

## Лекция 6б

### Топологические пространства — 2. Направленности

#### 1. Частичный порядок

Напомним

**Определение.** Говорят, что на множестве  $R$  задано *отношение частичного порядка*, если для некоторых пар  $(x, y)$  элементов множества  $R$  сказано, что  $x \leq y$ , причём выполнены следующие условия:

- 1)  $\forall x \in R \ x \leq x$ ;
- 2)  $\forall x, y \in R \ x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$ ;
- 3)  $\forall x, y, z \in R \ x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$ .

*Замечания.*

1. Говорят о частичном порядке, потому что не обязательно любые два элемента  $x, y \in R$  сравнимы, т. е. не для каждой пары элементов  $x, y \in R$  верно хотя бы одно из соотношений  $x \leq y$ ,  $y \leq x$ . Если в  $R$  сравнимы все пары элементов, то такое отношение порядка называется *линейным порядком*. Очевидно, линейный порядок представляет собой частный случай частичного порядка.

2. В дальнейшем без всяких оговорок будем употреблять запись  $y \geq x$  в качестве синонима записи  $x \leq y$ .

3. Иногда говорят « $x$  меньше  $y$ » и пишут « $x < y$ », имея в виду, что  $x \leq y$  и при этом  $x \neq y$ .

*Примеры.*

1. Множество натуральных чисел с обычным порядком является частично (и даже линейно) упорядоченным множеством.

2. То же верно для множества действительных чисел.

3. Введём отношение частичного порядка между числовыми функциями на некотором множестве  $X$  следующим образом:  $f \leq g$ , если при всех  $x \in X$  верно числовое неравенство (понимаемое в обычном смысле)  $f(x) \leq g(x)$ . Проверьте, что все условия выполнены. Очевидно, что найдутся несравнимые функции: например, при  $X = [0; 1]$  можно взять  $f(x) = x$ ,  $g(x) = 1 - x$ .

4. Введём отношение частичного порядка между парами действительных чисел так:  $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ , если одновременно  $x_1 \leq x_2$ ,  $y_1 \leq y_2$ . Снова легко проверить, что все условия выполняются; при этом, например, элементы  $(0, 1)$  и  $(1, 0)$  не сравнимы.

5. На том же множестве можно ввести и отношение линейного порядка. Например, положим  $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ , если

- 1) либо  $x_1 < x_2$ ,
- 2) либо  $x_1 = x_2, y_1 \leq y_2$ .

Такое отношение порядка называется лексикографическим (по такому принципу расположены слова в словарях).

6. (Спасибо слушателям!) Наконец, ещё один пример возможного построения отношения линейного порядка на  $\mathbb{R}^2$  даёт следующая идея: установим взаимно однозначное соответствие  $\varphi$  между  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{R}^2$  (это можно сделать) и примем для  $\varphi(a)$ ,  $\varphi(b)$  то же соотношение, что имеет место для  $a$  и  $b$ .

7. Часто бывает полезно установить отношение частичного порядка между подмножествами некоторого множества, а именно, считать, что  $A \leq B$ , если  $A \subset B$  (или, наоборот, если  $A \supset B$ ). В первом случае говорят, что система подмножеств *упорядочена по включению*, во втором условимся говорить об упорядочении по обратному включению. В более сложном случае эти подмножества могут быть наделены некоторой структурой, которая, например, сохраняется при произвольном пересечении (подпространства линейного пространства, кольца подмножеств данного множества, топологии и т. п.) или объединении (открытые подмножества данного метрического или топологического пространства).

Обсудим теперь понятия наименьшего и минимального элементов в частично упорядоченном множестве.

**Определение.** Элемент  $a$  частично упорядоченного множества  $R$  называется *наименьшим элементом* в множестве  $R$ , если выполнены 2 условия:

- 1)  $a$  сравним со всеми элементами  $R$ ;
- 2) для любого  $x \in R$  верно  $a \leq x$ .

(Условие 1) следует из 2), но мы предпочли его явно выделить.)

**Определение.** Элемент  $a$  частично упорядоченного множества  $R$  называется *минимальным элементом* в множестве  $R$ , если

для любого  $x \in R$  из  $x \leq a$  следует  $x = a$ .

Как видно, последнее условие можно переформулировать так: в  $R$  нет элементов, (сравнимых с  $a$  и) меньших  $a$ .

Очевидно:

- 1) всякий наименьший элемент есть минимальный (обратное неверно);
- 2) наименьший элемент единствен (для минимального, вообще говоря, неверно).

Аналогичным образом определяются наибольший и максимальный элементы.

Построим пример, иллюстрирующий возможную ситуацию. На рис. 1 изображено 6 точек, соединённых стрелками. Будем считать, что точка  $x$  меньше точки  $y$ , если из  $x$  в  $y$  можно пойти по стрелкам (в указанном направлении). При этом, как обычно,  $x \leq y$  допускает, кроме указанного «меньше», и равенство. Тогда мы получим отношение частичного порядка. Легко видеть, что элемент  $a$  является наименьшим (и, тем самым, минимальным), причём других наименьших и даже минимальных элементов нет. Элементы  $b$  и  $c$  являются максимальными, и ни один из них не является наибольшим. Однако если (вновь спасибо слушателям!) соединить стрелкой  $b$  и  $c$  (в направлении от  $b$  к  $c$ ), то  $c$  станет наибольшим элементом (оставаясь при этом, конечно, максимальным), а  $b$  статус максимального элемента утратит (см. рис. 2).

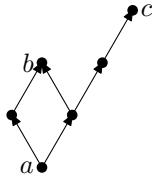


Рис. 1

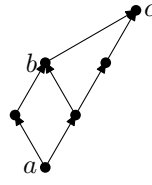


Рис. 2

Заметим в отношении приведённых ранее примеров, что в тех случаях, когда мы имеем дело с системой подмножеств (подпространств, колец и т. п.), замкнутой относительно пересечения и упорядоченной по включению, всегда имеется наименьший элемент — пересечение. Действительно, при любом  $\gamma \in \Gamma$  имеем  $\bigcap_{\gamma} A_{\gamma} \subset A_{\gamma}$ . Наоборот, для системы всех открытых подмножеств множества  $X$  имеем наибольший элемент — объединение (совпадающее с  $X$ ).

Обсудим теперь один интересный с точки зрения топологических пространств пример. Как мы уже отмечали (см. предыдущий семинар), пересечение (но не объединение!) топологий есть снова топология. Далее, пусть имеются множество  $X$  и топологическое пространство  $T_3$ . Рассмотрим некоторое фиксированное отображение  $f : X \rightarrow T_3$ . Можно ли ввести топологию на  $X$  так, чтобы  $f$  было непрерывным? Конечно: достаточно ввести на  $X$  дискретную топологию. Тогда прообраз любого открытого множества в  $T_3$ , будучи некоторым подмножеством  $X$ , автоматически будет открытым.

Сделаем теперь следующий шаг. Заметим, что если  $f : (X, \tau_1) \rightarrow T_3$  непрерывно и  $\tau_2 \supset \tau_1$ , то и  $f : (X, \tau_2) \rightarrow T_3$  непрерывно. Действительно, все прообразы открытых множеств пространства  $T_3$  как были открытыми в  $\tau_1$ , так и остались таковыми в более сильной топологии  $\tau_2$ . Поэтому если в какой-то топологии в пространстве  $X$  отображение  $f$  непрерывно, то оно будет непрерывно и во всякой более сильной топологии. Возникает вопрос: а нельзя ли найти в  $X$  самую слабую топологию, в которой  $f$  ещё непрерывно? Можно! Рассмотрим класс  $\mathcal{T}$  всех топологий в  $X$ , в которых  $f$  непрерывно. Он непуст: в нём содержится по крайней мере дискретная топология. Рассмотрим теперь топологию

$$\tau = \bigcap_{\tau_{\alpha} \in \mathcal{T}} \tau_{\alpha}.$$

По ранее доказанному  $\tau$  — топология. Очевидно и то, что  $\tau$  — наименьший по включению элемент в классе  $\mathcal{T}$ . Наконец,  $f : (X, \tau) \rightarrow T_3$  непрерывно. В самом деле, если каждая топология  $\tau_{\alpha}$  содержит прообразы всех открытых в  $T_3$  множеств, то же верно и для пересечения всех топологий  $\tau_{\alpha}$ . Тем самым мы установили, что в (непустом!) классе топологий на множестве  $X$ , для которых отображение  $f : X \rightarrow T_3$  непрерывно, имеется наименьший по включению элемент, который естественно назвать *слабейшей топологией, в которой отображение  $f$  непрерывно*.

## 2. Направленное множество. Направленность

**Определение.** Множество  $A$  называется *направленным множеством*, если на нём введено отношение частичного порядка  $\leq$ , удовлетворяющее следующему условию: для любых  $\alpha_1, \alpha_2 \in A$  существует  $\alpha \in A$  такое, что  $\alpha_1 \leq \alpha$ ,  $\alpha_2 \leq \alpha$ .

Легко видеть, что это условие всегда выполняется, если  $A$  — линейно упорядоченное множество: достаточно взять больший из двух элементов. Условие также будет выполнено, если в  $A$  имеется наибольший элемент. Однако в общем случае для частичного порядка оно, вообще говоря, не выполнено: в примере на рис. 1 нет элемента  $x$  такого, что  $a \leq x$ ,  $b \leq x$ . В то же время, семейство всех подмножеств данного множества  $X$  является направленным множеством, поскольку для любых  $A, B$  верно  $A \subset A \cup B$ ,  $B \subset A \cup B$ , т. е.  $A \leq A \cup B$ ,  $B \leq A \cup B$ . Если бы мы ввели отношение порядка вторым способом (обратное включение), то имели бы  $A \leq A \cap B$ ,  $B \leq A \cap B$ .

*Замечание.* Вовсе не требуется, чтобы  $\alpha$  было отлично от  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ! В частности, не для всякого  $\alpha_0$  найдётся  $\alpha > \alpha_0$ . И это не противоречит определению, ибо если положить  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$ , то можно взять  $\alpha = \alpha_0$ ). Более того, направленное множество может состоять из одного элемента. В этом случае отношение порядка тривиально:  $x \leq x$ .

С учётом замечания легко видеть, что каждое из следующих числовых множеств (с обычным порядком) является направленным:  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $[0; 1)$ ,  $[0; 1]$ ,  $-\mathbb{N}$ ,  $\{0; 1\}$ . Также направленным множеством является множество  $\mathbb{R}^2$  с любым из трёх введённых в примерах 4–6 отношений порядка.

Введём теперь понятие, играющее для топологических пространств приблизительно ту же роль, какую для метрических играет последовательность, и являющееся обобщением этого последнего понятия.

**Определение.** Функция  $\{x_\alpha\} : A \rightarrow X$ , где  $A$  — направленное множество,  $X$  — произвольное множество, называется *направленностью*.

В качестве простейшего примера направленности, разумеется, годится последовательность. Однако чуть позже мы увидим, почему последовательностей при построении теории топологических пространств недостаточно.

Введём теперь понятие предела направленности в топологическом пространстве. Но прежде модифицируем определение предела последовательности:

**Определение.** Говорят, что последовательность  $\{x_n\}$  в топологическом пространстве  $T$  стремится к элементу  $x \in T$ , если для любой окрестности  $U_x \in \tau_x$  точки  $x$  найдётся такое  $N$ , что при всех  $n \geq N$  верно  $x_n \in U_x$ .

*Замечание.* Обычно вместо  $n \geq N$  пишут  $n > N$ . Для последовательностей это неважно, ведь  $n \geq N \Leftrightarrow n + 1 > N$ . Однако, как мы выяснили, направленное множество может не иметь элемента, большего данного. Поэтому для предела направленности имеем

**Определение.** Говорят, что направленность  $\{x_\alpha\}$  в топологическом пространстве  $T$  стремится к элементу  $x \in T$ , если для любой окрестности  $U_x \in \tau_x$  точки  $x$  найдётся такое  $\alpha_0 \in A$ , что при всех  $\alpha \geq \alpha_0$  верно  $x_\alpha \in U_x$ .

Приведём простой пример. Направленность  $x_\alpha = \frac{1}{\alpha}$ , где  $A = (0; +\infty)$  с обычным порядком,  $T = (0; +\infty)$  с обычной топологией, сходится к 0 (проверить!).

Докажем ключевую теорему этого семинара.

**Теорема.** Точка  $x$  в топологическом пространстве  $T$  является точкой касания для множества  $M$  тогда и только тогда, когда найдётся направленность точек множества  $M$ , сходящаяся к  $x$ .

*Доказательство.* Докажем сначала достаточность. Если  $x_\alpha \rightarrow x$  и при всех  $\alpha \in A$  верно  $x_\alpha \in M$ , то согласно определению сходящейся направленности для всякой окрестности  $U_x$  точки  $x$  существует такое  $\alpha_0 \in A$ , что при всех  $\alpha \geq \alpha_0$  верно  $x_\alpha \in U_x$ . Существенно, что для самого  $\alpha_0$  имеем  $x_{\alpha_0} \in U_x$ . В случае предела последовательности мы могли взять произвольное  $n$ , большее  $N$ . В данном же случае существенно, что можно взять  $\alpha_0$ , потому что следующих за ним элементов направленного множества  $A$  может и не существовать.

Теперь докажем необходимость. И здесь, как ни странно, доказательство окажется идейно даже более простым, чем для последовательностей в метрических пространствах, где нам нужно было каким-то образом выбирать стягивающиеся к пределу последовательности окрестности. Теперь же мы можем в качестве «индекса», которым «нумеруются» точки направленности, возьмём не что иное, как окрестности  $U_x$ , т. е. положим  $A = \tau_x$  (множество окрестностей точки  $x$ ), упорядоченное по обратному включению:  $U_{x,\alpha} \leq U_{x,\beta}$ , если  $U_{x,\alpha} \supset U_{x,\beta}$ . Естественность такого упорядочения очевидна: нам хочется получить «стягивающиеся» к пределу окрестности. Следует убедиться, что  $\tau_x$  — действительно направленное множество. В самом деле, частичная упорядоченность очевидна (как для любого семейства подмножеств, упорядоченного по включению или обратному включению). Далее, для любых окрестностей  $U_{x,\alpha}, U_{x,\beta}$  точки  $x$  их пересечение  $U_{x,\alpha} \cap U_{x,\beta}$  — снова окрестность точки  $x$ , т. к. является открытым множеством и содержит  $x$ . А согласно нашему упорядочению,  $U_{x,\alpha} \leq U_{x,\alpha} \cap U_{x,\beta}$ ,  $U_{x,\beta} \leq U_{x,\alpha} \cap U_{x,\beta}$ .

Теперь определим направленность  $x_{U(x)}$ , взяв для каждой окрестности  $U_x \in \tau_x$  точку  $x_{U(x)} = y$  из пересечения  $M \cap U_x$ . Такое  $y$  существует, поскольку  $x$  — точка касания множества  $M$ . Осталось доказать, что построенная направленность (состоящая, заметим, из элементов множества  $M$ ) сходится к  $x$ . Но это непосредственно следует из построения, ибо для любой окрестности  $U_{x,0}$  точки  $x$  можно положить  $\alpha_0 = U_{x,0}$  и тогда для любой окрестности  $U_x \geq U_{x,0}$  имеем в силу построения и введённого отношения порядка  $x_{U_x} \in U_x \subset U_{x,0}$ , т. е.  $x_{U_x} \in U_{x,0}$ , что и требовалось.

*Теорема доказана.*

Рассмотрим, к каким направленностям приводит доказательство теоремы в конкретных случаях.

1. Пусть  $T = [0; 1]$  с обычной метрической топологией,  $X = (0; 1]$ ,  $x = 0$ . Тогда имеем  $A = \{[0; y] \mid 0 < y \leq 1\}$ , причём можно положить  $x_{[0; y]} = \frac{y}{2}$ . Легко видеть, однако, что можно построить и последовательность элементов множества  $X$ , сходящуюся к 0:  $x_n = \frac{1}{n}$ .

2. Рассмотрим так называемое *связное двочетие*, а именно пространство  $(X, \tau)$ , где  $X = \{a, b\}$ ,  $\tau = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$ . Заметим, что в этом пространстве точка  $a$  является точкой касания множества  $\{b\}$ , поскольку единственным открытым множеством, содержащим  $a$ , является  $X \ni b$ . Тогда направленное множество  $A$ , построенное в теореме, имеет вид  $A = \{X\}$ . Соответствующая же направленность точек множества  $\{b\}$ , сходящаяся к точке  $a$ , представля-

ет собой  $x_X = b$ . Действительно, любая окрестность точки  $a$  (а именно,  $X$ : других нет) содержит точку  $b$  при всех  $U_a \geq X$  (т. е. при  $U_a = X$ ). С первого взгляда может показаться, что уже в этом примере нет последовательности точек множества  $\{b\}$ , стремящейся к  $a$ . Однако это не так: последовательность  $\{x_n\}$ , где  $x_n = b$ , сходится к  $a$ . (Заметим попутно, что и она, и построенная направленность, конечно сходятся и к  $b$ . Для пространства, не удовлетворяющего аксиоме отделимости Хаусдорфа, это неудивительно.)

3. В следующем примере не существует последовательности точек множества  $X$ , сходящейся к некоторой его точке касания (но, в силу доказанной теоремы, существует направленность). Положим снова  $X = [0; 1]$ , выбрав в качестве открытых все множества, получающиеся выбрасыванием из  $X$  не более чем счётного множества точек (в частности, само  $X$ ), а также пустое множество. Легко проверить, что полученное семейство множеств действительно удовлетворяет всем аксиомам топологии (удобнее проверять условия, предъявляемые к замыканиям, для их дополнений). Убедимся, что и в такой «странной» топологии  $0$  — точка касания множества  $(0; 1]$ . В самом деле, любая окрестность  $U_0$  точки  $0$  (как открытое множество) или пусто (что невозможно, ибо  $0 \in U_0$ ), или содержит все точки отрезка, кроме конечного или счётного их числа. Но тогда она обязательно содержит хотя бы одну точку из  $(0; 1]$ , что и требовалось. Теперь заметим, что в рассматриваемой топологии сходятся могут лишь последовательности, стационарные с некоторого номера. В самом деле, пусть  $y_n \rightarrow y$ . Положим  $Y_0$  равным множеству значений последовательности  $y_n$  за вычетом самой точки  $y$ . Легко видеть, что  $Y_0$  не более чем счётно, а поэтому  $[0; 1] \setminus Y_0$  открыто; а т. к.  $[0; 1] \setminus Y_0 \ni y$ , то оно является окрестностью точки  $y$ . С другой стороны, если последовательность  $y_n$  не является стационарной ни с какого номера, то, сколь бы велико ни было  $N$ , найдётся  $n > N$ , для которого  $y_n \neq y$ . Но тогда  $y_n \notin [0; 1] \setminus Y_0$ , т. е.  $y_n$  не лежит в рассматриваемой окрестности точки  $y$ . Итак, не найдётся такого  $N$ , после которого все члены последовательности лежали бы в окрестности  $[0; 1] \setminus Y_0$  точки  $y$ . Следовательно,  $y_n \not\rightarrow y$ . Значит, стремиться к  $0$  в нашем пространстве могут лишь те последовательности, которые с некоторого номера принимают только значения  $0$ . Но такие последовательности не лежат в  $(0; 1]$ .

Отметим в заключение ещё некоторые факты.

1. Всякая подпоследовательность некоторой последовательности есть её поднаправленность, но не всякая поднаправленность последовательности есть её подпоследовательность: рассмотрим последовательность  $\{x_1, x_1, x_2, x_3, \dots\}$ .

2. Как и в лекции, отметим без доказательства важнейшую теорему о компактности, обобщающее соответствующее утверждение для метрических пространств.

**Теорема.** Топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда всякая направленность в нём имеет сходящуюся поднаправленность.

### Задачи для самостоятельного решения

1. Проверить, что введённые в примерах 3—7 отношения действительно удовлетворяют акси-

омам отношения порядка. Проверить, что в примере 5 мы имеем дело с отношением линейного порядка.

2. Убедиться, что замкнутые подмножества данного множества  $X$ , содержащие заданное множество  $A \subset X$ , образуют множество, частично упорядоченное по включению. Убедиться, что оно содержит наименьший элемент и что он равен  $\bar{A}$ .

3. Построить пример, показывающий, что объединение двух топологий может не быть топологией.

4. Решить задачи 15—16 из семинара 2.

5\*. Решить задачи 19—20 из семинара 5.

6. 1) Показать, что в метрическом пространстве для множества  $A$  и его точки касания  $x$  найдётся последовательность  $\{x_n\}$  точек из  $A$ , сходящаяся к  $x$ .

2) Можно ли утверждать, что такую последовательность можно выбрать не содержащей точку  $x$ ?

3) Те же вопросы для случая, когда  $x$  — предельная точка множества  $A$ .