ТЕМА 9

Задачи с подвижной границей. Условия трансверсальности.

Основные определения и теоремы

Рассмотрим функционал $V[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\,dx$, заданный на кривых $y(x) \in C^{(1)}[a,b]$, граничные точки которых $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$ в свою очередь лежат на фиксированных гладких кривых $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$, так что $y_0=\varphi(x_0)$, $y_1=\psi(x_1)$.

<u>Задача с подвижными границами</u> ставится так: среди всех функций $y(x) \in C^{(1)}[a,b]$, графики которых соединяют точки двух данных кривых $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$, найти ту, которая доставляет экстремум функционалу $V[y]$. Отметим, что абсциссы x_0 и x_1 точек A и B заранее не известны, и также подлежат определению.

Необходимые условия экстремума. Для того, чтобы функция $y=\tilde{y}(x)$ доставляла экстремум функционалу $V[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\,dx$ среди всех кривых $y(x) \in C^{(1)}[a,b]$, соединяющих точки двух заданных линий $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$, необходимо, чтобы:

1) кривая $y=\tilde{y}(x)$ была решением уравнения Эйлера для функционала $V[y]$ (являлась экстремалью),
2) в точках $A(x_0,y_0)$, $B(x_1,y_1)$ пересечения экстремали $y=\tilde{y}(x)$ с кривыми $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$ выполнялись условия трансверсальности

$$[F+(\varphi'-\tilde{y}')F_{y'}]_{x=x_0} = 0,$$
$$[F+(\psi'-\tilde{y}')F_{y'}]_{x=x_1} = 0.$$

Условия трансверсальности устанавливают связь между угловыми коэффициентами кривых $\tilde{y}'$ и φ', а также $\tilde{y}'$ и ψ' в граничных точках A и B.

Для определения четырех параметров - C_1, C_2 из общего решения уравнения Эйлера и значений x_0, x_1 (координат концов экстремали) - два условия трансверсальности нужно дополнить двумя естественными условиями пересечения заданных кривых и искомой экстремали $\tilde{y}(x_0)=\varphi(x_0)$, $\tilde{y}(x_1)=\psi(x_1)$.

Замечание 1. Если граничная точка (пусть точка A) может перемещаться только по горизонтальной прямой $y=x_0$ (т.е. $\varphi'=0$), то условие трансверсальности в точке $A(x_0,y_0)$ принимает вид $[F-y'F_{y'}]_{x=x_0}=0$.

Замечание 2. Если граничная точка (например, точка B) может перемещаться только по вертикальной прямой $x=x_1$ (т.е. $\psi'=\infty$), то такая задача называется <u>*задачей со свободным концом*</u>, и условие трансверсальности при $x=x_1$ в этом случае принимает вид $F_{y'}\Big|_{x=x_1}=0$.

Примеры решения задач

Пример 9.1. Показать, что если в задаче об экстремуме функционала

$$V[y]=\int\limits_a^{x_0=B[y]} A(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

с левым закрепленным и правым подвижным концами функция $A(x,y)\neq 0$ дифференцируема, то условие трансверсальности переходит в условие ортогональности.

Решение. Условие трансверсальности $F+(\varphi'-y')F_{y'}=0$ при $x=x_0=B[y]$ в данной задаче имеет вид $A(x,y)\sqrt{1+y'^2}+(\varphi'-y')\cdot\dfrac{A(x,y)\;y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0$ или $\dfrac{A(x,y)\,(1+\varphi' y')}{\sqrt{1+y'^2}}=0$. Так как $A(x,y)\neq 0$, то $1+y'\varphi'\Big|_{x=x_0}=0$ или $y'(x_0)=-\dfrac{1}{\varphi'(x_0)}$, что и требовалось.

Итак, условие трансверсальности совпадает с условием ортогональности.

Пример 9.2. Исследовать на экстремум функционал $V[y]=\int\limits_0^{x_1}\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx$ при условии, что левый конец закреплен $y(0)=0$, а правый (x_1,y_1) может перемещаться вдоль заданной прямой $y=x-5$.

Решение. Функция $F(x,y,y')=\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{y}$ не зависит явно от *x*. Поэтому уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F-y'F_{y'}=C$, т.е. $\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{y}-y'\dfrac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}}=C$, или $Cy\sqrt{1+y'^2}=1$.

Положим $y'=\operatorname{tg}t$. Тогда $y=C_1\cos t$, а $dx=\dfrac{dy}{y'}=-\dfrac{C_1\sin t\,dt}{\operatorname{tg}t}=-C_1\cos t\,dt$, откуда $x=-C_1\sin t+C_2$.

Исключая параметр *t*, получаем уравнение семейства окружностей $(x-C_2)^2+y^2=C_1^2$ с центрами на оси x. Из условия $y(0)=0$ найдем $C_1=C_2=C$ и $(x-C)^2+y^2=C^2$.

Константа C может быть определена из условия трансверсальности, которое для данного функционала совпадает с условием ортогональности (пример 9.1) кривой $y=y(x)$ семейства $(x-C)^2+y^2=C^2$ и прямой $y=x-5$ в точке их пересечения (x_1,y_1). В нашем случае $\varphi(x)=x-5,\ \ \varphi'=1$, поэтому из $1+y'\varphi'\Big|_{x=x_1}=0$ вытекает $y'\Big|_{x=x_1}=-1$.

Дифференцируя семейство решений уравнения Эйлера, получим $yy'=C-x$. В точке пересечения кривых (x_1,y_1) имеем $\underbrace{y(x_1)}_{\equiv y_1}\cdot\underbrace{y'(x_1)}_{=-1}=C-x_1$, поэтому $-y_1=C-x_1$ и $y_1=x_1-5$, откуда $C=5$ и искомая экстремаль дается формулой $y=\pm\sqrt{10x-x^2}$.

Замечание. Этот результат можно получить и из геометрических соображений. Условие ортогональности прямой $y=x-5$ и окружности $(x-C)^2+y^2=C^2$ в точке их пересечения означает, что центр окружности $(C,0)$ лежит на этой прямой. Следовательно, центр окружности есть точка пересечения прямой $y=x-5$ с осью *x*, т.е. $C=5$.

Пример 9.3. Среди кривых, соединяющих точки прямой $2y+2x+3=0$ и параболы $x^2=2y$, найти ту, которая имеет наименьшую длину.

Решение. Введем обозначения: $y=\varphi(x)\equiv\frac{1}{2}x^2$ - уравнение параболы, $y=\psi(x)\equiv -x-\frac{3}{2}$ - уравнение прямой. Пусть точка с координатами (x_1,y_1) находится на параболе, т.е. $y_1=\frac{1}{2}x_1{}^2$, а точка (x_2,y_2) - на прямой, т.е. $y_2=-x_2-\frac{3}{2}$. Длина дуги кривой $y=y(x)$, соединяющей точки (x_1,y_1) и (x_2,y_2), определятся функционалом

$V[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}dx$. Таким образом, решение поставленной задачи дается экстремалью задачи с подвижной границей для функционала $V[y]=\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}dx$ с условиями $y(x_1)=y_1=\varphi(x_1)$, $y(x_2)=y_2=\psi(x_2)$.

Уравнение Эйлера $y''=0$ имеет общее решение $y(x)=\alpha x+\beta$. Для определения постоянных α и β, а также координат концов дуги экстремали получим следующие условия в точках (x_1,y_1) и (x_2,y_2):

$$\begin{cases} y_1=\alpha x_1+\beta, \qquad y_1=\frac{1}{2}x_1^2 \\ \sqrt{1+y'^2(x_1)}+[\underbrace{\varphi'(x_1)}_{=x_1}-\underbrace{y'(x_1)}_{=\alpha}]\frac{y'(x_1)}{\sqrt{1+y'^2(x_1)}}=0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} y_2=\alpha x_2+\beta, \qquad y_2=-x_2-\frac{3}{2} \\ \sqrt{1+y'^2(x_2)}+[\underbrace{\varphi'(x_2)}_{=-1}-\underbrace{y'(x_2)}_{=\alpha}]\frac{y'(x_2)}{\sqrt{1+y'^2(x_2)}}=0 \end{cases}$$

Во второй и четвертой строках записаны условия трансверсальности $F+(\varphi'-y')F_{y'}=0$, где $F(x,y,y')=\sqrt{1+y'^2}$, в точках (x_1,y_1) и (x_2,y_2). Легко видеть, что они совпадают с условиями ортогональности $y'(x_{1,2})\cdot\varphi'(x_{1,2})+1=0$.

Решая систему, найдем $x_1=-1$, $x_2=-\frac{3}{2}$, $y_1=\frac{1}{2}$, $y_2=0$, и экстремаль $y(x)=x+\frac{3}{2}$.

Замечание. Длина дуги полученной экстремали $l=\int\limits_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}dx=\int\limits_{-\frac{3}{2}}^{-1}\sqrt{1+1}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}$ дает минимальное расстояние от прямой до параболы. Этот результат легко получить и из геометрических соображений.

Пример 9.4. Найти экстремали функционала $V[y]=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(y'^2-y^2)\,dx$ с условием $y(0)=1$ (задача со свободным правым концом при $x=\frac{\pi}{4}$).

Решение. Граничное условие при $x=\frac{\pi}{4}$ следует поставить так: $F_{y'}\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=2y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=0$.

Экстремали в данной задаче находятся из условий $\begin{cases} y''+y=0 \quad (\text{\textit{ур – е Эйлера}}) \\ y(0)=1, \qquad y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0 \end{cases}$,

откуда получаем единственное решение $y(x)=\sin x+\cos x$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти экстремали и значение ξ в следующих задачах с подвижной границей:

9.1 $V[y]=\int_0^{\xi} y'^2dx$ $\quad y(0)=0,\quad y(\xi)=-\xi-1$.

9.2 $V[y]=\int_0^{\xi} y'^2dx$ $\quad y(0)=0,\quad y(\xi)=\dfrac{2}{1-\xi}$.

9.3 $V[y]=\int_0^{\xi} \sqrt{1+y'^2}\,dx$ $\quad y(0)=0,\quad y(\xi)=\dfrac{1}{\xi^2}$.

9.4 $V[y]=\int_0^{\xi} (y'^2+x^2)dx$ $\quad y(0)=0,\quad y(\xi)=1 \quad (\xi>0)$.

9.5 $V[y]=\int_0^{\xi} \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx$ $\quad y(0)=1,\quad y(\xi)=\xi-1$.

9.6 Найти минимальное расстояние от точки $M_0(-1,5)$ до параболы $x=y^2$.

9.7 Найти минимальное расстояние от точки $M_0(1,0)$ до эллипса $4x^2+9y^2=36$.

9.8 Найти минимальное расстояние между точками параболы $y=x^2$ и прямой $x-y=5$.

9.9 Найти минимальное расстояние от прямой $x+y=4$ до окружности $x^2+y^2=1$.

Найти экстремали в задачах со свободными концами:

9.10 $V[y]=\int_0^{2} (2xy+y'^2)dx$ $\quad y(0)=0$.

9.11 $V[y]=\int_0^{1} (2y+6y'+y'^2)dx$ $\quad y(0)=0$.

9.12 $V[y]=\int_0^{1} (2yy'+y'^2)dx$.

9.13 $V[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4y^2+y'^2+2y\cos x)dx$.

9.14 $V[y]=\int_1^2(2y+yy'+x^2y'^2)dx$.

9.15 $V[y]=\int_1^2(2y-yy'+xy'^2)dx$

Ответы к задачам

9.1 $y(x)=-2x, \qquad \xi=1$.

9.2 $y(x)=9x, \qquad \xi=\frac{1}{3}$.

9.3 $y(x)=\frac{x}{\sqrt{2}}, \qquad \xi=\sqrt[6]{2}$.

9.4 $y(x)=x, \qquad \xi=1$.

9.5 $y(x)=\sqrt{1+2x-x^2}, \qquad \xi=2$.

9.6 $2\sqrt{5}$.

9.7 $\frac{4}{\sqrt{5}}$, экстремаль $y(x)=2x-2$.

9.8 $\frac{19\sqrt{2}}{8}$, экстремаль $y(x)=-x+\frac{3}{4}$.

9.9 $2\sqrt{2}-1$.

9.10 $y(x)=\frac{x^3}{6}-2x$.

9.11 $y(x)=\frac{x^2}{2}-4x$.

9.12 $y(x)\equiv 0$.

9.13 $y(x)=-\frac{1}{5}\left(\frac{ch\,2x}{2\ sh\ \pi}+\cos x\right)$.

9.14 $y(x)=2+\ln(4x)+\frac{4+\ln 4}{x}$.

9.15 $y(x)=x+1+\frac{2+\ln x}{\ln 2}$.