не ниже порядка k (порядка аппроксимации).

Доказательство: Рассмотрим погрешность разностного решения

$$z(x) = y(x) - u(x).$$

Мы получили для решения исходной задачи разностную схему, возмущённую невязками

$$\begin{cases} A_h u = \varphi - \psi, & x \in \omega_h \\ R_h u = \chi - \eta, & x \in \Gamma_h \end{cases}$$

Вычитая эти уравнения из соответствующих уравнений (3)-(4), найдём:

$$\begin{cases} A_h z = \psi \\ R_h z = \eta \end{cases} \tag{**}$$

Схема (**) устойчива, то есть

$$\| z \|_{y_h} \leq C_1 \| \psi \|_{\varphi} + C_2 \| \eta \|_{\chi} .$$

Но, поскольку исходная схема (3)-(4) обладает аппроксимацией порядка k, то

$$\| z \|_{y_h} \leq C_1 \alpha h^k + C_2 \beta h^k = C h^k.$$

Фактическая сходимость может иметь более высокий порядок.

§3. Разностные схемы для одномерного уравнения теплопроводности

3.1 Постановка задачи. Разностная схема

Рассмотрим задачу о распространении тепла на отрезке в случае простейших краевых условий 1-го рода (условий Дирихле)

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad 0 < x < l, \quad t > 0$$

начальные условия

$$u(x,0) = \mu_1(x) \equiv \mu(x) \tag{11}$$

однородные краевые условия

$$u(0,t) = \mu_2(t) \equiv 0; \quad u(l,t) = \mu_3(t) \equiv 0, \quad t \geq 0.$$

а) Конечно-разностная аппроксимация простейших дифференциальных операторов первого порядка.

Введем в области $\bar{D} = [0; l] \times [0; T]$ сетку $\Omega = \omega_h \times \omega_\tau$, где

$$\omega_h = \left\{ \begin{array}{l} 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = l \\ x_n = x_0 + nh, \quad h = \frac{x_N - x_0}{N} \end{array} \right\} \quad \text{и} \quad \omega_\tau = \left\{ \begin{array}{l} 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_M = T \\ t_m = t_0 + m\tau, \quad \tau = \frac{T - t_0}{M} \end{array} \right\}.$$

Рассмотрим сеточную функцию $y(x_n; t_m) = y_n^m = y$ на сетке $\Omega \equiv \omega_{h,\tau}$. Построим сеточные аналоги простейших дифференциальных операторов первого порядка:

$$\hat{L}u = u'(x) = \frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} l_x y = y_{x,i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, & \text{производная вперёд} \\ l_{\bar{x}} y = y_{\bar{x},i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, & \text{производная назад} \\ l_{\overset{0}{x}} y = y_{\overset{0}{x},i} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, & \text{центральная производная} \end{array} \tag{12}$$

Их аппроксимация $L_h u - (Lu)_h$ имеет следующий порядок:
Для производной вперёд l_x

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h} - u'(x_i) = \frac{u(x_i + h) - u_i}{h} - u'(x_i) =$$

$$= \frac{u(x_i) + u'(x_i)h + O(h^2) - u_i}{h} - u'(x_i) = O(h),$$

т.е. обладает аппроксимацией 1-го порядка.
Аналогично $l_{\bar{x}}$

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{h} - u'(x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} - u'(x_i) =$$

$$= \frac{u_i - [u(x_i) - u'(x_i)h + O(h^2)]}{h} - u'(x_i) = O(h).$$

Центральная производная $l_{\overset{0}{x}}$ имеет повышенный порядок аппроксимации

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - u'(x_i) = \frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h} - u'(x_i) =$$

$$= \frac{u(x_i) + u'(x_i)h + h^2/2\ u''(x_i) + O(h^3) - [u(x_i) - u'(x_i)h + h^2/2\ u''(x_i) + O(h^3)]}{2h} -$$

$$- u'(x_i) = O(h^2).$$

b) Конечно-разностная аппроксимация простейших дифференциальных операторов второго порядка.

Определим вторую разностную производную для узла x_i (рекурентно):

$$\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\right) \quad \Rightarrow \quad y_{\overline{x}x,i} = \left(y_{\overline{x}}\right)_{x,i} = \frac{1}{h}\left(y_{\overline{x},i+1} - y_{\overline{x},i}\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = y_{x\overline{x},i}. \tag{13}$$

Получим её порядок аппроксимации

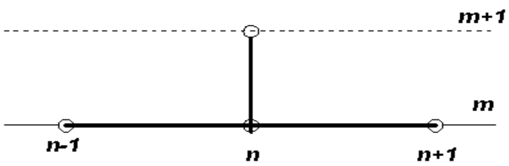
$$L_h u - (Lu)_h = u_{\overline{x}x,i} - \left(u''\right)_i = \frac{u\left(x_i + h\right) - 2u\left(x_i\right) + u\left(x_i - h\right)}{h^2} - u''\left(x_i\right) =$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(h^2 u''\left(x_i\right) + O\left(h^4\right)\right) - u''\left(x_i\right) = O\left(h^2\right).$$

Аналогично мы можем построить аппроксимации и более сложных производных.

Разностная схема. После аппроксимации простейших дифференциальных операторов, вернемся к уравнению (11.1).

Используя так называемый метод *разностной аппроксимации*, мы можем каждый из дифференциальных операторов задачи (11) аппроксимировать соответствующим разностным оператором(12), (13). Производная вперед по t для (n, m)-го узла



$$y_{t;n,m} = \frac{y_n^{m+1} - y_n^m}{\tau} = \frac{\hat{y}_n - y_n}{\tau} = \frac{\hat{y} - y}{\tau}.$$

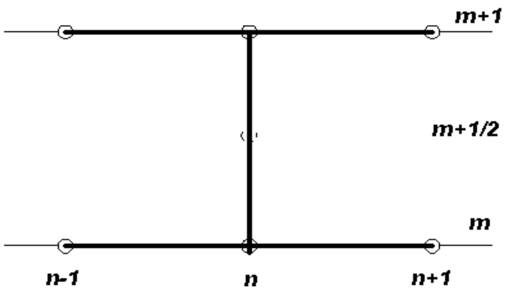
Это выражение рассматривается относительно текущего узла x_n на двух слоях по t.

Пространственные производные второго порядка аппроксимируются разностным оператором

$$y_{\overline{x}x;n,m} = \frac{1}{h^2}\left(y_{n+1}^m - 2y_n^m + y_{n-1}^m\right) = \Lambda_h y_n^m \equiv \Lambda_h y.$$

При построении такой разностной аппроксимации на $\omega_{h,\tau}$ мы использовали шаблон из четырех узлов.

Относительно $(m+1)$-го временного слоя схема получилась *явной* — с $(m+1)$-го временного слоя используется только одно значение сеточной функции. В дальнейшем мы покажем, что простейшая явная схема не является наилучшей в смысле аппроксимации и, особенно, устойчивости. Поэтому сразу же рассмотрим однопараметрическое семейство схем на шеститочечном шаблоне:



$$\frac{y_n^{m+1} - y_n^m}{\tau} = \alpha^2 \Lambda_{\bar{x}x} \left\{ \sigma y_n^{m+1} + (1-\sigma) y_n^m \right\} + \varphi_n^m,$$

где вес $\sigma \in [0;1]$.

При $\sigma = 0$ получается чисто *явная* схема, при $\sigma = 1$ — чисто *неявная* схема. При аппроксимации правой части $f(x,t) \Rightarrow \varphi_n^m$ мы использовали, так называемый, *метод неопреленных коэффициентов* в простейшей его форме, когда подбирается всего один коэффициент φ_n^m (без дополнительного сложного шаблона).

Итак, получаем разностную задачу:

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau}\left(y_n^{m+1} - y_n^m\right) = \alpha^2 \Lambda_h \left\{ \sigma \hat{y} + (1-\sigma) y \right\} + \varphi_n^m; \quad (x_n, t_m) \in \omega_{h,\tau} \\ y_n^0 = \chi_n; \\ y_0^m = y_N^m = 0 = \chi_{0,N}^m \end{cases} \tag{14}$$

Уравнениие (14.1) записано относительно внутренних узлов (n,m) сетки $\overline{\Omega}$. При аппроксимации начальных и краевых условий мы также использовали метод неопределенных коэффициентов. Теперь изучим свойства построенной разностной схемы.

3.2 Порядок аппроксимации разностной схемы (14)

Напомним еще раз, что для определения порядка аппроксимации разностной схемы (14), нужно точное решение (11) подставить в эту схему и, в предположении достаточной гладкости решения $u(x,t)$, определить порядки невязок ψ и η по h и τ.

Одновременно с этим, мы проследим идею метода неопределенных коэффициентов, выбираемых из соображений обеспечения максимального порядка аппроксимации (на примере постребия φ_n^m и частично χ_n).

Введем в рассмотрение промежуточный слой по t :

$$\bar{t} = t_m + \frac{\tau}{2} = t_{m+\frac{1}{2}} = m\tau + \frac{\tau}{2}.$$

Тогда

а) временна́я часть:

$$\frac{1}{2\frac{\tau}{2}}\left(u_n^{m+1} - u_n^m\right) = u_{\underset{t;n,m+\frac{1}{2}}{0}} = u_t'\left(x_n, t_{m+\frac{1}{2}}\right) + O\left(\tau^2\right);$$

б) пространственная часть:

$$\sigma \hat{u} + (1-\sigma) u = \sigma u\left(x_n, t_{m+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2}\right) + (1-\sigma) u \left(x_n, t_{m+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2}\right) =$$

$$= \sigma \left\{ u\left(x_n, t_{m+\frac{1}{2}}\right) + \frac{\tau}{2}\overline{u}_t + \frac{1}{2!}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 \overline{u}_{tt} + O\left(\tau^3\right) \right\} +$$

$$+\left(1-\sigma\right)\left\{u\left(x_n,t_{m+\frac{1}{2}}\right)-\frac{\tau}{2}\overline{u}_t+\frac{1}{2!}\left(\frac{\tau}{2}\right)^2\overline{u}_{tt}+O\left(\tau^3\right)\right\}=$$

$$=\overline{u}+\tau\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\overline{u_t}+O\left(\tau^2\right).$$

Здесь чертой сверху обозначено значение функции в точке $(x_n;t_{m+1/2})$.
Следовательно,

$$\Lambda_h\left[\sigma\hat{u}+\left(1-\sigma\right)u\right]=\Lambda_h\left[\overline{u}+\tau\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\overline{u}_t+O\left(\tau^2\right)\right]=$$

$$=\overline{u}_{xx}+\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau\overline{u}_{txx}+O\left(\tau^2+h^2\right).$$

Таким образом подстановка $u\left(x,t\right)$ в разностное уравнениие (14.1) дает

$$\underline{u_t\left(x_n,\overline{t}\right)}+O\left(\tau^2\right)=\underline{a^2u_{xx}\left(x_n,\overline{t}\right)}+a^2\tau\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)u_{txx}\left(x_n,\overline{t}\right)+\varphi_n^m+O\left(\tau^2+h^2\right).$$

В силу задачи (11) подчеркнутые члены анулируются, если в уравнении есть слагаемое $f\left(x_n,\overline{t}\right)$. Таким образом, если мы хотим обеспечить аппроксимацию задачи (11), необходимо:

$$\varphi_n^m=f\left(x_n,\overline{t}\right)=f\left(x_n,t_{m+\frac{1}{2}}\right).$$

Тогда:

1) при $\sigma\neq\frac{1}{2}$ мы получаем аппроксимацию уравнения (11.1) с порядком $O\left(\tau+h^2\right)$;

2) при $\sigma=\frac{1}{2}$ мы получаем повышенный порядок аппроксимации $O\left(\tau^2+h^2\right)$ (обратим внимание на наличие симметрии в сеточном шаблоне).

3) Аппроксимация начальных условий в этой задаче тривиальна:

$$\chi_n^0=\mu\left(x_n,t_0\right)$$

чтобы не вносить дополнительной погрешности $\left(\eta_1\equiv 0\right)$.

3.3 Устойчивость разностной схемы (14)

Напомним еще раз: *линейная схема (14) называется устойчивой по входным данным (по правой части и начальным условиям), если при достаточно малых h и τ существуют C_1, C_2 (не зависящие от h и τ), такие что,*

$$\left\|\delta y\right\|\leq C_1\left\|\delta\varphi\right\|+C_2\left\|\delta\chi\right\|,$$

то есть, решение непрерывно зависит от правой части и начальных условий.
Устойчивость разностной схемы, а следовательно и её сходимость при наличии аппроксимации, мы покажем в равномерной (чебышевской) метрике:

$$\left\|y\right\|_l=\max_{n,m}\left|y_n^m\right|$$

(сеточный аналог равномерной по t и x метрики).
Введем норму сеточного решения на m-ом слое:

$$\left\|y^m\right\|=\max_n\left|y_n^m\right|.$$

В силу Теоремы 1 (о достаточном условии равномерной устойчивости линейных разностных схем по начальным условиям) и Теоремы 2 (достаточного условия устойчивости линейной разностной схемы по правой части), нам достаточно показать, что, если существуют $C_1 \geq 0$ и $C_2 > 0$ и

$$\left\|y^{m+1}\right\| \leq (1+\tau C_1)\left\|y^m\right\| + \tau C_2 \left\|\varphi\right\|, \qquad (*)$$

то схема устойчива по входным данным.
Ограничимся исследованием устойчивости в двух предельных случаях: чисто неявной ($\sigma = 1$) и чисто явной ($\sigma = 0$) схем.

а) Устойчивость чисто неявной схемы ($\sigma = 1$) : Рассмотрим разностное уравнениие (14.1):

$$\frac{1}{\tau}\left(\widehat{y} - y\right) = \alpha^2 \Lambda\left[\widehat{y}\right] + \varphi_n^m = \frac{a^2}{h^2}\left(y_{n+1}^{m+1} - 2y_n^{m+1} + y_{n-1}^{m+1}\right) + \varphi_n^m.$$

Обозначим $\gamma = \frac{\tau\alpha^2}{h^2}$, тогда

$$y_n^{m+1} - y_n^m = \gamma\left(y_{n+1}^{m+1} - 2y_n^{m+1} + y_{n-1}^{m+1}\right) + \tau\varphi_n^m \Longleftrightarrow$$

$$y_n^{m+1} = y_n^m - \gamma\left(2y_n^{m+1} - y_{n+1}^{m+1} - y_{n-1}^{m+1}\right) + \tau\varphi_n^m.$$

Покажем, что в этом случае ($\sigma = 1$) достаточное условие устойчивости ($*$) выполнено. Найдем на слое $(m+1)$ тот узел k_0, в котором y_n^{m+1} принимает наибольшее значение:

$$\max_n y_n^{m+1} = y_{k_0}^{m+1} \geq y_n^{m+1}, \quad \forall n.$$

Тогда

$$2y_{k_0}^{m+1} - y_{k_0+1}^{m+1} - y_{k_0-1}^{m+1} \geq 0.$$

Поэтому

$$y_{k_0}^{m+1} \leq y_{k_0}^m + \tau\varphi_{k_0}^m \leq \max_n y_n^m + \tau \max_{n,m} \varphi_n^m. \qquad (**)$$

С другой стороны, найдем на слое $(m+1)$ узел l_0 где y_n^{m+1} принимает минимальное значение:

$$\min_n y_n^{m+1} = y_{l_0}^{m+1} \leq y_n^{m+1}, \forall n.$$

Тогда

$$2y_{l_0}^{m+1} - y_{l_0+1}^{m+1} - y_{l_0-1}^{m+1} \leq 0$$

и

$$y_{l_0}^{m+1} \geq y_{l_0}^m + \tau\varphi_{l_0}^m \geq \min_n y_n^m + \tau \min_{n,m} \varphi_n^m. \qquad (***)$$

Объединяя ($**$) и ($***$), найдем:

$$\left\|y^{m+1}\right\| = \max_n |y_n^{m+1}| \leq \left\|y^m\right\| + \tau\left\|\varphi\right\|,$$

что совпадает с условием ($*$) при $C_1 = 0, C_2 = 1$. Таким образом, неявная схема ($\sigma = 1$) *безусловно* устойчива по входным данным (при любых τ и h).

б) Устойчивость чисто явной схемы $(\sigma = 0)$: Для чисто явной схемы уравнение (14.1) имеет вид:

$$\frac{1}{\tau}\left(y_n^{m+1} - y_n^m\right) = \alpha^2 \Lambda\left[y_n^m\right] + \varphi_n^m.$$

Откуда

$$y_n^{m+1} = y_n^m + \gamma\left(y_{n+1}^m - 2y_n^m + y_{n-1}^m\right) + \tau\varphi_n^m = (1-2\gamma)\, y_n^m + \gamma y_{n-1}^m + \gamma y_{n+1}^m + \tau\varphi_n^m.$$

Пусть $(1-2\gamma) > 0$, то есть $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, тогда

$$\left|y_n^{m+1}\right| = \left|(1-2\gamma)\, y_n^m + \gamma y_{n-1}^m + \gamma y_{n+1}^m + \tau\varphi_n^m\right| \leq$$

$$\leq (1-2\gamma)\left|y_n^m\right| + \gamma\left|y_{n+1}^m\right| + \gamma\left|y_{n-1}^m\right| + \tau\left|\varphi_n^m\right|, \quad \forall n.$$

Тем самым

$$\|y^{m+1}\| \leq \|y^m\| + \tau\|\varphi\|, \quad C_1 = 0; C_2 = 1.$$

Итак, при

$$\gamma = \frac{\tau a^2}{h^2} < \frac{1}{2} \tag{15}$$

явная схема устойчива. Это условие накладывает жесткие ограничения на временной шаг сетки:

$$\tau < \frac{h^2}{2a^2}. \tag{15*}$$

Покажем, что при $\gamma > \frac{1}{2}$ явная схема *неустойчива* в чебышевской норме. Для этого достаточно показать, что, однажды возникнув, ошибка в решении будет при дальнейших вычислениях неограниченно возрастать. Рассмотрим однородную задачу (без правой части). Соответствующие возмущения — это возмущения начальных условий на данном слое. Схема при этом имеет вид

$$y_n^{m+1} = (1-2\gamma)\, y_n^m + \gamma y_{n-1}^m + \gamma y_{n+1}^m.$$

Пусть на m-ом слое возникла ошибка δy_n^m, тогда

$$\widetilde{y}_n^m = y_n^m + \delta y_n^m$$

и, поскольку $\widetilde{y}_n^m$ - это решение той же схемы,

$$\widetilde{y}_n^{m+1} = y_n^{m+1} + \delta y_n^{m+1} = (1-2\gamma)\left(y_n^m + \delta y_n^m\right) + \gamma\widetilde{y}_{n+1}^m + \gamma\widetilde{y}_{n-1}^m,$$

то в силу линейности нашей задачи, получаем уравнениие для ошибки:

$$\delta y_n^{m+1} = \delta y_n^m\,(1-2\gamma) + \gamma\delta y_{n+1}^m + \gamma\delta y_{n-1}^m.$$

Предположим, что ошибка является быстро осциллирующей функцией и имеет вид:

$$\delta y_n^m = (-1)^n\,\varepsilon; \quad \varepsilon > 0,$$

где ε - некоторое достаточно малое число, тогда:

$$\delta y_n^{m+1} = (1-2\gamma)(-1)^n\varepsilon + \gamma(-1)^{n+1}\varepsilon + \gamma(-1)^{n-1}\varepsilon = (-1)^n\varepsilon(1-4\gamma).$$

Но, так как $\gamma > 1/2$, то $4\gamma > 2$ и

$$\delta y_n^{m+1} = (-1)^{n+1}\varepsilon(4\gamma - 1).$$

Следовательно через k временных слоев

$$\left|\delta y_n^{m+k}\right| = \varepsilon\left(4\gamma - 1\right)^k \to \infty, \quad k \to \infty.$$

Уменьшение шага τ (при $\gamma > \frac{1}{2}$) не спасает, ибо при фиксированном T растет объем неустойчивых вычислений (за счет числа шагов), следовательно и ошибка. Значит явная схема $\sigma = 0$ при $\gamma = \frac{\tau a^2}{h^2} > \frac{1}{2}$ — неустойчива.

Замечания:

1) В силу устойчивости наших схем, мы показали, что $\|y^{m+1}\| \leq \|y^m\| + \tau\|\varphi\|$. Это неравенство доказывает принцип максимума для наших схем: Пусть $\varphi = 0$ тогда

$$\left\|y^{m+1}\right\| \leq \|y^m\| \leq \ldots \leq \left\|y^0\right\| = \|\chi\|$$

таким образом, во внутренних точках t и x норма решения не превосходит норму начальных условий.

2) В сеточном аналоге нормы L_2 методом гармоник (далее) можно показать, что схема (14) устойчива при

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau a^2}. \qquad (15')$$

В частности

a) $\sigma = \frac{1}{2}$ — безусловно устойчивая схема.

b) Схема с $\sigma = 0$ устойчива при условии

$$\frac{h^2}{4\tau a^2} \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\tau a^2}{h^2} \leq \frac{1}{} \Leftrightarrow \quad \tau \leq \frac{h^2}{2a^2}.$$

3) Можно показать, что в C схема (14) устойчива по входным данным при

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{2\tau a^2}. \qquad (15'')$$

В частности схема с $\sigma = 0$ устойчива при условии

$$\tau \leq \frac{h^2}{a^2}.$$

3.4 Сходимость разностной схемы (14)

Рассмотрим погрешность сеточного решения

$$z_n^m = y_n^m - u_n^m$$

$u_n^m = u\left(x_n, t_m\right)$ при простейшем способе проектирования $u(x,t)$ на сетку Ω.

Мы показали, что при наличии аппроксимации и устойчивости разностной схемы она обладает сходимостью, и порядок точности схемы (14) не ниже её порядка аппроксимации. В нашем случае имеет место равномерная сходимость либо сходимость в среднем (в той же метрике, где есть и устойчивость). Поэтому для погрешности сеточного решения имеем оценки

a) $\sigma = \frac{1}{2}$:

$$\|z\|_c = O\left(h^2 + \tau^2\right)$$
$$u\left(x,t\right) \in C^{(4)}\left[0,l\right] \times C^{(3)}\left[0,T\right].$$

b) $\sigma \neq \frac{1}{2}$: (16)

$$\|z\|_c = O\left(\tau + h^2\right)$$
$$u\left(x,t\right) \in C^{(4)}\left[0,l\right] \times C^{(2)}\left[0,T\right]$$

При этом для обеспечения соответствующей аппроксимации, решение задачи (11) должно обладать указанной гладкостью.

3.5 Алгоритмы численного решения задачи (14). Прогонка

Сделаем краткое замечание относительно способов решения задачи (14).

а) В случае явной схемы ($\sigma = 0$). Алгоритм очевиден и определяется написанной явной формулой:

$$\begin{cases} y_n^{m+1} = \left(1 - 2\gamma\right) y_n^m + \gamma y_{n-1}^m + \gamma y_{n+1}^m + \tau\varphi_n^m; \quad 1 \leq n \leq N-1 \\ y_0^{m+1} = y_N^{m+1} = 0; \\ y_n^0 = \chi_n \end{cases} \tag{14*}$$

Напомним, что $\gamma < \frac{1}{2}$.

б) Для неявной схемы ($\sigma = 1$). Решение на $(m+1)$-ом временном слое находим из формул

$$\widehat{y}_n = y_n - \gamma\left(2\widehat{y}_n - \widehat{y}_{n+1} - \widehat{y}_{n-1}\right) + \tau\varphi_n^m,$$

что приводит к алгебраической системе

$$\left(1 + 2\gamma\right)\widehat{y}_n + \gamma\widehat{y}_{n-1} + \gamma\widehat{y}_{n+1} = y_n + \tau\varphi_n^m \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} A_n\widehat{y}_{n-1} + B_n\widehat{y}_n + C_n\widehat{y}_{n+1} = F_n; \\ \widehat{y}_0 = \widehat{y}_N = 0. \end{cases} \tag{14 **}$$

Это СЛАУ с трехдиагональной матрицей, имеющей диагональное преобладание $B_n \geq A_n + C_n$ В таком случае решение $\widehat{y}_n$ существует и единственно. Решение дается формулами прогонки. Вычисления устойчивы. Общий объем вычислений при переходе на $(m+1)$-ый слой $O\left(9N\right)$ действий и требуется всего $O(3N)$ ячеек памяти для хранения матрицы СЛАУ.

Замечания: Мы рассмотрели однопараметрическое семейство схем (14) для одномерного уравнения теплопроводности.

Явная схема ($\sigma = 0$) алгоритмически наиболее проста, но требует выполнения жестких условий устойчивости $\tau < \frac{h^2}{2a^2}$, поэтому используется редко.

Широкое применение имеет схема $\sigma = \frac{1}{2}$, повышенной точности $O\left(h^2 + \tau^2\right)$ — безусловно устойчивая схема.

Схемы с $\sigma = \frac{1}{2}, \sigma = 1$ особенно эффективны для уравнениий с переменными коэффициентами или для квазилинейных уравнениий.