ГЛАВА IV

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§1.Постановка задачи. Метод простой итерации

Одной из наиболее распространённых вычислительных задач является задача нахождения *корня уравнения.*

Пусть $f(x)$ - непрерывная и достаточно гладкая функция действительного переменного x. Нас будет интересовать проблема нахождения всех или нескольких корней уравнения

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Естественное обобщение уравнения (1) на случай рассмотрения вектор-функции от m-мерного аргумента $x \in R^m$ приводит к задаче отыскания решения системы нелинейных уравнений:

$$f_i\left(x_1, ..., x_m\right) = 0, i = \overline{1, m}. \tag{$1'$}$$

Мы ограничимся именно такой постановкой $i = \overline{1, m}$ (предполагая некую замкнутость по числу неизвестных и уравнений).

В решении задачи (1) и ($1'$) выделяют несколько характерных этапов:

1) Нужно исследовать количество; характер (подразумевая под этим кратность) и расположение (локализацию) корней;

2) Выбор начального приближения. Поскольку алгоритм решения задач (1), ($1'$) представляет собой, как правило, итерационную процедуру построения последовательности $\{x_k\}$, $x_k \to x^*$, сходящейся к корню x^* уравнения (1), то особую роль играет выбор начального приближения x_0;

3) Собственно построение самой последовательности $\{x_k\}$;

Ограничемся случаем отыскания действительных корней, хотя уже в случае алгебраического уравнения (1) $f(x) \equiv p_n(x) = 0$ их может и не быть.

На примере уравнения (1), т.е. в случае уравнения с одним неизвестным, вопрос о локализации корня и об отделении корней решают, как правило, *методом дихотомии*, т.е. последовательным делением отрезка пополам. При этом в качестве нового частичного отрезка, содержащего корень, берут интервал вдвое меньшей длины, на котором происходит смена знака. Пусть смена знака происходит на интервале $[x_l; x_r]$. Тогда

$$f\left(x_l\right) \cdot f\left(x_r\right) \leq 0;\ f\left(x_{cp} = \frac{x_l + x_r}{2}\right) \cdot f\left(x_{(l?r)}\right) \leq 0.$$

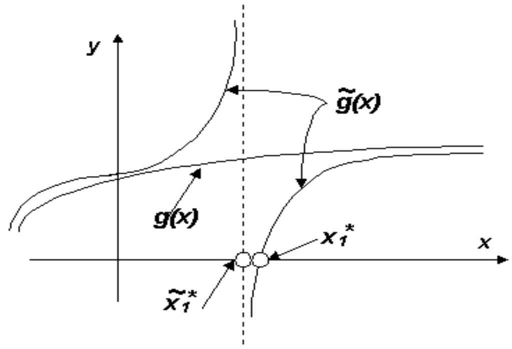
Проведенные таким образом несколько итераций позволяют локализировать часть корней (1) на интервалах некоторой сетки $\{x_i\}$.

После того, как один из корней, скажем x_1^*, найден - *выделяют* данный корень, т.е. переходт к рассмотрению функции $g(x)$:

$$g(x) = \frac{f(x)}{(x - x_1^*)}.$$

Если $f(x) \in Lip^{*1)}([a,b], c)$ — *липшиц-непрерывная* функция, то $g(x)$ является *непрерывной* функцией и корни $g(x)$ совпадают с корнями $f(x) = 0$ за исключением x_1^*, либо x_1^* имеет на единицу меньшую кратность.

На практике выделение корня нужно проводить аккуратно, с высокой точностью, ибо, поскольку мы находим приближенное значение корня $\widetilde{x}_1^*$, то функция $\widetilde{g}(x) = \frac{f(x)}{x - \widetilde{x}_1^*}$ имеет в точке x_1^* ноль и в точке $\widetilde{x}_1^*$ - полюс. Тем самым "сильно" отличается от $g(x)$ в некоторой окрестности x_1^*.



Возможность построения последовательности $x_k \to x^*$ основана, как правило, на рассмотрении задачи (1), (1′) как задачи "о неподвижной точке" некоторого отображения $\varphi(x)$

$$x = \varphi(x). \tag{2}$$

Обычно от (1) $\Rightarrow$ (2) переходят таким образом:

Умножим (1) на *непрерывную, достаточно гладкую, знакопостоянную* в G (области локализации корня) функцию $\tau(x)$ и добавим тождество $x = x$. Получим:

$$x = x + \tau(x) f(x) \equiv \varphi(x)$$

Приближенное решение задачи (2) строится, что естественно, методом *простой итерации* (или методом *последовательных приближений* — МПП) :

$$\begin{cases} x_{k+1} = \varphi(x_k), & k = 0, 1, 2, ... \\ x_0 = \overset{(0)}{x} & \text{- дано} \end{cases} \tag{3}$$

— *одношаговый итерационный метод.*

Говорят, что итерационная последовательность (3) $\{x_k\}$ обладает сходимостью p-го порядка к корню x^* (1), если для погрешности следующей итерации имеем оценку:

$$\|x_{k+1} - x^*\| = O\left(\|x_k - x^*\|^p\right); \quad p\text{- может быть и нецелым.}$$

Мы ограничемся рассмотрением итерационных последовательностей, обладающих линейной или квадратичной сходимостью.

[*1)] $f(x) \in Lip(G; c)$ если $\exists c$; $\forall x_1, x_2 \in G$ $|x_1 - x_2| < \delta$, имеем $|f(x_1) - f(x_2)| \le c|x_1 - x_2|$, т.е. её модуль непрерывности $\varepsilon(\delta) \le c \cdot \delta$.

§2.Сходимость метода простой итерации

Для наглядности рассмотрим обобщение задачи (2) на случай *непрерывного* отображения *полного* метрического просранства R в себя. При этом *отображение* $\varphi : R \Rightarrow R$ *называют сжимающим (сжатием в R), если* $\exists\, q \in (0,1)$*:*

$$\forall x, y \in R :\ \rho\left(\varphi\left(x\right), \varphi(y)\right) \leq q \cdot \rho\left(x, y\right)$$

Построение последовательности $x_k \to x^*$ основано на теореме о неподвижной точке:

Теорема.1 (*принцип сжимающего отображения*) *Если φ - непрерывное сжатие полного метрического пространства R, то существует единственная неподвижная точка x^* : $x^* = \varphi(x^*)$ и она является пределом последовательности:*

$$x_{k+1} = \varphi\left(x_k\right), \quad k = 0, 1, \ldots \quad \forall x_0 \in R$$

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x^*.$$

Доказательство: (Поскольку оно не связано с устройством конкретного пространства, то оно не столь громоздко и многие полезные моменты становятся нам яснее).

1) Покажем, что последовательность $\{x_k\}$ (3) *фундаментальна* в R. Пусть m, n — произвольные натуральные числа ($m > n$), тогда

$$\rho\left(x_m, x_n\right) = \rho\left(\varphi\left(x_{m-1}\right), \varphi\left(x_{n-1}\right)\right) \leq q \cdot \rho\left(x_{m-1}, x_{n-1}\right) \leq \ldots \leq q^n \rho\left(x_{m-n}, x_0\right).$$

Теперь оценим $\rho(x_{m-n}, x_0)$ через расстояние между соседними точками :

$$\rho\left(x_{m-n}, x_0\right) = \rho\left(x_0, x_{m-n}\right) \leq \rho\left(x_0, x_1\right) + \rho\left(x_1, x_2\right) + \ldots + \rho\left(x_{m-n-1}, x_{m-n}\right) \leq$$

$$\leq \rho\left(x_0, x_1\right) + q\rho\left(x_0, x_1\right) + \ldots + q^{m-n-1}\rho\left(x_0, x_1\right) \leq$$

$$\leq \rho\left(x_0, x_1\right)\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{m-n-1} + \ldots\right) = \rho\left(x_0, x_1\right)\frac{1}{1-q} \text{ — (так далеко ушли).}$$

Тогда

$$\rho\left(x_m, x_n\right) \leq \frac{q^n}{1-q}\rho\left(x_0, x_1\right) \qquad (*)$$

и не зависит от m для любого n, т.о. $\{x_n\}$ — *фундаментальна.*

2) В силу *полноты* R у $\{x_n\}$ есть предел, пусть $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$. Покажем, что это неподвижная точка непрерывного отображения φ, действительно:

$$x^* = \lim_{k \to \infty} x_k = \lim_{k \to \infty} \varphi\left(x_{k-1}\right) = \varphi\left(\lim_{k \to \infty} x_{k-1}\right) = \varphi\left(x^*\right).$$

Итак

$$x^* = \varphi\left(x^*\right).$$

3) Покажем, что x^* — единственная неподвижная точка отображения φ в R. Допустим противное и назовем эти точки $\overline{x}$ и $\overline{\overline{x}}$. Точки $\overline{x}$ и $\overline{\overline{x}}$ неподвижные точки для отображения φ, тогда:

$$\rho\left(\overline{x}, \overline{\overline{x}}\right) > 0, \text{ но } \rho\left(\overline{x}, \overline{\overline{x}}\right) = \rho\left(\varphi\left(\overline{x}\right), \varphi\left(\overline{\overline{x}}\right)\right) \leq q \cdot \rho\left(\overline{x}, \overline{\overline{x}}\right) \quad \Rightarrow \quad q \geq 1.$$

Что невозможно, ибо φ - сжатие ■

Обычно задача (2) рассматривается нами локально, т.е. в ситауции, когда корень x^* локализован. Вопрос о локализации корня решает

Теорема 2. Пусть область G — открытая область полного метрического пространства в R и пусть на G задано сжимающее отображение в R — φ: $G \Rightarrow R$. Тогда для существования неподвижной точки x^* отображения φ в области G, $x^* \in G$ необходимо и достаточно, чтобы нашелся в области G замкнутый шар $\overline{K}(x_0, r) \subset G$, т.е.

1) нашлось положительное число $r > 0$;

2) и точка $x_0 \in G$ — такая, что замкнутый шар $\overline{K}(x_0, r) \subset G$ и имеет место неравенство

$$\rho(x_0, \varphi(x_0)) \leq (1-q)\, r.$$

(Образ центра оставался бы в шаре, т.е. $\overline{K}(x_0, r)$ - должным образом "центрирован").

Доказательство. (Необходимость)

Пусть в G существует неподвижная точка x^* для отображения φ. Поскольку G открытая область, то x^* - внутренняя точка области $G \Rightarrow$ существует шар $\overline{K}(x^*, r) \subset G$ (здесь $r < dist(x^*, \partial G))$).

Тогда

$$\rho(x^*, \varphi(x^*)) = 0 \leq (1-q)\, r$$

и подавно для $x_0 = x^*$.

Достаточность. В силу условий теоремы существуют такие x_0 и $r > 0$, что замкнутый шар $\overline{K}(x_0, r) \subset G$. Покажем, что $\varphi(\overline{K}(x_0, r)) \subseteq \overline{K}$, т.е. φ - сжатие внутри $\overline{K}$. Действительно:

$$\forall x \in \overline{K}(x_0, r) : \rho(\varphi(x), x_0) \leq \rho(\varphi(x), \varphi(x_0)) + \rho(\varphi(x_0), x_0) \leq$$

$$\leq q\rho(x, x_0) + (1-q)\, r \leq r, \text{ т.о. } \varphi(x) \in \overline{K}(x_0, r).$$

Поскольку $\overline{K}(x_0, r)$ — замкнутое полное подпространство в R и в нём выполнены условия *Теоремы 1*, то $\Rightarrow$ существует единственная точка $x^* \in \overline{K}(x_0, r)$ такая, что

$$x^* = \varphi(x^*).$$

Подавно $x^* \in G$ ■

Замечания:

1) В условиях Т.2 не нужно рассматривать отображение φ на всем R. Это означает, что мы локализовали x^* - корень уравнения (1) в пределах шара $\overline{K}(x_0, r)$.

2) Метод последовательных приближений обеспечивает не хуже, чем линейную сходимость $\{x_k\}$:

$$\rho(x_{k+1}, x^*) = \rho(\varphi(x_k), \varphi(x^*)) \leq q \cdot \rho(x_k, x^*) \leq ... \leq q^{k+1}\rho(x_0, x^*); \tag{4}$$

3) Оценка погрешности на n-ой итерации следует из фундаментальности $\{x_k\}$:

$$\rho(x_n, x_m) \leq \frac{q^n}{1-q}\rho(x_0, x_1);$$

Переходя к пределу, получим

$$\lim_{m\to\infty}\rho(x_n, x_m) = \rho(x_n, x^*) \leq \frac{q^n}{1-q}\rho(x_0, x_1); \tag{5}$$

(оценка не содержит неизвестной точки x^*.)

§3. Итерационные методы решения уравнения $f(x) = 0$ с одним неизвестным

Одношаговые итерационные методы удобно записать в виде *метода простой итерации:*

$$\begin{cases} x_{n+1} = \varphi(x_n) = x_n + \tau(x_n) f(x_n); \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ x_0 \text{ - дано.} \end{cases}$$

Среди них

а) *Метод релаксации*: $\tau(x_n) = \tau - const$, т.е. стационарный метод

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} = f(x_n);$$

(получается из решени на установление задачи, для дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$)

б) *Метод Ньютона*: (метод линеаризации или метод касательных)

Получается заменой уравнения (1) $f(x) = 0$ "близким" ему уравнением в окрестности приближения x_n из разложения $f(x)$ в ряд Тейлора до членов 1-го порядка включительно:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + R_1$$, что дает приближенное уравнение

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$$

или

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad f'(x_n) \neq 0$$

носит название метода *касательных*[*1)].

Модифицированный метод Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_p)}.$$

Реализуя метод, избегают многократного вычисления $f'(x)$ (только на шагах обновления x_p).

в)*Метод секущих*: Этот метод получают либо из метода Ньютона заменой $f'(x_n)$ разделенной разностью

$$f(x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Либо рассматривая *интерполяционный метод* 1-ого порядка :

$$f(x) = 0 \sim N_1(x) = 0$$

[*1)]уравнение касательной в точке $(x_n, y(x_n))$ имеет вид $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$

т.е.

$$f(x_n) + (x - x_n) f(x_n, x_{n-1}) = 0.$$

Получаем алгоритм

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n, x_{n-1})} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

x_0, x_1 — дано. Мы получили *двухшаговый* итерационный метод.

г) *Метод парабол* - итерполяционный метод 2-го пордка. Пусть приближения x_{n-2}, x_{n-1}, x_n - известны. Строим интерполяционный полином

$$N_2(x) = f(x_n) + (x - x_n) f(x_n, x_{n-1}) + (x - x_n)(x - x_{n-1}) f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}).$$

Из уравнения

$$N_2(x) = 0$$

— это квадратное уравнение относительно $x - x_n = z, \quad az^2 + bz + c = 0$. Определим очередное приближение x_{n+1}. Пусть z_n наименьший по модулю корень$^{*1)}$, тогда

$$x_{n+1} = x_n + z_n.$$

Метод парабол позволяет отыскивать *комплексные корни* при действительном начальном приближении.

д) *Метод обратной интерполяции*: Этот итерационный метод получают с помощью интерполяции обратной к $f(x)$ функции $x = g(y)$

$$x^* : f(x^*) = 0 \Leftrightarrow g(0) = x^*.$$

Ставится задача вычисления значения $g(y)$ в нуле: $x_{n+1} = g(0)$.
Пусть известны приближения $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ и соответствующие значения

$$y_0 = f(x_0); \ldots; y_n = f(x_n).$$

Построим на сетке $\{y_i\}_{i=\overline{0,n}}$ интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(y)$ для обратной функции $g(y)$

$$L_n(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(y)}{(y - y_k)\omega'(y_k)} \cdot x_k.$$

Тогда

$$x_{n+1} = L_n(0),$$

что "легко" вычисляется (свободный член $L_n(y)$).

Задача. *Для случая $n = 1$ (т.е. двух точек $x_n, x_{n-1} \to g(y) = L_1(y)$) построить x_{n+1} (это очевидно — метод секущих). Для случая $n = 2$ получить формулы.*

$^{*1)}$Написать формулу наименьшего по модулю корня z_n

§4. Сходимость итерационных методов для уравнений $f(x) = 0$ с одним неизвестным

4.1 Достаточное условие существования и единственности решения. Сходимости метода простой итерации

Вернемся к итерационному уравнению (2)

$$x = \varphi(x)$$

в случае одной переменной. Для локализации корня применением к этому случаю *Теоремы Т1 и Т2:* Шар

$$\overline{K}(a;r) = \{x \in R^1 : |x - a| \ \leq r\} = [a - r; a + r]$$

— отрезок $[a-r; a+r]$ числовой прямой. Для гладких отображений $\varphi(x)$ достаточное условие сжатия формулируется через ограничение роста модуля производной $|\varphi'(x)|$ в рассматриваемой области. Получим

Теорема 3. *Если $\varphi(x)$ — непрерывно-дифференцируема и $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ на отрезке $\overline{K}(a;r)$, а сам отрезок $\overline{K}(a;r)$ таков, что*

$$|\varphi(a) - a| \leq (1 - q)r,$$

то:

1) Уравнение $x = \varphi(x)$ имеет на отрезке $\overline{K}(a;r)$ единственное решение $x^* \in \overline{K}(a;r)$.

2) Последовательность $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $x_0 \in \overline{K}(a;r)$ – дано (например: $x_0 = a$); сходится к неподвижной точке x^*, $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x^*$.

Доказательство. Действительно, при сформулированных условиях $\varphi(x)$ — сжатие в шаре $\overline{K}(a;r)$ с коэффициентом $q < 1$ поскольку

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| = \left| \begin{array}{l} \text{применяя} \\ \text{формулу} \\ \text{Лагранжа} \end{array} \right| = |\varphi'(\xi)||x' - x''| \leq q|x' - x''|.$$

Таким образом выполнены все требования *Теоремы 2* $\Rightarrow$ существует и единственна неподвижная точка $x^* \in \overline{K}(a;r)$. Последовательность x_n при произвольном выборе $x_0 \in [a - r; a + r]$ сходится к ней $x_n \to x^*$ ■

Удобным практически способом локализации относительно x^* является проверка достаточных условий:

Теорема 4. *Если уравнение (2) имеет решение x^* и $\varphi(x)$ - непрерывно-дифференцируемая в окрестности корня x^* функция, причем $|\varphi'(x^*)| < 1$, то $\exists \ \varepsilon > 0$ такое, что на отрезке $\overline{K}(x^*, \varepsilon)$ уравнение (2) имеет единственное решение x^* и метод последовательных приближений (МПП) (3) сходится к x^* при произвольном $x_0 \in \overline{K}(x^*, \varepsilon)$.*

Действительно: Из непрерывности $\varphi'(x)$ на отрезке $\overline{K}(x^*, r) \Rightarrow \exists q \in (0, 1)$ и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad \text{при} \quad x \in \overline{K}(x^*, \varepsilon).$$

Далее *Теорема 3* (для x^* выполнено условие $x^* - \varphi(x^*) = 0$) ■

4.2 Оценка погрешности метода последовательных приближений

Адаптируем к нашему случаю оценки (4) и (5) для погрешности МПП[*1)]. Напомним

$$\rho(x_n;x^*) = |x_n - x^*| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x^*)| \le q|x_{n-1} - x^*| \le ... \le q^n|x_0 - x^*|, \qquad (4')$$

МПП–метод первого порядка. Эта оценка позволяет утверждать не хуже, чем линейную сходимость МПП.
Оценка

$$|x_n - x^*| \le \frac{q^n}{1-q}|x_0 - x_n|, \qquad (5')$$

дает возможность эффективно оценить погрешность на n-ом шаге только через известные величины.

Для построения методов последовательных приближений, обладающих выше, чем линейной, сходимостью, нужны дополнительные требования на $\varphi(x)$.
Достаточно: *Если $\varphi(x)$ такова, что:*

$$\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \ldots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0, \quad \varphi^p(x^*) \ne 0$$

то

$$x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - \varphi(x^*) = \left|\begin{matrix}\textit{Формула Тейлора с}\\ \textit{центром в точке } x^*\end{matrix}\right| = \frac{(x_n - x^*)^p}{p!}\varphi^{(p)}(\xi); \quad \xi \in (x_n, x^*)$$

и при $|\varphi^{(p)}(x)| \le M_p$ получим

$$|x_{n+1} - x^*| \le \frac{M_p}{p!}|x_n - x^*|^p$$

т.е. $\{x_n\}$ интерационный процесс со сходимостью не ниже p-го порядка.
Теперь мы можем продолжить

$$|x_{n+1} - x^*| \le \frac{M_p}{p!}(\frac{M_p}{p!}|x_{n-1} - x^*|^p)^p \le ... \le \left(\begin{matrix}\text{продолжить и получить окончательную}\\ \text{формулу погрешности метода } p\text{-го}\\ \text{порядка}\end{matrix}\right). \qquad (6)$$

Замечания: 1) Формулы (4), (5) и (6) носят асимптотический характер и обеспечивают полученную сходимость итерационного метода в достаточно малой окрестности решения x^*.
2) Метод последовательного приближения, как и любой другой итерационный метод, выгодно отличается тем, что в нём не накапливается ошибка вычислений. Ошибка вычислений эквивалентна некоторому ухудшению очередного приближения, что отразится на числе итераций, но не на окончательной точности (если только итерационная последовательность остаётся на отрезке $\overline{K}(a,r)$).

[*1)] в R^1 своя метрика $\rho(x,y) = |x - y|$

4.3 Достаточные условия сходимости основных итерационных методов решения f(x)=0

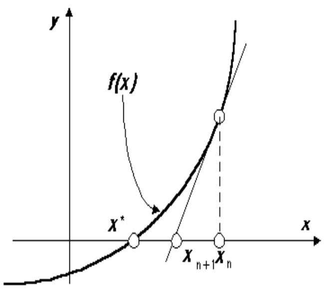
а) Метод релаксации. В методе релаксации

$$\varphi(x) = x + \tau f(x); \quad \varphi' = 1 + \tau f'; \quad |\varphi'(x^*)| \le 1 \Leftrightarrow$$
$$-1 < \varphi'(x^*) < 1; \quad \Leftrightarrow \quad -2 < \tau f'(x^*) < 0 \quad \left(\begin{array}{l}\text{условия выбора}\\ \text{итерационного}\\ \text{параметра } \tau\end{array}\right). \tag{7}$$

Согласно *Теореме 4 метод релаксации* сходится при (7) и соответствующем выборе x_0.

b) Метод Ньютона. Ограничимся случаем простого корня, т.е. $f'(x^*) \ne 0$. Тогда

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}; \quad \varphi' = 1 - \frac{f'^2 - ff''}{f'^2} = \frac{ff''}{f'^2} \Rightarrow \varphi'(x^*) = 0 \quad (!)$$



Таким образом это

1) Метод второго порядка (не хуже). Квадратичная сходимость обеспечивается в некоторой окрестности корня x^*;

2) подавно имеет место *Теорема 4* при условии что $x_0 \in \overline{K}(a, r)$, в той области где $|\varphi'(x)| \le q < 1$.

3) На практике: после того, как уединен корень, выбирают x_0 так, чтобы $f(x_0)f'(x_0) > 0$. Выполнение такого условия дает одностороннюю сходимость метода последовательного приближения (см. рисунок).

4.4 Ускорение сходимости линейных итерационных методов

Используем метод Эйткена повышения порядка точности итерационных формул. Пусть итерационный метод имеет линейную сходимость и нам известно три последовательных расчета: x_{n-2}, x_{n-1}, x_n. Используем оценку (4) (ограничимся случаем односторонней сходимости)

$$x_n - x^* \approx q^n(x_0 - x^*) + O(q^{n+1}).$$

Для эффективной оценки q и $(x_0 - x^*)$ наши расчёты дают

$$\begin{array}{rcl} x_n - x^* &=& q^n(x_0 - x^*) + O(q^{n+1}) \\ x_{n-1} - x^* &=& q^{n-1}(x_0 - x^*) + O(q^n) \\ x_{n-2} - x^* &=& q^{n-2}(x_0 - x^*) + O(q^{n-1}) \end{array} \qquad \Rightarrow$$

откуда

$$(x_{n-1} - x^*)^2 = (x_n - x^*)(x_{n-2} - x^*) \quad \Leftrightarrow$$
$$x_{n-1}^2 - 2x^* x_{n-1} + \cancel{x^{*2}} = x_n x_{n-2} - x^*(x_n + x_{n-1}) + \cancel{x^{*2}}$$

Тогда получим (в главном порядке по q)

$$x^* = \frac{x_{n-1}^2 - x_n x_{n-2}}{2x_{n-1} - x_n - x_{n-2}} = \frac{(x_{n-1} - x_n)^2 - x_n^2 + 2x_n x_{n-1} - x_n x_{n-2}}{2x_{n-1} - x_n - x_{n-2}} \Rightarrow$$

Окончательно мы получаем формулу $(n+1)$-го порядка точности

$$x^* = x_n + \frac{(x_{n-1} - x_n)^2}{2x_{n-1} - x_n - x_{n-2}} + O(q^{n+1}) \tag{8}$$

Полученная формула позволяет на очередном шаге итераций получить повышенную точность расчёта (если, конечно, не слишком велики накладные расходы при получении результата по формуле (8)).
Задание. *Получить оценку величины q.*

§5. Итерационные методы решения систем нелинейных уравнений

5.1 Постановка задачи. Каноническая форма одношагового итерационного метода

Напомним основное уравнение (1) для случая многих переменных

$$f_i(x_1, ..., x_m) = 0, i = 1, \ldots, m; \quad \Leftrightarrow \quad F = 0.$$

Каноническая форма записи *одношагового итерационного метода* такова:

$$\begin{cases} A_{k+1} \frac{\overset{(k+1)}{x} - \overset{(k)}{x}}{\tau_{k+1}} + F(\overset{(k)}{x}) = 0 \\ \overset{(0)}{x} = x_0. \end{cases} \tag{9}$$

Здесь τ_{k+1} - числовой итерационный параметр: A_{k+1} - невырожденная $\forall k$ матрица размерности $m \times m$; $det A_{k+1} \neq 0$: $k = 0, 1, 2, \ldots$

Очередное приближение $\overset{(k+1)}{x}$ ищется из решения системы линейных уравнений

$$A_{k+1} \overset{(k+1)}{x} = A_{k+1} \overset{(k)}{x} - \tau_{k+1} \cdot F(\overset{(k)}{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \overset{(k+1)}{x} = \Phi(\overset{(k)}{x}).$$

Метод называется *явным*, если $A_{k+1} = E \ \ \forall k$, т.е. в каждое i-е уравнение входит по одному неизвестному $\overset{(k+1)}{x_i}$. Метод называется *стационарным*, если $A_{k+1} = A, \quad \tau_{k+1} = \tau$ — не зависят от k.

5.2 Простейшие примеры одношаговых итерационных методов

а) *метод релаксации*

$$\frac{\overset{(k+1)}{x} - \overset{(k)}{x}}{\tau} + F(\overset{(k)}{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overset{(k+1)}{x} = \overset{(k)}{x} - \tau F(\overset{(k)}{x}) \tag{10}$$

явный стационарный метод.

б) *метод Ньютона (метод линеаризации).* Получается разложением $(1')$ в окрестности $\overset{(k)}{x}$ в ряд Тейлора с учетом лишь линейных относительно $dx \equiv \Delta x$ членов:

$$F(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(\overset{(k)}{x}) + dF(\overset{(k)}{x}) + \frac{1}{2!}d^2F(\overset{(k)}{\xi}) = 0.$$

Удерживая лишь линейные относительно Δx члены получим

$$F_j(\overset{(k)}{x}) + \sum_1^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\overset{(k)}{x})(\overset{(k+1)}{x_i} - \overset{(k)}{x_i}) = 0$$

или

$$F'(\overset{(k)}{x})(\overset{(k+1)}{x} - \overset{(k)}{x}) + F(\overset{(k)}{x}) = 0.$$

Матрица Якоби $F'(\overset{(k)}{x})$ преобразования F считается невырожденной на каждом шаге итераций по k. (При рассмотрении модифицированного метода Ньютона итерационную матрицу фиксируют либо в начале алгоритма $F'(\overset{(0)}{x})$, либо на очередном шаге обновления $F'(\overset{(k_p)}{x})$.)

Итак, $detF'(x) = det(\frac{\partial F}{\partial x}) = det\|(\frac{\partial F_j}{\partial x_i})\| \neq 0$ в точке $\overset{(k)}{x} \quad \forall k \quad \Rightarrow$

$$\overset{(k+1)}{x} = \overset{(k)}{x} - \left(F'(\overset{(k)}{x})\right)^{-1} F(\overset{(k)}{x}) \equiv \Phi(\overset{(k)}{x}). \tag{11}$$

5.3 Сходимость метода Ньютона

Сформулируем достаточное условие сходимости метода Ньютона. Предположим, что $F(x)$ непрерывно-дифференцируемая функция и якобиан $detF'(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки x^*. Тогда

$$\Phi(x) = x - (F'(x))^{-1}F(x)$$

и

$$\frac{d\Phi}{dx} = E - \left\{\frac{d}{dx}(F'(x))^{-1}F(x) + (F'(x))^{-1}\frac{dF}{dx}\right\} = -\frac{d}{dx}((F'(x))^{-1})F(x).$$

Тем самым в точке x^* имеем $\frac{d\Phi}{dx}|_{x=x^*} = 0$, следовательно это метод второго порядка точности.

Пусть в пространстве x-ов введена какая-либо норма $\|x\|$. Поскольку $\Phi'(x)$- непрерывная функция своих аргументов x в некоторой окрестности т. x^*, то $\|\Phi'(x)\|$ — непрерывная числовая функция своих аргументов x_i в этой окрестности. Тогда существует достаточно малый шар $\overline{K}(x^*, \rho)$, где $\|\Phi'(x)\| \leq q < 1$. (Рассматривается норма матрицы Φ' согласованная с нормой x).

Рассмотрим этот шар $\overline{K}(x^*, \rho)$, и пусть $q = max_{x \in \overline{K}(x^*,\rho)}\|\Phi'(x)\| < 1$ (поскольку непрерывная функция на замкнутом ограниченном множестве достигает своего максимума).

В таком случае можно утверждать, что $\Phi(x)$ — сжатие в шаре $\overline{K}$ с коэффициентом q:

$$\Phi(x') - \Phi(x'') = \Phi'(\xi)(x' - x'') \Rightarrow$$
$$\|\Phi(x') - \Phi(x'')\| \leq ||\Phi'(\xi)\| \cdot \|(x' - x'')\| \leq q\|x' - x''\|$$

при этом $q < 1$.
Согласно *Теореме 2* корень x^* отделен и локализован в замкнутом шаре $\overline{K}(a, r) \subseteq \overline{K}(x^*, \rho)$ таком, что

$$\|a - \Phi(a)\| \leq (1 - q)r$$

В таком случае $\overset{(k)}{x} \to x^*$, если $\overset{(0)}{x} \in \overline{K}(a, r)$, например $\overset{(0)}{x} = a$.

Замечание: Оценим погрешность МПП прямо в терминах целевой функции F уравнения $(1^{'})$. Имеем

$$F(\overset{(k)}{x}) = F(\overset{(k)}{x}) - F(x^*) = \frac{dF}{dx}(\overset{(k)}{\xi})(\overset{(k)}{x} - x^*) \Leftrightarrow$$
$$\| \overset{(k)}{x} - x^*\| \leq \|(\frac{dF}{dx}(\xi))^{-1}\| \cdot \|F(\overset{(k)}{x})\|.$$

При условии доступности оценки $\max_{x \in \bar{K}(a;r)} \|(\frac{dF}{dx})^{-1}\| = M$ получим

$$\| \overset{(k)}{x} - x^*\| \leq M\|F(\overset{(k)}{x})\|, \tag{12}$$

что связывает погрешность k-ой итерации и норму целевой функции на этой итерации.