ГЛАВА VII

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§1. Задача Коши

1.1 Постановка задачи

При решении многих задач естествознания в качестве математической модели используется *задача Коши* для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например задачи динамики системы взаимодействующих тел (в модели материальных точек), задачи химической кинетики, электрических цепей. Ряд важных уравнений в частных производных в случаях, допускающих разделение переменных, приводит к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений — это, как правило, краевые задачи (задачи о собственных колебаниях упругих балок и пластин, определения спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричных полях и многие другие).

Мы ограничимся рассмотрением лишь задачи Коши. Полученная в общем случае задача для ОДУ (обыкновенных дифференциальных уравнений) с помощью замены переменных сводится к *нормальной системе* дифференциальных уравнений. *Задача Коши* для последней формулируется так:
Определить дифференцируемую функцию $u(x)$, для которой

$$\frac{d\,u}{d\,x} = f(x,u) \tag{1}$$

и выполнено начальное условие

$$u(x_0) = u_0. \tag{2}$$

Здесь x_0, y_0 — заданные величины; $u = \{u_1, u_2, \dots, u_N\}$ — искомая вектор-функция; $f(x,u) = \{f_1(x,\vec{u}), \dots, f_N(x,\vec{u})\}$ — вектор правых частей. Относительно задачи (1-2) будем предполагать выполненными достаточные условия существования на отрезке $|x - x_0| < a$ решения $u(x)$ задачи (1)-(2).

Эйлеру принадлежит идея и рассмотрение простейшего численного метода, основанного на возможности получить разложение по формуле Тейлора для искомого решения $u(x)$ в окрестности точки x_n

$$u_{n+1} = u(x_{n+1}) = u_n + h_n u'_n + \frac{1}{2}h_n^2 u''_n + \dots + \frac{h_n^s}{(s)!}u_n^{(s)} + O(h_n^{(s+1)}), \tag{3}$$

где $h_n = x_{n+1} - x_n$. При этом необходимые производные функции $u(x)$ можно найти дифференцируя в силу уравнения (1) функцию $f(x, u(x))$ нужное число раз

$$u' = f(x,u); \quad u'' = \frac{d}{d\,x} f(x, u(x)) = f_x + f_u \cdot \underbrace{u_x}_{\equiv f(x,u)} = f_x + f f_u, \quad \text{и т.д.} \tag{4}$$

Однако использовать разложение (3) с большим числом членов невыгодно: и из-за громоздкости формул (4), и из-за того, что, как правило, правая часть в (1) известна лишь приближённо и её явное численное дифференцирование нежелательно.

1.2 Метод Рунге-Кутта

Идея Рунге метода Рунге-Кутта состоит в том, чтобы используя метод неопределённых коэффициентов аппроксимировать с тем же порядком точности $O(h_n^s)$ многочлен Тейлора в формуле (3). Представим приращение функции $u(x)$ в точке x_n в виде

$$\Delta u(x_n) = u(x_{n+1}) - u(x_n) = h_n \left(\underbrace{u_n' + \frac{1}{2} h_n u_n'' + \cdots + \frac{h_n^{s-1}}{(s)!} u_n^{(s)}}_{P_{s-1}(h_n)} + O(h_n^{(s)}) \right).$$

Обозначим текущий шаг $h_n \equiv h$. Речь идёт об аппроксимации многочлена

$$P_{s-1}(h) = u_n' + \frac{1}{2} h u_n'' + \cdots + \frac{h^{s-1}}{(s)!} u_n^{(s)}$$

с порядком $O(h^s)$. Ограничимся рассмотрением простейшего случая $s = 2$. Тогда у многочлена первого порядка

$$P_1(h) = u_n' + \frac{h}{2} u_n'' = f(x_n, u_n) + \frac{h}{2} \frac{d}{d\,x} f(x,u)|_{(x_n,u_n)}$$

необходимо со вторым порядком аппроксимировать производную u_n''.

Пусть $y(x)$ — приближенная функция, дающая такую аппроксимацию. Для аппроксимации производной df/dx мы используем разностное отношение $[f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(x, y)]/\Delta x$ с неопределенными пока $\tilde{x}, \tilde{y}$. В таком случае приращение функции y имеет вид

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = h \left\{ \beta f(x_n, y_n) + \alpha f(x_n + \gamma h, y_n + \delta h) \right\}.$$

Здесь α, β, γ и δ — параметры, значения которых нужно определить.

Разложим полученное приращение Δy_n в ряд по степеням h, получим

$$y_{n+1} = y_n + h(\alpha + \beta) f(x_n, y_n) + \alpha h^2 (\gamma f_x + \delta f_u)|_{(x_n,y_n)} + O(h^3). \tag{$*$}$$

Выберем параметры α, β, γ и δ так, чтобы разложение для функции y с тем же порядком аппроксимировало разложение истинного решения u. Для этого приравнивая коэффициенты в главных порядках по h полученной формулы (*) и формулы (3), найдём

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\gamma = \frac{1}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{1}{2}f(x_n, y_n).$$

Выражая все параметры через α, получим однопараметрическое семейство двучленных схем Рунге-Кутта второго порядка точности

$$y_{n+1} = y_n + h\left[(1-\alpha)f(x_n, y_n) + \alpha f\left(x_n + \frac{h}{2\alpha}, y_n + \frac{h}{2\alpha}f_n\right)\right], \tag{5}$$

где $0 < \alpha \leq 1$.

Замечания:

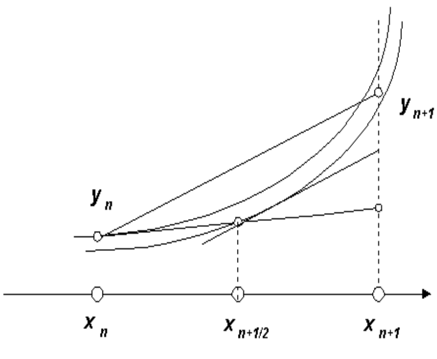
1) Выбрать параметр α так, чтобы схема (5) давала бы аппроксимацию третьего порядка невозможно.

2) Приведем без доказательства теорему. *Если $f(x, u)$ непрерывна и ограничена вместе со своими вторыми производными, то решение, полученное по схеме (5), равномерно сходится к точному решению с погрешностью $O(\max h_n^2)$, т.е. двучленная схема Рунге-Кутта имеет второй порядок точности.*

3) Формула (5) используется на практике обычно либо при $\alpha = 1$, либо при $\alpha = 1/2$. При $\alpha = 1$ схема имеет особенно простой вид

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf_n\right). \tag{6}$$

Поясним её смысл. Сначала, вычислив наклон интегральной кривой уравнения (1) $f_n = f(x_n, y_n)$, делаем половинный шаг по схеме ломанных, т.е. по касательной данного наклона, и находим



$$y_{n+1/2} = y_n + \frac{1}{2}hf_n.$$

Затем в найденной точке определяем наклон интегральной кривой $y'_{n+1/2} = f(x_{n+1/2}, y_{n+1/2})$. По этому наклону определяем приращение функции на целом шаге

$$y_{n+1} = y_n + hy'_{n+1/2}.$$

Схемы подобного типа называют "предиктор-корректор".

Задача. *Дать аналогичную интерпретацию слуяаю схемы с $\alpha = 1/2$.*

Метод Рунге-Кутта позволяет строить схемы различного порядка точности. При аппроксимации многочлена Тейлора второго порядка

$$P_2(h) = u'_n + \frac{h}{2}u''_n + \frac{h^2}{3!}u'''_n$$

с точностью $O(h^3)$ получают наиболее употребительную схему четвёртого порядка точности (точнее семейство четырёхчленных схем указанного порядка точности)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$
$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1), \tag{7}$$
$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2), \quad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3).$$

Схемы Рунге-Кутта обладают важными достоинствами: все они имеют хорошую точность; они являются явными; допускают расчет с переменным шагом; легко обобщаются на случай систем дифференциальных уравнений. Имеено эти свойства особенно ценны при расчетах на ЭВМ.

Рекомендации:

1) Если правая часть дифференциального уравнения (1) ограничена вместе со своими производными до четвёртого порядка, то схема (7) дает хорошие результаты благодаря малому коэффициенту в остаточном члене и быстрому возрастанию точности схемы при уменьшении шага. Если же указанных производных у правой части нет. то не худшую точность имеют схемы и меньшего порядка точности (5).

2) Шаг сетки при расчетах следует выбирать настолько малым, чтобы обеспечить требуемую точность расчета. Других, ограничительных условий на шаг схемы в методе Рунге-Кутта нет.

3) Выражения остаточных членов для формул Рунге-Кутта достаточно громоздки, поэтому трудно получить априорную оценку точности метода, однако, проводя расчеты на сгущающихся сетках, можно дать апостериорную оценку точности по методу Рунге.