ГЛАВА II

ЗАДАЧА ИНТЕРПОЛЯЦИИ и ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ

§1. Постановка задачи интерполяции функции

1.1 Постановка задачи интерполяции

Мы ограничимся рассмотрением задачи интерполяции для функции одной вещественной переменной.
Пусть на отрезке $a \le x \le b$ задана невырожденная сетка $\overline{\omega}$

$$\overline{\omega} = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$$

и в её узлах известны значения функции $y = f(x)$:

$$f(x_0) \equiv y_0 \quad ; \quad f(x_1) \equiv y_1 \quad ; \quad \cdots \quad f(x_{n-1}) \equiv y_{n-1} \quad ; \quad f(x_n) \equiv y_n.$$

В задаче интерполяции требуется построить интерполяционную функцию — *интерполянту* $g(x)$ так, чтобы её значения совпадали бы со значениями интерполируемой функции $f(x)$ в узлах сетки $\overline{\omega}$, т.е.

$$g(x_i) = y_i \quad ; \quad i = \overline{0, n} \tag{1}$$

При этом основная цель интерполяции получить *быстрый* и *экономичный* алгоритм вычисления значений функции $g(x)$ для значений x не содержащихся в исходной таблице, т.е. $x \in [a; b]$ и $x \ne x_i$.

Как выбрать интерполянту $g(x)$ и как оценить погрешность интерполяции $\|f(x) - g(x)\|$ (в некоторой норме)?

Отвечая на эти вопросы, мы ограничимся рассмотрением задачи *линейной интерполяции* (относительно базисных функций $\Phi_k(x)$), т.е. рассмотрим ситуацию, когда интерполирующая функция $g(x)$ строится в виде линейной комбинации некоторых базисных функций $\{\Phi_k(x)\}$ в свою очередь достаточно элементарных

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \Phi_k(x) \quad ,$$

где $\{\Phi_k(x)\}$ — фиксированные, линейно независимые функции; $c_0, c_1, \ldots, c_n$ — неопределенные пока коэффициенты.

Из условий интерполяции (1) мы получаем систему $(n+1)$ уравнения относительно коэффициентов $\{c_k\}$

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \Phi_k(x_i) = y_i \quad , \quad i = 0, \ldots, n.$$

Предположим, что система функций $\{\Phi_k(x)\}$ такова, что при любом невырожденном выборе узлов сетки $\overline{\omega}$ отличен от нуля определитель

$$\Delta(\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n) = \begin{vmatrix} \Phi_0(x_0) & \Phi_1(x_0) & \cdots & \Phi_n(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_0(x_n) & \Phi_1(x_n) & \cdots & \Phi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0 \quad .$$

Такую систему интерполяционных функций называют *чебышевской системой интерполяционных функций.* В этом случае на данной сетке $\overline{\omega}$ по известным значения $y_i, i = 0, \ldots, n$ однозначно определяются коэффициенты интерполяционного многочлена $\{c_k\}_{k=\overline{0,\ldots,n}}$.

Теорема. *Для разрешимости задачи линейной интерполяции необходимо и достаточно чтобы система функций $\{\Phi_k(x)\}$ образовывала на $[a;b]$ чебышевскую систему интерполяционных функций.*

В качестве систем линейно независимых интерполяционных функций $\{\Phi_k(x)\}$ чаще всего выбирают степенные или полиномиальные функции $\Phi_k(x) = x^k$; тригонометрические функции $\Phi_k(x) = \left\{ {\cos(kx) \atop \sin(kx)} \right\}$; показательные функции $\Phi_k(x) = e^{kx}$ и другие.

Мы ограничимся рассмотрением случая *полиномиальной* интерполяции.

Замечания: Табличный способ задания функции $y = f(x)$ на сетке $x \in \overline{\omega}$ и связанная с этим необходимость интерполяции функции наиболее характерны для представления результатов *физического* эксперимента и для описания *дискретной* или *вычислительной* модели на ЭВМ.

Задача интерполяции, как задача перестройки таблиц значений функции с одной сетки на другую, является характерной задачей обработки данных *физического* эксперимента.

В дальнейшем мы используем решение задачи интерполяции при построении приближенных методов вычисления интегралов; при разностной аппроксимации дифференциальных уравнений на основе интегральных тождеств; в задачах минимизации и в других вопросах.

Постановка задачи интерполяци в форме (1) не единственно возможная. Возможны и другие постановки *задачи интерполяции*, например задача интерполяции Эрмита [*1)] и другие виды задачи интерполяции.

Итак рассмотрим

§2. Полиномиальная интерполяция

2.1 Существование и единственность интерполяционного полинома

Пусть входной информацией для нас является множество точек $\{(x_k; y_k)\}_{k=\overline{0,\ldots,n}}$. Интерполянту $g(x)$ мы будем искать в виде *интерполяционного полинома*

$$g(x) \equiv P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k. \qquad (2)$$

[*1)] Эта постановка связана с интерполяцией функции по известным значения функции и её производных до n-ого порядка включительно, заданными в некоторой точке $x = x_0$.

Условия интерполяции (1) $g(x_i) = y_i$ приводят к системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов $\{c_k\}$:

$$\begin{cases} c_0 + c_1x_0 + \dots + c_nx_0^n &= & y_0 \\ c_0 + c_1x_1 + \dots + c_nx_1^n &= & y_1 \\ \qquad \dots & & \\ c_0 + c_1x_n + \dots + c_nx_n^n &= & y_n. \end{cases}$$

Определитель этой системы (определитель Вандермонда) отличен от нуля на произвольной невырожденной сетке $\overline{\omega}$

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} =$$

$$= (x_n - x_{n-1})\dots(x_n - x_0)(x_{n-1} - x_{n-2})\dots(x_{n-2} - x_0)\dots(x_1 - x_0) =$$

$$= \prod_{0 \le m < k \le n} (x_k - x_m) \neq 0.$$

Тем самым, система функций $\{x^k\}$ — *чебышевская* система интерполяционных функций на $[a; b]$ и справедлива

Теорема. *Интерполяционный полином (2) существует и единственен.* *1)

2.2 Интерполяционный полином Лагранжа

При построении интерполяционного полинома $P_n(x)$ (2) мы взяли в качестве системы функций $\Phi_k(x) = x^k$. С определенной точки зрения более удобной является система полиномов степени n, называемая *базисом Лагранжа*, $\{l_k^{(n)}(x)\}_{k=0,\dots,n}$, определенная из соображений: каждый $l_k^{(n)}(x)$ - полином n-ой степени, равный нулю во всех узлах сетки $\overline{w}$ кроме k-го, где он равен 1

$$l_k^{(n)}(x_i) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \qquad i, k = \overline{0, n}$$

Нетрудно построить эти полиномы. Действительно, зная корни полинома мы можем утверждать, что полином

$$l_k(x) \equiv l_k^{(n)}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

решает поставленную задачу.

Преобразуем базис $\{l_k(x)\}$. Введем в расмотрение полином $(n+1)$-ой степени

$$w(x) \equiv w_{\overline{0,n}}(x) = (x - x_0)\dots(x - x_n) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

*1)Однако *интерполяционный полином* может быть записан в различной форме.

Найдем его производную в точке $x = x_k$, имеем

$$w'(x)|_{x=x_k} = \left|\begin{array}{l}(n+1)\text{ слагаемое, но все, содер-}\\ \text{жащие скобку } (x-x_k) \text{ при под-}\\ \text{становке } x = x_k \text{ дадут } 0\end{array}\right| = (x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_n).$$

Тогда

$$l_k(x) = \frac{w(x)}{(x - x_k)w'(x_k)}$$

и есть *базис полиномов Лагранжа.*

Отметим, что *построенный базис единствснен.* Действительно, если существует полином $\bar{l}_k(x)$ при тех же условиях, то полином

$$q^{(n)}(x) = l_k(x) - \bar{l}_k(x)$$

есть полином n-ой степени обращающийся в ноль в $(n+1)$ -ой точке $x_0, \ldots, x_n$. Он тождественно равен нулю и, следовательно, $\bar{l}_k(x) = l_k(x)$.

Теперь легко записать решение задачи полиномиальной интерполяции. Полином $y_k \cdot l_k(x)$ принимает в узле x_k значение y_k и равен нулю во всех осталных узлах сетки $\overline{w}$ (при $x_i \neq x_k$). Тогда

$$L_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} l_k(x) y_k = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{w(x)}{(x - x_k)w'(x_k)} \tag{3}$$

представляет собой полином степени не выше n и $L_n(x_i) = y_i$, т. е. является *интерполяционным полиномом.*

Формулу (3) называют *интерполяционным формулой Лагранжа*, а соответствующий полином $L_n(x)$ — *интерполяционным полиномом Лагранжа.*

Замечания. Нетрудно оценить число арифметических действий при вычислении по формуле (3). В главном порядке по n это есть величина $O(n^2)$.

2.3 Интерполяционный полином Ньютона

Удобным представлением *интерполяционного полинома* для практических вычислений (особенно ручных) является запись *интерполяционного полинома* (того же самого) в виде *интерполяционного полинома Ньютона.*

Для этого введем в рассмотрение так назывемые *разделенные разности* сеточной функции $\{f_i\}$. Определим их рекурентно.

Разделенные разности первого порядка, построенные на узлах x_i, x_j определяются следующим образом

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} = \left|\begin{array}{l}\text{они}\\ \text{симмет-}\\ \text{ричны}\end{array}\right| = \frac{f(x_j) - f_i}{x_j - x_i} = f(x_j, x_i).$$

Разделенная разность второго порядка на узлах x_i, x_j, x_k определяется как первая разделенная разность от предыдущих разделенных разностей

$$f(x_i, x_j, x_k) = \frac{f(x_i, x_j) - f(x_j, x_k)}{x_i - x_k}; \qquad \text{и т. д.}$$

Если известны *разделенные разности* k -го порядка, то *разделенные разности* $(k+1)$-го порядка на узлах $x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+k+1}$ определяются как

$$f(x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+k+1}) = \frac{f(x_j,\ldots,x_{j+k}) - f(x_{j+1},\ldots,x_{j+k+1})}{x_j - x_{j+k+1}} =$$

$$\frac{f(x_{j+1},\ldots,x_{j+k+1}) - f(x_j,\ldots,x_{j+k})}{x_{j+k+1} - x_j}.$$

Заметим, что при рассмотрении введенных понятий соседство узлов сетки не обязательно, важно их количество: для *разделенной разности* k-го порядка — $(k+1)$ узел.

Далее мы будем рассматривать *разделенные разности*, составленные только по соседним узлам. Исходная таблица значений функции $\{f(x_i)\}$ позволяет построить следующие разделенные разности указанного типа:

разности	0-го	1-го	2-го	$\cdots$	$(n-1)$-го	n-го
x_0	$f(x_0)$			$\cdots$		
		$f(x_0, x_1)$		$\cdots$		
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0, x_1, x_2)$	$\cdots$		
		$f(x_1, x_2)$		$\cdots$		
x_2	$f(x_2)$		$f(x_1, x_2, x_3)$	$\cdots$		
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		
				$\cdots$	$f(x_0, \ldots, x_{n-1})$	
				$\cdots$		$f(x_0, \ldots, x_n)$
				$\cdots$	$f(x_1, \ldots, x_n)$	
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$		$f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$	$\cdots$		
		$f(x_{n-1}, x_n)$		$\cdots$		
x_n	$f(x_n)$			$\cdots$		
кол-во	$n+1$	n	$n-1$	$\cdots$	2	1

Отметим особенности этих разделенных разностей:

Если табличная функция сама по себе полином n-ой степени, т. е. $f(x) \equiv P_n(x) \equiv p(x)$, то её первая *разделенная разность*

$$p(x, x_0) = \frac{p(x) - p(x_0)}{x - x_0}$$

есть полином $(n-1)$-ой степени, поскольку в числителе дроби стоит полином, равный нулю при $x = x_0$, т. е. делящийся нацело на $(x - x_0)$.

Вторая *разделенная разность*

$$p(x, x_0, x_1) = \frac{p(x, x_0) - p(x_0, x_1)}{x - x_1}$$

является полиномом $(n-2)$-ой степени, поскольку в числителе полином $(n-1)$-ой степени, равный нулю в точке $x = x_1$.

Таким образом $(n+1)$ *разделенная разность* для полинома n-ой степени *тождественно равна нулю.*

Из определения разделенных разностей получим

$$\begin{aligned}
&p(x) = p(x_0) + (x - x_0)p(x, x_0)\\
&p(x, x_0) = p(x_0, x_1) + (x - x_1)p(x, x_0, x_1)\\
&p(x, x_0, x_1) = p(x_0, x_1, x_2) + (x - x_2)p(x, x_0, x_1, x_2)\\
&\dots\\
&p(x, x_0, x_1, \dots, x_{n-2}) = p(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) + (x - x_{n-1})\, p(x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1})\\
&p(x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = p(x_0, x_1, \dots, x_n) + (x - x_n)\, \underbrace{p(x, x_0, x_1, \dots, x_n)}_{\equiv 0}.
\end{aligned}$$

Осуществляя обратную подстановку (рекурентно) найдем

$$\begin{gathered}
p(x) = p(x_0) + (x - x_0)\Big\{p(x_0, x_1) + (x - x_1)\{p(x_0, x_1, x_2) + \dots\\
\dots + (x - x_{n-2})[p(x_0, \dots, x_{n-1}) + (x - x_{n-1})(p(x_0, \dots, x_n) + 0]\} \dots \Big\} =\\
= p(x_0) + (x - x_0)p(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)p(x_0, x_1, x_2) + \dots\\
\dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-2})p(x_0, \dots, x_{n-1}) +\\
+(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})p(x_0, \dots, x_n).
\end{gathered}$$

Осталось учесть последнее: если $p(x)$ - интерполяционнный полином для функции $f(x)$, то $p(x_i) = f(x_i)$ и мы получим явную форму записи интерполяционного многочлена:

$$\begin{gathered}
N_n(x) \equiv f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \cdots\\
+ (x - x_0) ... (x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, ... x_n)
\end{gathered} \qquad (4)$$

в виде *интерполяционного многочлена Ньютона.*

2.4 Погрешность полиномиальной интерполяции

Остановимся теперь на вопросе о *погрешности* полиномиальной интерполяции. Пусть $P_n(x)$ обозначает полином степени не выше, чем n, который решает задачу интерполяции функции $f(x)$ на сетке $\overline{\omega}$ (при этом мы отвлекаемся от способа получения этого полинома в виде (3) или (4)).

Требуется, в некотором смысле, оценить разность

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Чтобы провести эту оценку через $f(x)$, предположим, что наша функция $f(x)$ имеет непрерывные до $(n+1)$ порядка включительно производные на $[a; b]$, то есть $f(x) \in C^{(n+1)}[a; b]$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(z) = f(z) - P_n(z) - A\omega(z),$$

где $A = const$; $\omega(z) = \omega_{\overline{0,n}}(z) = \prod\limits_{i=0}^{n} (z - x_i)$ - введенный ранее многочлен $(n+1)$ степени.

И определим const A из того условия, чтобы в произвольной фиксированной точке $x \neq x_k$; $k = \overline{0, n}$ выполнялось равенство $\varphi(x) = 0$. Тогда

$$A = \left.\frac{f(z) - P_n(z)}{\omega(z)}\right|_{z=x} = \frac{f(x) - P_n(x)}{\omega(x)}, \quad \text{ибо } \omega(x) \neq 0 \quad \text{при } x \neq x_k.$$

С другой стороны, определенная так функция $\varphi(z)$ - непрерывна на $\left[\widetilde{a} = \min(x, x_0, x_1, ...x_n); \widetilde{b} = \max(x, x_0, x_1, ...x_n)\right]$, имеет производную и обращается в нуль в $(n+2)$ точках $x, x_0, x_1, ...x_n$ отрезка $\left[\tilde{a}; \tilde{b}\right]$. По теореме *Ролля*, отсюда следует, что существует $(n+1)$ внутенняя точка на $\left[\tilde{a}; \tilde{b}\right]$, где $\varphi'(z) = 0$. Аналогично, существует n точек, где $\varphi''(z) = 0$ и т.д.
Следовательно, существует одна точка, в которой

$$\varphi^{(n+1)}(z) = 0,$$

то есть $\exists \xi \in \left(\widetilde{a}; \widetilde{b}\right)$ такая, что $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$. Но

$$\varphi^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - A(n+1)! \,|_{z=\xi},$$

(ибо $(n+1)$-ая производная от полинома n-ой степени $P_n(z)$ тождественно равна 0). Таким образом

$$A = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{f(x) - P_n(x)}{\omega(x)}.$$

Для представления остаточного члена $R_n(x)$, получаем фомулу:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x); \quad \xi \in \left(\widetilde{a}; \widetilde{b}\right),$$

здесь ξ -формально зависит от x*1).
Это и есть исходное выражение, которое позволяет получить оценку погрешности интерполяции. Имеем

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)|, \tag{5}$$

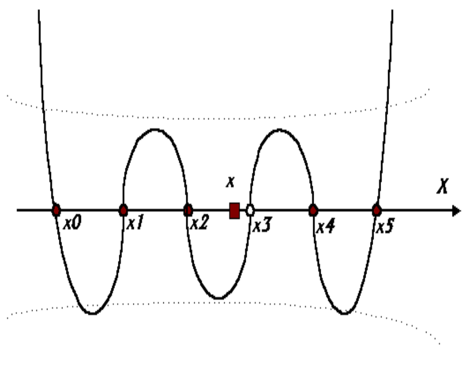
где $M_{n+1} = \max\limits_{[\widetilde{a};\widetilde{b}]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$*2).

Дальнейшее использование оценки (5) связано с изучением характера поведения $|\omega(x)|$ при произвольном расположении узлов интерполяции, что достаточно сложно и громоздко. Ограничимся наиболее часто рассматриваемым на практике случаем:

1) Равномерной сетки $\overline{\omega}$ с постоянным шагом $h = \frac{b-a}{n}$:

2) Узлы интерполяции на этой сетке выбраны подряд.

Для наглядности выберем $n = 5$. Тогда $\omega(x)$ имеет примерно следующий вид



Многочлен

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_4)(x - x_5)$$

полином шестой степени.

Вблизи центральных узлов интерполяции экстремум $|\omega(x)|$ невелик. Для крайних интервалов — побольше.

Вне сетки узлов $|\omega(x)|$ бысто возрастает.

*1)От x зависит A в представлении погрешности.
*2)Поскольку $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна.

Рассмотенный эскиз частично обосновывает вывод:

1)*экстраполяция* ненадежна. Результатам, если $x \notin [a;b]$ нельзя доверять;

2)при интерполяции на равномерной сетке выгодно так выбирать узлы $\{x_i\}$ из таблицы, чтобы точка x была по возможности близка к центру конфигурации узлов. Это обеспечивает большую точность и надежность интерполяции.

Сравнительно просто дальнейшая оценка погрешности интерполяции проводится в случае *нечетного* $n = 2k+1$ (когда на сетке $\overline{\omega}$ расположены $2k+2$ узла и имеется $2k+1$ интервал длины h).

Пусть при этом рассматриваемое x находится в центральном интервале $x \in (x_k; x_{k+1})$. На этом интервале экстремум $\omega(x)$ (в силу симметрии $\omega(x)$ относительно точки $x_0 + kh + \frac{h}{2}$) достигается точно в середине $(k+1)$-го интервала сетки $\overline{\omega}$, и его можно оценить:

$$\left|\omega\left(x_0 + kh + \tfrac{h}{2}\right)\right| = \left(\left(kh + \tfrac{h}{2}\right)\left((k-1)h + \tfrac{h}{2}\right)...\tfrac{h}{2}\right)^2 =$$

$$= \left[\frac{h^{k+1}(2k+1)(2k-1)...3\cdot 1}{2^{k+1}}\right]^2 = \left(\frac{h^{k+1}\cdot(2k+1)!}{2^{k+1}\cdot 2^k\cdot k!}\right)^2.$$

Далее, применяя формулу Стирлинга $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ при известной аккуратности в неравенствах получаем окончательную оценку

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi n}} M_{n+1}\left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}; \quad x \in (x_k, x_{k+1}) \tag{6}$$

погрешности интерполяции в центральном интервале сетки $\overline{\omega}$.

Замечания:

1) Если a'priori известна оценка M_{n+1} для $max|f^{(n+1)}(x)|$ на $[a;b]$, то из формулы (6) можно найти число узлов $(n+1)$, необходимое для интерполяции с заданной точностью;

2) Из формулы (6) видно, что если перейти к интерполяции по таблице с более мелким шагом (при том же числе узлов сетки n), то погрешность интерполяции будет убывать как величина порядка $O\left(h^{n+1}\right)$ (асимптотика погрешности $\delta_3 y = O(h^{n+1})$). Поэтому говорят, что интерполяционный многочлен $P_n(x)$ обеспечивает $(n+1)$-ый порядок точности интерполяции и интерполяция имеет погрешность $O\left(h^{n+1}\right)$.

2.5 Сходимость интерполяционного процесса

Остановимся несколько более подробно на сходимости интерполяционного процесса. Говоря о сходимости интерполяционного процесса, ищут ответ на вопрос о стремлении в некотором смысле к нулю погрешности интерполяции $\|f(x) - P_n(x)\|$ при неограниченном увеличении числа узлов интерполяции $n \to \infty$.

Для этого рассматривают на $[a;b]$ последовательность сеток [*1)]

$$\{\overline{\omega}(x)\} : \overline{\omega}_0 = \left\{x_0^{(0)}\right\}; \overline{\omega}_1 = \left\{x_0^{(1)}, x_1^{(1)}\right\}; ...\overline{\omega}_n = \left\{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, ...x_n^{(n)}\right\}; ...$$

[*1)]Таких последовательностей сеток бесконечно много.

Рассмотрим соответствующее им множество интерполяционных полиномов $\{P_n(x)\}$ (зависящих от $\{\overline{\omega}_n(x)\}$), построенных для интерполируемой функции $f(x)$ на сетке $\overline{\omega}_n = \left\{x_i^{(n)}\right\}_{\overline{0,n}}$.

Говоря о сходимости функциональной последовательности $\{P_n(x)\}$, обычно имеют в виду:

1)поточечную сходимость к $f(x)$ на $[a;b]$:

$\forall x, \lim\limits_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)\, x \in [a;b]$; $\quad P_n(x) \to f(x)$ на $[a;b]$;

2)равномерную сходимость к $f(x)$ на $[a;b]$:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{[a;b]} |f(x) - P_n(x)| = 0$; $\quad P_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a;b]$;

3)сходимость к $f(x)$ в среднем с весом $\rho(x) \geq 0$ на $[a;b]$:

$\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b (f(x) - P_n(x))^2 \rho(x)\, dx = 0$; $\quad P_n(x) \underset{[a;b]}{\overset{\text{ср}}{\to}} 0$ в седнем на $[a;b]$.

Подчеркнём ещё раз, что последовательность сеток $\overline{\omega}_n$ фиксирована при рассмотрении соответствующих пределов.

В нашем курсе мы ограничимся практическими рекомендациями.

С практической точки зрения, сходимость интерполяции можно изучать следующим образом:

1)либо сохраняя степень интерполяционного полиноми, уменьшать шаг сетки $(h \to 0, n = const)$;

2)либо сохраняя шаг сетки, увеличивать число используемых узлов интерполяции на $[a;b]$, то есть увеличивать степень интерполяционного многочлена: $n \to \infty, h = const$.

1) Уменьшение шага сетки $(h \to 0)$. Если $f(x) \in C^{(n+1)}_{[a;b]}$, то, как мы уже отмечали, погрешность метода при интерполяции многочленом $P_n(x)$, есть, согласно (6), величина порядка $O(h^{n+1})$, т.е. $|f(x) - P_n(x)|$ неограниченно убывает при $h \to 0$ и при этом интерполяционный многочлен сходится к $f(x)$ в некотором смысле "равномерно".

Точнее говоря, для каждого $x \in [a;b]$ выбираются свои узлы интерполяции, ближайшие именно на данной сетке к точке x. При этом точка x лежит заведомо между крайними узлами, использованными при построении интерполяционного многочлена. Тогда, равномерно по x, можно в формуле (5) провести оценку

$$\left|\omega_{\overline{0,n}}(x)\right| = \left|\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)\right| \leq \max_i |x - x_i|^{n+1} \leq (nh)^{n+1}$$

nh–длина отрезка $\left[\widetilde{a};\widetilde{b}\right]$ (своего для каждой сетки).

Отсюда, для заданной точности ε, можно получить условие на величину шага h сетки, обеспечивающего данную точность:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(nh)^{n+1} \leq \varepsilon.$$

Напомним, что n фиксировано и тем самым

$$h \leq \sqrt[n+1]{\frac{\varepsilon(n+1)!}{M_{n+1}}} \cdot \frac{1}{n}.$$

Все сетки с данным и более мелким шагом для любой точки $x \in [a;b]$ дают погрешность интерполяции многочленом $P_n(x)$, с указанным образом расположенными узлами, не боле, чем ε.

2) Увеличение числа узлов $(n \to \infty)$.

Нужно сразу же оговориться, что увеличение числа узлов, то есть степени интерполяционного многочлена, не всегда целесообразно, так как:

а) не известно, как быстро растет оценка максимума модуля производной M_{n+1} с ростом её порядка;

б) у функции $f(x)$ может вообще быть лишь ограниченное число непрерывных производных.

В общем случае свойство сходимости или расходимости интерполяционного процесса зависит как от выбора последовательности сеток $\{\overline{\omega}_n\}$, так и от гладкости интерполируемой функции $f(x)$.

Ограничимся приведением отдельный фактов:

1) Легко привести примеры несложных функций, для которых интерполяционный процесс расходится. Так, для $y = |x|$, интерполяция на *равномерной* на $[-1;1]$ сетке не дает поточечной сходимости ни в одной точке x, кроме $x \in \{-1;0;1\}$

$$P_n(x) \not\to f(x); \quad \forall x \in [a;b] \setminus \{-1;0;1\};$$

2) Если $f(x)$ *целая* функция, то есть может быть разложена в степенной ряд с бесконечным $(R = \infty)$ радиусом сходимости, то при *произвольном (!)* выборе сеток $\{\overline{\omega}_n\}$

$$P_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad \text{на } [a;b].$$

С этой точки зрения *целые* функции хороши, но их запас не столь "велик" для практических целей.

3) **Теорема** *(Фабера). Для любой последовательности сеток $\{\overline{\omega}_n\}$ найдётся непрерывная на $[a;b]$ функция $f(x)$ такая, что для неё нет равномерной сходимости $P_n(x)$*

$$P_n(x) \not\rightrightarrows f(x) \quad \text{на } [a;b];$$

С другой стороны

4) **Теорема** *(Марцинкевича). Для любой непрерывной на $[a;b]$ функции $f(x) \in C[a;b]$ найдется такая последовательность сеток $\{\overline{\omega}_n\}$ такая, что имеет место равномерная сходимость интерполяционных полиномов*

$$P_n \rightrightarrows f(x) \quad \textit{на } [a;b].$$

5) Сходимость интерполяционного многочлена в среднем $P_n(x) \xrightarrow{\text{ср}} f(x)$ на $[a;b]$ можно всегда обеспечить, выбирая на $[a;b]$ специальную сетку. Пусть $\{\Phi_n(x)\}$ - система ортогональных на $[a;b]$ с весом $\rho(x)$ полиномов; пусть $\left\{x_i^{(n)}\right\}_{i=\overline{1,n}}$ — нули этих полиномов (они все лежат внутри $(a;b)$ и с ростом n они перемежаются). Используя эти точки в качестве узлов интерполяции, можно утверждать, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \left(f(x) - P_{n-1}(x)\right)^2 \rho(x)\, dx = 0.$$

(О подобного рода сетках мы специально поговорим в проблеме интегрирования.)
Общий вывод: В практике вычислений избегают использования интерполяционных полиномов высокой степени. Вместо этого для интерполяции $f(x)$ на большом отрезке используют *кусочно-полиномиальную интерполяцию.*

§3. Сплайн-интерполяция

Определение. *Сплайном порядка p на сетке $\overline{w}_n$ называется кусочно - полиномиальная порядка p функция, имеющая на $[a, b]$ непрерывные до $(p-1)$-го порядка включительно производные.*

Как мы постараемся показать преимуществом сплайнов перед обычной полиномиальной интерполяцией многочленом является, во-первых, их *сходимость*, и, вовторых, *устойчивость* процесса их вычисления.

Мы ограничимся рассмотрением распространенного частного случая — сплайна третьего порядка или *кубического сплайна.*

3.1 Определение кубического сплайна

Пусть на отрезке $[a, b]$ определена непрерывная (в дальнейшем достаточно гладкая) функция $f(x)$; задана невырожденная сетка $\overline{\omega}_n$

$$\overline{\omega}_n = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}.$$

Обозначим значения $f(x)$ в узлах сетки через $y_i = f(x_i)$. Тогда
Определение. *Кубическим сплайном $s_3(x) \equiv s(x)$ на данной сетке $\overline{w_n}$ называется кусочно - полиномиальная 3-го порядка функция, удовлетворяющая следующим требованиям:*
1) На каждом частичном интервале $[x_{k-1}, x_k]$ многочлен $s(x)$ — многочлен 3-ей степени:

$$\begin{gathered} s(x) = a_k + b_k(x - x_k) + \tfrac{c_k}{2!}(x - x_k)^2 + \tfrac{d_k}{3!}(x - x_k)^3 \\ x_{k-1} \le x \le x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n \end{gathered} \tag{s1}$$

2) Функция $s(x)$, её первая и вторая производные непрерывны на $[a, b]$, т. е.

$$s^{(l)}(x - 0) = s^{(l)}(x + 0); \quad ; \forall x \in [a, b], \quad l = 0, 1, 2 \tag{s2}$$

(нужно проверять лишь в узлах сетки).
3) В узлах сетки $\overline{w_n}$ функция $s(x)$ удовлетворяет условиям интерполяции

$$s(x_i) = y_i; \qquad i = 0, \ldots, n \tag{s3}$$

4) Дополнительным, в некотором смысле естественным, условием для единственности определения сплайна является краевое условие в граничных точках сетки x_0 и x_n. Ограничимся рассмотрением случая нулевой кривизны сплайна $s(x)$. Тогда в этих точках

$$s''(x_0) = s''(x_n) = 0. \tag{s4}$$