль $y_0(x)\equiv 0$ нельзя включить в поле экстремалей при $x\in[0,\frac{5\pi}{4}]$, так как все решения уравнения Эйлера $y=C_1\sin x+C_2\cos x$, удовлетворяющие одному из граничных условий $y(0)=0$ или $y(\frac{5\pi}{4})=0$, обращаются в ноль одновременно еще в одной точке $x_0\in[0,\frac{5\pi}{4}]$. Например, если потребовать $y(0)=0$, то все кривые семейства $y=C\sin x$ обращаются в ноль при $x_0=\pi\in[0,\frac{5\pi}{4}]$.

в) В случае $a=\pi$ уравнение Эйлера $y''+y=0$ имеет семейство решений $y=C\sin x$, удовлетворяющих граничными условиям $y(0)=0$, $y(\pi)=0$, следовательно, экстремаль определяется не единственным образом. Легко проверить, что в этом случае на любой функции семейства $y=C\sin x$ выполнено $V[y]=\int\limits_0^{\pi}(y^2-y'^2)dx=0$.

Пример 8.7. Пусть тело перемещается по кривой $y=y(x)$ со скоростью $\vec{v}$ такой, что $|\vec{v}|=v(x,y)=y$. Какова должна быть траектория его движения, чтобы тело попало из точки $y(a)=A$ в точку $y(b)=B$ за минимальное время?

Решение. Время, необходимое для перемещения из точки $(a,y(a))$ в точку $(b,y(b))$ по заданной кривой $y=y(x)$, определяется функционалом $t=\int\limits_a^b\frac{ds}{v(x,y)}=\int\limits_a^b\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx\equiv V[y]$. Таким образом, решение поставленной задачи дается экстремалями функционала $V[y]$ при условиях $y(a)=A$, $y(b)=B$.

Уравнение Эйлера в рассматриваемом случае $F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=F_y-F_{y'y'}y''-F_{y'y}y'=0$. Умножая на y', получим $\frac{d}{dx}\left(F-y'F_{y'}\right)=0$, и найдем первый интеграл $\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}-y'\frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}}=\frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}}=C_1$. Положим $y'=tg\,t$, тогда $y=\frac{\cos t}{C_1}$, $dx=\frac{dy}{y'}=ctg\,t\,dy=\frac{\cos t\,dt}{C_1}$, откуда $x=\frac{\sin t}{C_1}+C_2$. Исключив параметр t, получим $(x-C_2)^2+y^2=\frac{1}{C_1^2}$, т.е. экстремалями задачи являются окружности с центрами на оси x.

Итак, искомая траектория движения тела - дуга окружности с центром на оси x, соединяющая точки (a,A) и (b,B). Легко видеть, что такая окружность определяется единственным образом при заданных дополнительных условиях $y(a)=A$, $y(b)=B$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти вариацию функционала

8.1 $V[y]=\int\limits_a^b yy'dx$.

8.2 $V[y]=\int\limits_a^b (x+y)dx$.

8.3 $V[y]=\int\limits_a^b (y^2-y'^2)dx$.

8.4 $V[y]=\int\limits_0^\pi y'\sin y\,dx$.

Исследовать на экстремум функционалы в задаче с закрепленными концами (найти экстремали и проверить достаточные условия каким либо способом):

8.5 $V[y]=\int\limits_0^1 e^x\left(y^2+\frac{1}{2}y'^2\right)dx$ $\quad y(0)=1,\quad y(1)=e$.

8.6 $V[y]=\int\limits_0^1 e^y y'^2 dx$ $\quad y(0)=0,\quad y(1)=\ln 4$.

8.7 $V[y]=\int\limits_1^2 \frac{x^3}{y'^2}dx$ $\quad y(1)=1,\quad y(2)=4$.

8.8 $V[y]=\int\limits_0^a \frac{dx}{y'}$ $\quad y(0)=0,\quad y(a)=b\quad (a>0,\,b>0)$.

8.9 $V[y]=\int\limits_0^1 (1+x)y'^2 dx$ $\quad y(0)=0,\quad y(1)=1$.

8.10 $V[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (y^2-y'^2)dx$ $\quad y(0)=1,\quad y(\frac{\pi}{2})=1$.

8.11 $V[y]=\int\limits_{-1}^2 y'(1+x^2y')dx$ $\quad y(-1)=1,\quad y(2)=4$.

8.12 $V[y]=\int\limits_{-1}^1 (y'^3+y'^2)dx$ $\quad y(-1)=-1,\quad y(1)=3$.

8.13 $V[y]=\int\limits_1^2 (xy'^4-2yy'^3)dx$ $\quad y(1)=0,\quad y(2)=1$.

8.14 $V[y]=\int\limits_0^a (1-e^{-y'^2})dx$ $\quad y(0)=0,\quad y(a)=b\quad (a>0)$.

8.15 Найти семейство экстремалей функционала $V[y]=\int\limits_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}dx,\qquad -\frac{\pi}{2}<a<b<\frac{\pi}{2}$.

8.16 Среди всех кривых, соединяющих точки $(-1,\,ch1)$ и $(1,\,ch1)$, определить ту, которая при вращении вокруг оси Ox образует поверхность наименьшей площади.

Ответы к задачам

8.1 $\delta V = \int_a^b (y'h + yh')dx \qquad (\delta y = h(x))$.

8.2 $\delta V = \int_a^b h(x)dx \qquad (\delta y = h(x))$.

8.3 $\delta V = 2\int_a^b (yh - y'h')dx \qquad (\delta y = h(x))$.

8.4 $\delta V = \int_0^\pi (y' \cos y \cdot h + \sin y \cdot h')dx \qquad (\delta y = h(x))$.

8.5 Экстремаль $y(x) = e^x$ реализует сильный (и слабый) минимум.

8.6 Экстремаль $y(x) = 2\ln(x+1)$ реализует сильный (и слабый) минимум.

8.7 Экстремаль $y(x) = x^2$ реализует слабый минимум.

8.8 Экстремаль $y(x) = \frac{b}{a}x$ реализует слабый минимум.

8.9 Экстремаль $y(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln 2}$ реализует сильный (и слабый) минимум.

8.10 Экстремаль $y(x) = \sin x + \cos x$ реализует сильный (и слабый) максимум.

8.11 На непрерывных кривых экстремум не достигается.

8.12 Экстремаль $y(x) = 2x + 1$ реализует слабый минимум.

8.13 Экстремаль $y(x) = x - 1$ реализует слабый минимум.

8.14 На экстремали $y(x) = \frac{b}{a}x$: при $|b| < \frac{a}{\sqrt{2}}$ достигается слабый минимум; при $|b| > \frac{a}{\sqrt{2}}$ - слабый максимум; при $|b| = \frac{a}{\sqrt{2}}$ - экстремума нет.

8.15 Окружности $x^2 + (y - C_1)^2 = C_2^2$.

8.16 $y(x) = ch\, x$.