Лекция 1

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Введение

В этой лекции мы введем важные понятия дифференцируемости по Гато и по Фреше. Эти два понятия носят фундаментальный характер при исследовании вариационных задач, а также при рассмотрении различных нелинейных краевых задач. Будут доказаны важные теоремы о связи этих двух понятий друг с другом и с понятиями непрерывности функций дифференцируемых или по Гато или по Фреше. Рассмотрение данных понятий будет снабжено некоторыми примерами. Наконец, последняя часть этой лекции будет посвящена важному в приложениях оператору Немыцкого. Будет приведен без доказательства фундаментальный результат о сильной непрерывности оператора Немыцкого, который будет неоднократно использоваться в дальнейшем.

§ 2. Производные Гато и Фреше нелинейных операторов

Пусть $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ — это два банаховых пространства относительно норм $\|\ \ \|_1$ и $\|\ \ \|_2$ соответственно. Пусть, кроме того, $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ есть соответствующие скобки двойственности.

Рассмотрим некоторый, вообще говоря, нелинейный оператор

$$\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2.$$

Введем понятие дифференцируемости по Гато оператора $\mathbb{F}$. Дадим соответствующее определение.

Определение 1. *Оператор $\mathbb{F}$ называется дифференцируемым по Гато в точке $u \in \mathbb{B}_1$, если для любого $h \in \mathbb{B}_1$ имеет место предельное равенство*

$$\lim_{\lambda\to 0}\left\|\frac{\mathbb{F}(u+\lambda h)-\mathbb{F}(u)}{\lambda} - \mathbb{F}'_g(u)h\right\|_2 = 0, \tag{2.1}$$

где $\mathbb{F}'_g(u)$ при каждом фиксированном $u \in \mathbb{B}_1$ есть линейный оператор из $\mathbb{B}_1$ в $\mathbb{B}_2$. При этом, вообще говоря, нелинейный по $u \in \mathbb{B}_1$ оператор $\mathbb{F}'_g(u)$ называется производной Гато оператора $\mathbb{F}$.

Замечание 1. Введем $\mathbb{B}_2$−значную функцию

$$\varphi(\lambda) \equiv \mathbb{F}(u + \lambda h),$$

для всех $u, h \in \mathbb{B}_1$ и $\lambda \in \mathbb{R}^1$. Тогда, как нетрудно видеть, согласно определению 1 имеет место равенство

$$\mathbb{F}_g^{'}(u)h = \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}.$$

Рассмотрим теперь ряд примеров производных Гато отображений.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим теперь случай линейного оператора

$$\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2.$$

Тогда, очевидно, в силу линейности этого отображения имеет место следующее равенство:

$$\frac{\mathbb{F}(u + \lambda h) - \mathbb{F}(u)}{\lambda} = \mathbb{F}h,$$

т. е.

$$\mathbb{F}_g^{'}(u) = \mathbb{F}.$$

Тем самым, приходим к выводу о том, что линейный оператор из $\mathbb{B}_1$ в $\mathbb{B}_2$ является бесконечное число раз дифференцируемым по Гато, причем всякий раз соответствующая производная Гато совпадает с самим оператором.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим теперь следующее отображение:

$$\mathbb{F} = (\mathbb{F}_1, ..., \mathbb{F}_n) : \mathbb{R}_m \to \mathbb{R}_n,$$

где $\mathbb{R}_m$ и $\mathbb{R}_n$ — это евклидовы пространства строк. Конечно, они являются банаховыми относительно, например, таких норм:

$$\|u\|_1 = \Big(|u_1|^2 + \cdots + |u_m|^2\Big)^{1/2} \quad \text{и} \quad \|v\|_2 = \Big(|v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2\Big)^{1/2},$$

где $u = (u_1, ..., u_m) \in \mathbb{R}_m$ и $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}_n$. Вычислим производную Гато отображения $\mathbb{F}$. Действительно, как известно из линейной алгебры, всякое линейное отображение из $\mathbb{R}_m$ в $\mathbb{R}_n$ можно задать некоторой вещественной матрицей $\mathbb{A}$, состоящей из m строк и n столбцов. Поэтому согласно определению 1 имеет место предельное равенство (2.1). Возьмем в этом предельном равенстве в качестве h вектор $e_j \in \mathbb{R}_m$:

$$e_j = (0, ..0, 1, 0, ..., 0),$$

где 1 стоит на j−ом месте. Согласно определению 1 при фиксированном $u \in \mathbb{R}_m$

$$\mathbb{F}_g^{'}(u)$$

есть линейный оператор из $\mathbb{R}_m$ в $\mathbb{R}_n$. Поэтому

$$\mathbb{F}_g^{'}(u)e_j = \mathbb{A}e_j$$

и, значит,
$$(\mathbb{A}e_j)_k = a_{kj} \quad j \in \overline{1,m} \quad \text{и} \quad k \in \overline{1,n}.$$
Тем самым, из (2.1) с учетом выбора норм получаем, что
$$\lim_{\lambda\to 0}\left|\frac{\mathbb{F}_k(u+\lambda e_j)-\mathbb{F}_k(u)}{\lambda}-a_{kj}\right| = 0.$$
Но как хорошо известно
$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\mathbb{F}_k(u+\lambda e_j)-\mathbb{F}_k(u)}{\lambda} = \frac{\partial \mathbb{F}_k}{\partial u_j}(u).$$
Таким образом,
$$a_{kj} = \frac{\partial \mathbb{F}_k}{\partial u_j}(u),$$
т. е. производная Гато отображения $\mathbb{F}$ представляет собой якобиан этого отображения.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим оператор Гаммерштейна
$$\mathbb{G}(u) = \int\limits_0^1 k(x,y)g(u(y),y)\,dy \quad \text{для всех} \quad y \in [0,1].$$
В качестве банаховых пространств $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ возьмем $\mathbb{C}[0,1]$ и потребуем, чтобы
$$k(x,y) \in \mathbb{C}([0,1]\times[0,1]), \quad \frac{\partial g}{\partial u}(u,x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^1\times[0,1]).$$
В силу этих предположений имеет место предельное равенство
$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{g(u+\lambda h,x)-g(u,x)}{\lambda} = \frac{\partial g}{\partial u}(u,x)h(x).$$
Поэтому производная Гато оператора Гаммерштейна имеет вид
$$\mathbb{G}_g'(u)h = \int\limits_0^1 k(x,y)\frac{\partial g}{\partial u}(u(y),y)h(y)\,dy \quad \text{для всех} \quad h(x) \in \mathbb{C}[0,1].$$

Теперь приступим к рассмотрению еще одного вида производной от оператора — *производной Фреше*. Дадим определение.

Определение 2. *Оператор $\mathbb{F}$ называется дифференцируемым по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$, если в окрестности этой точки для любого $h \in \mathbb{B}_1$ имеет место следующее представление*:
$$\mathbb{F}(u+h) = \mathbb{F}(u) + \mathbb{F}_f'(u)h + \omega(u,h), \tag{2.2}$$
причем
$$\lim_{\|h\|_1\to 0}\frac{\|\omega(u,h)\|_2}{\|h\|_1} = 0. \tag{2.3}$$

Линейный при фиксированном $u \in \mathbb{B}_1$ *оператор*

$$\mathbb{F}_f'(u) : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

называется производной Фреше оператора $\mathbb{F}$.

Замечание 2. Пусть, кроме того, имеется третье банахово пространство $\mathbb{B}_3$, которое *непрерывно* вложено в банахово пространство $\mathbb{B}_1$, т. е.

$$\exists\, \mathrm{J} \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_3; \mathbb{B}_1)$$

и J — инъективный оператор. Тогда производная Фреше оператора

$$\mathbb{F}(\mathrm{J}\cdot) : \mathbb{B}_3 \to \mathbb{B}_2$$

есть оператор

$$\mathbb{F}_f'(\mathrm{J}\cdot) : \mathbb{B}_3 \to \mathcal{L}(\mathbb{B}_3; \mathbb{B}_2).$$

В случае когда рассматривается функционал

$$\psi(u) : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^1,$$

где $\mathbb{H}$ — это вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. Тогда дадим определение градиента функционала $\psi(u)$.

Определение 3. *Градиентом функционала* $\psi(u)$ *называется величина*

$$\mathbf{grad}\,\psi(u) = \mathrm{J}\psi_f'(u) : \mathbb{H} \to \mathbb{H},$$

где $\mathrm{J} : \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}$ — *оператор Рисса.*

ПРИМЕР 4. Рассмотрим отображение, определенное формулой

$$\mathbb{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1,$$

$$\mathbb{F}(x) = \begin{cases} \frac{x_1^3 x_2}{x_1^4 + x_2^2}, & \text{при} \quad x = (x_1, x_2) \neq 0; \\ 0, & \text{при} \quad x = (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

Докажем, что это отображение дифференцируемо по Гато в точке $(0,0)$. Действительно, имеет место следующая цепочка выражений:

$$\frac{\mathbb{F}(x+\lambda h) - \mathbb{F}(x)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{\lambda^4 h_1^3 h_2}{\lambda^4 h_1^4 + \lambda^2 h_2^2} = \lambda \frac{h_1^3 h_2}{\lambda^2 h_1^4 + h_2^2} \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to 0$$

в точке $x = (0,0)$. Тем самым, производная Гато этого отображения в точке $(0,0)$ равна нулевому отображению: $\mathbb{F}_g'(0) = \Theta$. Предположим, что производная Фреше этого отображения существует в точке $(0,0)$ и равна нулевому отображению Θ. Действительно, согласно определению 2 производной Фреше и явному виду отображения $\mathbb{F}$ имеет место следующее равенство:

$$\mathbb{F}(h) = \omega(\vartheta, h), \qquad \lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|\omega(\vartheta, h)\|}{\|h\|} = 0 \quad \text{при} \quad \|h\| \to +0.$$

Значит, с необходимостью получаем, что

$$\frac{\|\mathbb{F}(h)\|}{\|h\|} \to 0.$$

Рассмотрим стремление к точке $(0,0)$ вектора $h \in \mathbb{R}^2$ по кривой $h_2 = h_1^2$. Действительно, имеет место равенство

$$\frac{\|\mathbb{F}(h)\|}{\|h\|} = \frac{|h_1|^3|h_2|}{h_1^4 + h_2^2}\frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$
$$= \frac{|h_1|h_1^4}{h_1^4 + h_1^4}\frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_1^4}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1 + h_1^2}} \to \frac{1}{2} \neq 0 \quad \text{при} \quad \|h\| \to 0.$$

Полученное предельное равенство означает, что производной Фреше в точке $(0,0)$ не существует. Тем самым, из существования производной Гато в какой-то точке не следует существование производной Фреше в этой же точке.

Возникает естественный вопрос: при каких дополнительных условиях вытекает существование производной Фреше в некоторой точке при условии существования производной Гато в той же точке. Для ответа на этот вопрос нам необходимо доказать следующие два утверждения о среднем значении. Во-первых, справедлив следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbb{F} : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$. *Тогда для каждой пары* $u, h \in \mathbb{B}$ *найдется такое число* $\lambda = \lambda(u, h) \in (0, 1)$, *что имеет место формула*

$$\mathbb{F}(u + h) - \mathbb{F}(u) = \left\langle \mathbb{F}_g^{'}(u + \lambda h), h \right\rangle, \tag{2.4}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *— есть скобки двойственности между банаховыми пространствами* $\mathbb{B}$ *и* $\mathbb{B}^*$.

Доказательство.

Введем вещественно-значную функцию

$$\varphi(\lambda) = \mathbb{F}(u + \lambda h).$$

В силу замечания 1 имеем

$$\varphi^{'}(\lambda) = \left\langle \mathbb{F}_g^{'}(u + \lambda h), h \right\rangle.$$

Заметим теперь, что в силу теоремы Лагранжа для вещественных функций имеет место равенство

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi^{'}(\lambda) \quad \text{при некотором} \quad \lambda \in (0, 1).$$

Значит, справедливо равенство (2.4).

Теорема доказана.

Только что доказанная теорема позволит нам доказать следующий результат.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$, *тогда для каждой пары* $u, h \in \mathbb{B}_1$ *и* $f^* \in \mathbb{B}_2^*$ *найдется такое вещественное число* $\lambda = \lambda(u, h, f^*) \in (0, 1)$, *что имеют место следующие выражения*:

$$\langle f^*, \mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u) \rangle_2 = \left\langle f^*, \mathbb{F}_g^{'}(u + \lambda h)h \right\rangle_2 \tag{2.5}$$

и

$$\|\mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u)\|_2 \leqslant \left\| \mathbb{F}_g^{'}(u + \lambda h) \right\|_{1\to 2} \|h\|_1. \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Рассмотрим вещественнозначную функцию:

$$\varphi(u) \equiv \langle f^*, \mathbb{F}(u) \rangle_2 : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{R}^1.$$

Из дифференцируемости по Гато оператора $\mathbb{F}(u)$ вытекает дифференцируемость по Гато функции

$$\varphi(u) : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{R}^1.$$

Причем имеет место равенство

$$\left\langle \varphi_g^{'}(u), h \right\rangle_1 = \left\langle f^*, \mathbb{F}_g^{'}(u)h \right\rangle_2.$$

В силу теоремы 1 имеет место равенство

$$\varphi(u+h) - \varphi(u) = \left\langle \varphi_g^{'}(u + \lambda h), h \right\rangle_1$$

при некотором числе $\lambda = \lambda(u, h, f^*) \in (0, 1)$. Значит, имеет место равенство

$$\langle f^*, \mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u) \rangle_2 = \left\langle f^*, \mathbb{F}_g^{'}(u + \lambda h)h \right\rangle_2.$$

В силу следствия из теоремы Хана–Банаха при фиксированных $u, h \in \mathbb{B}_1$ найдется такое $f^* \in \mathbb{B}_2^*$ с $\|f^*\|_{2*} = 1$, что

$$\langle f^*, \mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u) \rangle_2 = \|\mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u)\|_2.$$

Тем самым, имеет место неравенство (2.6).

Т е о р е м а д о к а з а н а.

Наконец, мы в состоянии доказать следующий результат.

Т е о р е м а 3. *Пусть оператор* $\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ *является дифференцируемым по Гато в некоторой окрестности точки* $u \in \mathbb{B}_1$ *и производная Гато* $\mathbb{F}_g^{'}(\cdot)$ *непрерывна в точке* $u \in \mathbb{B}_1$. *Тогда оператор* $\mathbb{F}$ *дифференцируем по Фреше в этой же точке* $u \in \mathbb{B}_1$ *и*

$$\mathbb{F}_g^{'}(u) = \mathbb{F}_f^{'}(u).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Введем обозначение:

$$\omega(u, h) \equiv \mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u) - \mathbb{F}_g^{'}(u)h.$$

Пусть $f^* \in \mathbb{B}_2^*$, тогда имеем

$$\langle f^*, \omega(u,h)\rangle_2 = \langle f^*, \mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u)\rangle_2 - \left\langle f^*, \mathbb{F}_g'(u)h\right\rangle_2.$$

По теореме 2 найдется такое число $\lambda = \lambda(u,h,f^*) \in (0,1)$, что

$$\langle f^*, \mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u)\rangle_2 = \left\langle f^*, \mathbb{F}_g'(u+\lambda h)h\right\rangle_2.$$

Следовательно,

$$\langle f^*, \omega(u,h)\rangle_2 = \left\langle f^*, \mathbb{F}_g'(u+\lambda h)h - \mathbb{F}_g'(u)h\right\rangle_2.$$

По следствию из теоремы Хана–Банаха при фиксированных $u, h \in \mathbb{B}_1$ найдется такое $f^* \in \mathbb{B}_2^*$ с $\|f^*\|_{*2} = 1$, что

$$\|\omega(u,h)\|_2 = \langle f^*, \omega(u,h)\rangle_2.$$

Значит, имеет место неравенство

$$\|\omega(u,h)\|_2 \leqslant \left\|\mathbb{F}_g'(u+\lambda h) - \mathbb{F}_g'(u)\right\|_{1\to 2} \|h\|_1.$$

Следовательно, в силу непрерывности $\mathbb{F}_g'(\cdot)$ в точке $u \in \mathbb{B}_1$ имеет место неравенство

$$\lim_{\|h\|_1\to 0} \frac{\|\omega(u,h)\|_2}{\|h\|_1} \leqslant \lim_{\|h\|_1\to 0} \left\|\mathbb{F}_g'(u+\lambda h) - \mathbb{F}_g'(u)\right\|_{1\to 2} = 0.$$

Теорема доказана.

Теперь мы можем установить связь между понятиями дифференцируемости по Фреше и непрерывности отображения. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ — это отображение, дифференцируемое по Фреше в некоторой точке $u \in \mathbb{B}_1$, тогда отображение $\mathbb{F}$ непрерывно в этой точке.*

Доказательство.

Действительно, в силу дифференцируемости по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$ имеет место следующее представление:

$$\left\|\mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u) - \mathbb{F}_f'(u)h\right\|_2 \leqslant \|h\|_1$$

при достаточно малом $h \in \mathbb{B}_1$. Но тогда имеет место следующее неравенство:

$$\|\mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u)\|_2 \leqslant \left\|\mathbb{F}(u+h) - \mathbb{F}(u) - \mathbb{F}_f'(u)h\right\|_2 + \\ + \left\|\mathbb{F}_f'(u)h\right\|_2 \leqslant \left(1 + \left\|\mathbb{F}_f'(u)\right\|_{1\to 2}\right) \|h\|_1.$$

Теорема доказана.

П Р И М Е Р 5. Приведем пример отображения, дифференцируемого по Гато в некоторой точке, но не непрерывной в этой точке. Пусть

$$\mathbb{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^1,$$

$$\mathbb{F}(x)=\begin{cases}\frac{x_1^4x_2}{x_1^6+x_2^3}, & \text{при}\quad (x_1,x_2)\neq(0,0);\\ 0, & \text{при}\quad (x_1,x_2)=(0,0).\end{cases}$$

Действительно, выражение

$$\frac{\mathbb{F}(x+\lambda h)-\mathbb{F}(x)}{\lambda}$$

в точке $x=(0,0)$ имеет вид

$$\frac{\lambda^5h_1^4h_2}{\lambda\left(\lambda^6h_1^6+\lambda^3h_2^3\right)}=\lambda\frac{h_1^4h_2}{\lambda^3h_1^6+h_2^3}\to 0\quad\text{при}\quad\lambda\to 0.$$

Значит, производная Гато указанного отображения существует в точке $x=(0,0)$ и равна нулевому отображению

$$\mathbb{F}_g^{'}(\vartheta)=\Theta.$$

Докажем, что тем не менее отображение $\mathbb{F}$ не непрерывно в нуле. Действительно, рассмотрим кривую в $\mathbb{R}^2$ $x_2=\lambda x_1^2$ при $\lambda>0$. И устремим точку (x_1,x_2) к $(0,0)$ вдоль этой кривой. Тогда получим

$$\mathbb{F}(x)\Big|_{x_2=\lambda x_1^2}=\frac{\lambda}{1+\lambda^3}.$$

Таким образом, предел при $x\to(0,0)$ вдоль кривой $x_2=\lambda x_1^2$ зависит от параметра $\lambda>0$. Следовательно, указанное отображение $\mathbb{F}$ не является непрерывным в точке $(0,0)$.

Однако, в случае дифференцируемости по Гато есть некоторый ослабленный вариант непрерывности. Справедлива следующая лемма.

Л е м м а 1. *Пусть отображение $\mathbb{F}$ дифференцируемо по Гато в некоторой точке $u\in\mathbb{B}_1$. Тогда имеет место следующее неравенство*:

$$\|\mathbb{F}(u+\lambda h)-\mathbb{F}(u)\|_2\leqslant c|\lambda|, \tag{2.7}$$

где $c=c(u,h)>0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

В силу дифференцируемости по Гато в точке $u\in\mathbb{B}_1$ имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left\|\frac{\mathbb{F}(u+\lambda h)-\mathbb{F}(u)}{\lambda}\right\|_2\leqslant\left\|\frac{\mathbb{F}(u+\lambda h)-\mathbb{F}(u)}{\lambda}-\mathbb{F}_g^{'}(u)h\right\|_2+$$
$$+\left\|\mathbb{F}_g^{'}(u)h\right\|_2\leqslant c_1+c_2=c_3,$$

где c_3 не зависит от λ. Отсюда вытекает неравенство (2.7).

Л е м м а д о к а з а н а.

Теперь мы в состоянии доказать формулы дифференцирования по Гато и по Фреше композиции операторов. Именно, справедлив следующий результат.

Теорема 5. *Пусть* $\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ *и* $\mathbb{G} : \mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}_3$, *причем оператор* $\mathbb{F}$ *дифференцируем по Гато в некоторой точке* $u \in \mathbb{B}_1$, *а оператор* $\mathbb{G}$ *дифференцируем по Фреше в точке* $\mathbb{F}(u)$. *Тогда их композиция*

$$\mathbb{K} \equiv \mathbb{G} \circ \mathbb{F}$$

дифференцируема по Гато в точке $u \in \mathbb{B}_1$, *причем имеет место следующее равенство*:

$$\mathbb{K}'_g(u) = \mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u))\mathbb{F}'_g(u). \tag{2.8}$$

Доказательство.

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\frac{1}{|\lambda|}\left\|\mathbb{K}(u+\lambda h) - \mathbb{K}(u) - \lambda\mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u))\mathbb{F}'_g(u)\right\|_3 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{|\lambda|}\left\|\mathbb{G}(\mathbb{F}(u+\lambda h)) - \mathbb{G}(\mathbb{F}(u)) - \mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u))(\mathbb{F}(u+\lambda h) - \mathbb{F}(u))\right\|_3 +$$
$$+ \frac{1}{|\lambda|}\left\|\mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u))\left[\mathbb{F}(u+\lambda h) - \mathbb{F}(u) - \lambda\mathbb{F}'_g(u)h\right]\right\|_3 = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2.$$

Рассмотрим сначала выражение I_2. Для него справедлива оценка

$$\mathrm{I}_2 \leqslant \left\|\mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u))\right\|_{2\to 3}\left\|\frac{\mathbb{F}(u+\lambda h) - \mathbb{F}(u)}{\lambda} - \mathbb{F}'_g(u)h\right\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to 0.$$

Теперь рассмотрим выражение для I_1. Для него в силу определения 2 справедлива оценка

$$\mathrm{I}_1 \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\overline{\overline{o}}\left(\|\mathbb{F}(u+\lambda h) - \mathbb{F}(u)\|_2\right) \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\overline{\overline{o}}(|\lambda|) = \overline{\overline{o}}(1),$$

где мы воспользовались результатом леммы 1.

Теорема доказана.

Наконец, справедлив следующий результат.

Теорема 6. *Пусть* $\mathbb{F} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ *и* $\mathbb{G} : \mathbb{B}_2 \to \mathbb{B}_3$, *причем оператор* $\mathbb{F}$ *дифференцируем по Фреше в некоторой точке* $u \in \mathbb{B}_1$, *а оператор* $\mathbb{G}$ *дифференцируем по Фреше в точке* $\mathbb{F}(u)$. *Тогда их композиция*

$$\mathbb{K} \equiv \mathbb{G} \circ \mathbb{F}$$

дифференцируема по Фреше в точке $u \in \mathbb{B}_1$, *причем имеет место следующее равенство*:

$$\mathbb{K}'_f(u) = \mathbb{G}'_f(\mathbb{F}(u))\mathbb{F}'_f(u). \tag{2.9}$$

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
&\left\|\mathbb{K}(u+h)-\mathbb{K}(u)-\mathbb{G}_f'(\mathbb{F}(u))\mathbb{F}_f'(u)\right\|_3 \leqslant \\
&\quad\leqslant \left\|\mathbb{G}(\mathbb{F}(u+h))-\mathbb{G}(\mathbb{F}(u))-\mathbb{G}_f'(\mathbb{F}(u))\left[\mathbb{F}(u+h)-\mathbb{F}(u)\right]\right\|_3+ \\
&\qquad+\left\|\mathbb{G}_f'(\mathbb{F}(u))\left[\mathbb{F}(u+h)-\mathbb{F}(u)-\mathbb{F}_f'(u)h\right]\right\|_3 \leqslant \\
&\qquad\leqslant \|\omega_1(\mathbb{F}(u),\mathbb{F}(u+h)-\mathbb{F}(u))\|_3+\left\|\mathbb{G}_f'(\mathbb{F}(u))\right\|_{2\to 3}\|\omega_2(u,h)\|_3.
\end{aligned}
$$

Теперь заметим, что в силу дифференцируемости по Фреше оператора $\mathbb{F}$ имеет место оценка

$$
\|\mathbb{F}(u+h)-\mathbb{F}(u)\|_2 \leqslant c\|h\|_1.
$$

Поэтому имеет место следующее предельное равенство:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\|h\|_1\to 0}\frac{\|\omega_1(\mathbb{F}(u),\mathbb{F}(u+h)-\mathbb{F}(u))\|_3}{\|h\|_1}= \\
&\qquad=\lim_{\|h\|_1\to 0}\frac{\|\omega_1(\mathbb{F}(u),\mathbb{F}(u+h)-\mathbb{F}(u))\|_3}{\|\mathbb{F}(u+h)-\mathbb{F}(u)\|_2}\frac{\|\mathbb{F}(u+h)-\mathbb{F}(u)\|_2}{\|h\|_1}=0.
\end{aligned}
$$

Кроме этого, имеет место предельное равенство

$$
\lim_{\|h\|_1\to 0}\frac{\|\omega_2(u,h)\|_3}{\|h\|_1}=0.
$$

Тем самым, приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

§ 3. Оператор Немыцкого

Теперь приступим к рассмотрению одного частного, но важного класса операторов, называемых *операторами Немыцкого*. Для того чтобы ввести оператор Немыцкого нам сначала необходимо рассмотреть так называемые *Каратеодориевы функции*. Пусть $(\Omega,\mathcal{M},\mu)$ — это есть полное измеримое $\sigma-$конечное пространство. Дадим определения.

Определение 4. *Функция*

$$
f(x,u):\Omega\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^1
$$

называется Каратеодориевой, если она для всех $u\in\mathbb{R}^N$ $\mu-$*-измерима на* Ω *и для* $\mu-$*почти всех* $x\in\Omega$ *непрерывна по* $u\in\mathbb{R}^N$.

Определение 5. *Оператор* $N_f(u)\equiv f(x,u(x))$ *называется оператором Немыцкого.*

Его важность при исследовании нелинейных краевых задач обусловлена тем, что для него справедлива следующая теорема М. А. Красносельского.

Теорема 7. *Оператор Немыцкого $N_f(u)$ является ограниченным и непрерывным, действующим из*

$$\prod_{k=1}^{N} L^{p_k}(\Omega,\mu) \quad \textit{в} \quad L^q(\Omega,\mu) \quad \textit{при} \quad p_k, q \in [1,+\infty)$$

тогда и только тогда, когда для соответствующей Каратеодориевой функции $f(x,u)$ справедлива оценка

$$|f(x,u)| \leqslant a(x) + c\sum_{k=1}^{N} |u_k|^{p_k/q}$$

для всех $u = (u_1, ..., u_N) \in \mathbb{R}^N$ и μ—почти всех $x \in \Omega$, где $a(x) \in \in L^q(\Omega,\mu)$.

Доказательство этой теоремы достаточно сложное и кропотливое имеется в работе [?].

Рассмотрим теперь следующий важный результат, который будет нами неоднократно использоваться в вариационных задачах.

Пусть

$$f(x,u) : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^1$$

является Каратеодориевой функцией. Введем так называемую потенциальную функцию

$$F(x,z) = \int_0^z f(x,\xi)\, d\xi, \tag{3.1}$$

а также функционал

$$\psi(u) = \int_\Omega F(x,u(x))\, dx. \tag{3.2}$$

Предположим также, что

$$|f(x,u)| \leqslant a(x) + c|u|^{p/p'} \quad \text{при} \quad p' = \frac{p}{p-1} \quad \text{и} \quad p \in (1,+\infty),$$

где $a(x) \in L_+^{p'}(\Omega)$ и $c > 0$. Тогда для потенциальной функции $F(x,u)$, определенной формулой (3.1), имеет место следующее неравенство:

$$|F(x,u)| \leqslant \left| \int_0^{u(x)} f(x,\xi)\, d\xi \right| \leqslant a(x)|u| + \frac{c}{p}|u|^p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|a(x)|^{p'}}{p'} + \frac{|u|^p}{p} + \frac{c}{p}|u|^p = a_1(x) + c_1|u|^p, \tag{3.3}$$

где $a_1(x) \in L^1(\Omega)$ и $c_1 > 0$. Очевидно, что по своему определению потенциальная функция $F(x,u)$ является Каратеодориевой и поэтому в силу теоремы М. А. Красносельского и (3.3) приходим к выводу, что соответствующий оператор Немыцкого

$$N_F(u) : L^p(\Omega) \to L^1(\Omega)$$

и является ограниченным и непрерывным. Следовательно, функционал $\psi(u)$, определенный формулой (3.2) является ограниченным и непрерывным из $L^p(\Omega)$ в $\mathbb{R}^1$. Действительно, в силу оценки (3.3) имеет место цепочка неравенств:

$$|\psi(u)| \leqslant \int\limits_{\Omega} |F(x, u(x))|\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} a_1(x)\, dx + c_1 \int\limits_{\Omega} |u|^p\, dx \leqslant c_2 + c_1 \|u\|_p^p.$$

Ограниченность доказана. Докажем непрерывность. Пусть

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega).$$

Тогда

$$|\psi(u_n) - \psi(u)| \leqslant \|N_F(u_n) - N_F(u)\|_1 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Итак, непрерывность и ограниченность функционала $\psi(u)$ доказана. Докажем теперь его дифференцируемость по Фреше. Рассмотрим следующее выражение:

$$\omega(u, v) \equiv \psi(u + v) - \psi(u) - \langle N_f(u), v\rangle \quad \text{для} \quad u, v \in L^p(\Omega).$$

$$|\omega(u, v)| \leqslant \left| \int\limits_{\Omega} [F(x, u(x) + v(x)) - F(x, u(x))]\, dx - \int\limits_{\Omega} N_f(u)(x) v(x)\, dx \right|.$$

Заметим, что имеет место цепочка равенств

$$F(x, u(x) + v(x)) - F(x, u(x)) = \\ = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt} F(x, u(x) + t v(x))\, dt = \int\limits_0^1 f(x, u(x) + t v(x)) v(x)\, dt.$$

Поэтому справедлива оценка

$$|\omega(u, v)| \leqslant \int\limits_0^1 dt \int\limits_{\Omega} dx\, |N_f(u + tv)(x) - N_f(u)(x)|\, |v(x)| \leqslant \\ \leqslant \int\limits_0^1 dt\, \|N_f(u + tv) - N_f(u)\|_{p'}\, \|v\|_p.$$

Следовательно, в силу непрерывности оператора Немыцкого $N_f(\cdot)$ имеет место предельное неравенство

$$\lim_{\|v\|_p\to 0}\frac{|\omega(u,v)|}{\|v\|_p}\leqslant \lim_{\|v\|_p\to 0}\int\limits_0^1 dt\,\|N_f(u+tv)-N_f(u)\|_{p'}=0.$$

Тем самым, справедлива следующая лемма.
Л е м м а 2. *При сформулированных условиях функционал* $\psi(u)$, *определенный формулой* (3.2), *является дифференцируемым по Фреше, причем имеет место следующее равенство*:

$$\psi'_f(u)=N_f(u)\quad \text{для всех}\quad u\in L^p(\Omega)\quad \text{при}\quad p\in(1,+\infty). \tag{3.4}$$

§ 4. Компактные операторы

Важность рассмотрения так называемых компактных операторов обусловлена тем, что это понятие широко используется в топологических методах при обобщении понятия степени конечномерного отображения. Дадим определение. Пусть

$$\mathbb{F}:\mathbb{B}_1\to\mathbb{B}_2,$$

где $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ — это два банаховых пространства с соответствующими скобками двойственности

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_1\quad \text{и}\quad \langle\cdot,\cdot\rangle_2.$$

О п р е д е л е н и е 6. *Оператор* $\mathbb{F}$ *называется компактным, если для каждого ограниченного множества* $\mathrm{B}\subset\mathbb{B}_1$ *замыкание множества* $\mathbb{F}(\mathrm{B})\subset\mathbb{B}_2$ *компактно в* $\mathbb{B}_2$.

Справедлив следующий важный результат.
Т е о р е м а 8. *Пусть оператор* $\mathbb{F}$ *является компактным и дифференцируемым по Фреше в точке* $u\in\mathbb{B}_1$, *тогда* $\mathbb{F}'_f(u)$ *является также компактным оператором.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть нет. Тогда найдется такое $\varepsilon>0$ и такая последовательность $\|u_n\|_1\leqslant 1$, что

$$\left\|\mathbb{F}'_f(u)u_n-\mathbb{F}'_f(u)u_m\right\|_2\geqslant 3\varepsilon. \tag{4.1}$$

С другой стороны, в силу дифференцируемости по Фреше в точке $u\in\in\mathbb{B}_1$ имеет место представление

$$\mathbb{F}(u+h)-\mathbb{F}(u)=\mathbb{F}'_f(u)h+\omega(u,h)\quad \text{для}\quad h\in\mathbb{B}_1.$$

Тогда для этого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что при $\|h\|_1\leqslant\delta$ имеет место неравенство

$$\|\omega(u,h)\|_2\leqslant\varepsilon\|h\|_1.$$

С другой стороны, справедливы равенства

$$\mathbb{F}(u+\delta u_n)-\mathbb{F}(u)=\mathbb{F}'_f(u)\delta u_n+\omega(u,\delta u_n),$$
$$\mathbb{F}(u+\delta u_m)-\mathbb{F}(u)=\mathbb{F}'_f(u)\delta u_m+\omega(u,\delta u_m),$$

откуда сразу же получаем

$$\mathbb{F}(u+\delta u_n)-\mathbb{F}(u+\delta u_m)=\delta\mathbb{F}'_f(u)(u_n-u_m)+\omega(u,\delta u_n)-\omega(u,\delta u_m).$$

Следовательно, отсюда вытекает неравенство

$$\delta\left\|\mathbb{F}'_f(u)(u_n-u_m)\right\|_2\leqslant\|\mathbb{F}(u+\delta u_n)-\mathbb{F}(u+\delta u_m)\|_2+$$
$$+\|\omega(u,\delta u_n)\|_2+\|\omega(u,\delta u_m)\|_2\leqslant\|\mathbb{F}(u+\delta u_n)-\mathbb{F}(u+\delta u_m)\|_2+2\varepsilon\delta.$$

Заметим, что в силу (4.1) имеет место неравенство

$$\left\|\mathbb{F}'_f(u)(u_n-u_m)\right\|_2\geqslant 3\varepsilon.$$

Значит, приходим к неравенству

$$\|\mathbb{F}(u+\delta u_n)-\mathbb{F}(u+\delta u_m)\|_2\geqslant\varepsilon\delta>0,$$

что противоречит предположению о компактности отображения $\mathbb{F}$, поскольку из последовательности $\{\mathbb{F}(u_n)\}$ нельзя извлечь сильно сходящуюся подпоследовательность.

Теорема доказана.

Но как правило в приложениях мы сталкиваемся с более узким понятием.

Определение 7. *Оператор $\mathbb{F}$ называется вполне непрерывным, если он непрерывен и компактен.*

Очень важным в приложениях к исследованию нелинейных краевых задач является понятие полностью непрерывного оператора. Дадим определение.

Определение 8. *Оператор $\mathbb{F}$ называется полностью непрерывным, если из условия*

$$u_n\rightharpoonup u\quad\textit{слабо в}\quad\mathbb{B}_1$$

вытекает, что

$$\mathbb{F}(u_n)\to\mathbb{F}(u)\quad\textit{сильно в}\quad\mathbb{B}_2.$$

Естественно, возникает вопрос о связи понятий вполне непрерывности и полной непрерывности операторов. Частично на этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть $L\in\mathcal{L}(\mathbb{B}_1,\mathbb{B}_2)$ — это вполне непрерывный оператор, тогда он является полностью непрерывным.*

Доказательство.

Итак, пусть

$$u_n\rightharpoonup u\quad\text{слабо в}\quad\mathbb{B}_1,$$

тогда эта последовательность сильно ограничена в $\mathbb{B}_1$. Тогда в силу компактности L из последовательности $\{u_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{u_{n_k}\}$ такую, что

$$Lu_{n_k} \to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Рассмотрим транспонированный к L оператор

$$L^t : \mathbb{B}_2^* \to \mathbb{B}_1^*.$$

Поскольку $L \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$, т. е. является линейным и непрерывным, то и $L^t \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_2^*, \mathbb{B}_1^*)$, причем по определению транспонированного оператора справедливо следующее равенство:

$$\langle f^*, Lu\rangle_2 = \left\langle L^t f^*, u\right\rangle_1 \quad \text{для всех} \quad f^* \in \mathbb{B}_2^*, \quad u \in \mathbb{B}_1.$$

Докажем, что

$$Lu_n \rightharpoonup Lu \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Действительно, имеет место следующее выражение:

$$\langle f^*, Lu_n - Lu\rangle_2 = \left\langle L^t f^*, u_n - u\right\rangle_1 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

поскольку

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_1.$$

Таким образом, приходим к выводу, что

$$Lu_n \rightharpoonup Lu \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_2. \tag{4.2}$$

Докажем теперь, что на самом деле

$$Lu_n \to Lu \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2.$$

По доказанному,

$$Lu_{n_k} \to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2,$$

значит,

$$Lu_{n_k} \rightharpoonup v \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Следовательно, в силу (4.2) приходим к равенству

$$v = Lu.$$

Теперь предположим, что найдется такая подпоследовательность $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$, что имеет место неравенство

$$\|Lu_{n_k} - Lu\|_2 \geqslant c > 0 \quad \text{для всех} \quad n_k \in \mathbb{N}.$$

С другой стороны, по доказанному, у этой подпоследовательности найдется такая подпоследовательность

$$\left\{u_{n_{k_l}}\right\} \subset \{u_{n_k}\}$$

такая, что

$$\left\|Lu_{n_{k_l}} - Lu\right\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad l \to +\infty.$$

Справедлива цепочка неравенств

$$0 < c \leqslant \|Lu_{n_k} - Lu\|_2 \leqslant \left\|Lu_{n_k} - Lu_{n_{k_l}}\right\|_2 + \left\|Lu_{n_{k_l}} - Lu\right\|_2.$$

Выберем теперь $l \in \mathbb{N}$ настолько большим, чтобы имело место неравенство

$$\left\|Lu_{n_{k_l}} - Lu\right\|_2 \leqslant \frac{c}{2}.$$

С другой стороны, для каждого $l \in \mathbb{N}$ найдется такое $n_k \in \mathbb{N}$, что

$$n_k = n_{k_l} \Rightarrow u_{n_k} = u_{n_{k_l}} \Rightarrow Lu_{n_{k_l}} = Lu_{n_k}$$

и тогда

$$\left\|Lu_{n_k} - Lu_{n_{k_l}}\right\|_2 = 0$$

и мы приходим к противоречивому неравенству

$$0 < c \leqslant \frac{c}{2}.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема доказана.

Заметим, что обратное утверждение, вообще говоря, не справедливо.

ПРИМЕР 6. Как известно, пространство l_1 обладает свойством Шура, т. е. из условия

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad l_1$$

вытекает, что

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad l_1.$$

Поэтому единичный оператор

$$\mathrm{I} : l_1 \to l_1$$

является полностью непрерывным, но, очевидно, не является компактным.

Однако, при дополнительном условии рефлексивности банахова пространства $\mathbb{B}_1$ из полной непрерывности линейного оператора

$$L : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

вытекает компактность. Действительно, справедлив следующий результат.

Теорема 10. *Пусть линейный оператор L полностью непрерывен. Тогда, если банахово пространство $\mathbb{B}_1$ рефлексивно, то L — это вполне непрерывный оператор.*

Доказательство.

Непрерывность оператора L вытекает из того факта, что всякая последовательность $\{u_n\} \subset \mathbb{B}_1$ и такая, что

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_1$$

является слабо сходящейся:

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_1.$$

Теперь осталось воспользоваться полной непрерывностью оператора L.

Докажем теперь компактность. Действительно, пусть $\mathrm{B} \subset \mathbb{B}_1$ — это ограниченное множество. Тогда из любой последовательности $\{u_n\} \subset \subset \mathrm{B}$ в силу рефлексивности $\mathbb{B}_1$ можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность:

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_1.$$

Следовательно, в силу полной непрерывности оператора L имеем

$$Lu_{n_k} \to Lu \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Отсюда вытекает компактность.

Теорема доказана.

Важным следствием теорем 9 и 10 является следующее утверждение.

Теорема 11. *Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ и $\mathbb{B}_1$ рефлексивно. Тогда для полной непрерывности оператора L, необходима и достаточна, вполне непрерывность оператора L.*

Для дальнейшего нам необходимо дать еще одно определение и доказать одну вспомогательную лемму. Дадим определение.

Определение 9. *Множество $\mathrm{B} \subset \mathbb{B}$ банахова пространства $\mathbb{B}$ называется относительно компактным или предкомпактным, если его замыкание компактно.*

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Подмножество $\mathrm{K} \subset \mathbb{B}$ является относительно компактным, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое относительно компактное множество $\mathrm{K}_\varepsilon \subset \mathbb{B}$, что для каждого $u \in \mathrm{K}$ найдется такое $u_\varepsilon \in \mathrm{K}_\varepsilon$, что*

$$\|u - u_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство.

Пусть $\varepsilon > 0$ выбрано и фиксировано. По условию леммы найдется относительно компактное множество

$$\mathrm{K}_{\varepsilon/2} \subset \mathbb{B},$$

т. е. это в свою очередь означает, что найдутся такие точки

$$u_\varepsilon^k \in \mathbb{B} \quad \text{при} \quad k = \overline{1, n},$$

что

$$\mathrm{K}_{\varepsilon/2} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{\varepsilon/2}(u_\varepsilon^k), \tag{4.3}$$

где

$$\mathrm{B}_{\varepsilon/2}(u_\varepsilon^k) \equiv \left\{ u \in \mathbb{B} : \ \|u - u_\varepsilon^k\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

т. е. замкнутый шар в $\mathbb{B}$ радиуса $\varepsilon/2$ с центром в u_ε^k при $k=\overline{1,n}$.

С одной стороны, по условию леммы имеем для каждого $u \in \mathrm{K}$ найдется такое $u_{\varepsilon/2} \in \mathrm{K}_{\varepsilon/2}$, что

$$\|u-u_{\varepsilon/2}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.4}$$

С другой стороны, в силу (4.3) найдется такое $k_0 \in \overline{1,n}$, что

$$\left\|u_{\varepsilon/2}-u_\varepsilon^{k_0}\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда и из (4.4) приходим к выводу, что

$$\|u-u_\varepsilon^{k_0}\| \leqslant \left\|u_{\varepsilon/2}-u_\varepsilon^{k_0}\right\| + \|u-u_{\varepsilon/2}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Это означает, что

$$\mathrm{K} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{B}_\varepsilon(u_\varepsilon^k),$$

т. е. множество K является относительно компактным.

Лемма доказана.

Теперь мы в состоянии доказать важную для нас в дальнейшем теорему.

Теорема 12. *Пусть* $\mathbb{B}_1$ *и* $\mathbb{B}_2$ *— это банаховы пространства и* $\mathrm{D} \subset \mathbb{B}_1$ *— это ограниченное множество. Пусть, кроме того,*

$$\mathbb{F} : \mathrm{D} \to \mathbb{B}_2$$

это некоторое отображение. Тогда следующие два условия эквивалентны:

(I) $\mathbb{F}$ *— это вполне непрерывное отображение;*

(II) *для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое ограниченное и непрерывное отображение*

$$\mathbb{F}_\varepsilon : \mathrm{D} \to \mathbb{B}_2,$$

что $\mathbb{F}_\varepsilon(\mathrm{D})$ *принадлежит замыканию выпуклой оболочки множества* $\mathbb{F}(\mathrm{D})$ *в* $\mathbb{B}_2$ *и*

$$\dim(\operatorname{span}\mathbb{F}_\varepsilon(\mathrm{D})) < +\infty$$

и

$$\|\mathbb{F}(u)-\mathbb{F}_\varepsilon(u)\|_2 \leqslant \varepsilon \quad \textit{для всех} \quad u \in \mathrm{D}.$$

Доказательство.

Докажем сначала, что из (I) вытекает (II). Действительно, пусть отображение $\mathbb{F}$ является вполне непрерывным отображением. Тогда в силу ограниченности $\mathrm{D} \subset \mathbb{B}_1$ множество $\mathbb{F}(\mathrm{D})$ относительно компактно в $\mathbb{B}_2$. Следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся такие точки $v_\varepsilon^k \in \mathbb{B}_2$ при $k=\overline{1,n}$, что

$$\overline{\mathbb{F}(\mathrm{D})} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{B}_\varepsilon(v_\varepsilon^k),$$

где
$$\mathrm{B}_\varepsilon(v_\varepsilon^k) \equiv \left\{v \in \mathbb{B}_2 : \ \|v - v_\varepsilon^k\|_2 \leqslant \varepsilon\right\}.$$
Введем следующие функции:
$$f_k(v) \equiv \max\{\varepsilon - \|v - v_\varepsilon^k\|_2, 0\}.$$
И рассмотрим следующую функцию
$$\overline{f}_m(v) = \begin{cases} f_m(v) \Big/ \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(v), & \text{при} \quad f_m(v) \neq 0; \\ 0, & \text{при} \quad f_m(v) = 0 \end{cases} \tag{4.5}$$
при $m \in \overline{1,n}$ и для всех $v \in \overline{\mathbb{F}(\mathrm{D})}$. Теперь мы можем ввести отображение $\mathbb{F}_\varepsilon(u)$ следующим образом:
$$\mathbb{F}_\varepsilon(u) = \sum_{m=1}^{n} \overline{f}_m(\mathbb{F}(u)) v_\varepsilon^m \quad \text{для всех} \quad u \in \mathrm{D}.$$
Ограниченность этого отображения очевидна. Докажем непрерывность. По своему построению (4.5) функция
$$\overline{f}_m = \overline{f}_m(f_1, ..., f_n) \quad \text{при} \quad m = \overline{1,n}$$
непрерывна по совокупности вещественных переменных $f_k \in \mathbb{R}^1$, а функция $f_k = f_k(v)$ непрерывна для всех $v \in \overline{\mathbb{F}(\mathrm{D})}$. Наконец, по условию леммы оператор $\mathbb{F}$ непрерывен на $\mathrm{D} \subset \mathbb{B}_1$. Следовательно, по теореме о композиции непрерывных отображений оператор $\mathbb{F}_\varepsilon(u)$ непрерывен. Наконец, $\mathbb{F}_\varepsilon(u)$ — это конечномерный оператор, поскольку
$$\operatorname{span} \mathbb{F}_\varepsilon(\mathrm{D}) \subset \operatorname{span}\{v_\varepsilon^1, ..., v_\varepsilon^n\},$$
$\overline{\mathbb{F}(\mathrm{D})}$ — компактно в $\mathbb{B}_2$ и имеет место неравенство
$$\|\mathbb{F}(u) - \mathbb{F}_\varepsilon(u)\|_2 = \left\| \sum_{m=1}^{n} \overline{f}_m(\mathbb{F}(u))\mathbb{F}(u) - \sum_{m=1}^{n} \overline{f}_m(\mathbb{F}(u)) v_\varepsilon^m \right\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m=1}^{n} \overline{f}_m(\mathbb{F}(u)) \|\mathbb{F}(u) - v_\varepsilon^m\|_2 \leqslant \sum_{m=1}^{n} \overline{f}_m(\mathbb{F}(u))\varepsilon = \varepsilon.$$

Докажем теперь, что из (II) вытекает (I). Действительно, возьмем
$$\varepsilon_n = \frac{1}{n} \quad \text{при} \quad n \in \mathbb{N},$$
тогда, во-первых, $\mathbb{F}_n = \mathbb{F}_{\varepsilon_n}$ имеет своим равномерным пределом отображение $\mathbb{F}$, которое в силу непрерывности и ограниченности операторов $\mathbb{F}_n$ также является непрерывным и ограниченным. С другой стороны, введем обозначение
$$v = \mathbb{F}(u) \quad \text{и} \quad v_n = \mathbb{F}_n(u) \quad \text{для всех} \quad u \in \mathrm{D}.$$

Имеет место следующее неравенство (по условию (II)):

$$\|v - v_n\|_2 \leqslant \frac{1}{n},$$

но множество $\mathbb{F}_n(\mathrm{D})$ относительно компактно, поэтому в силу леммы 3 приходим к выводу, что $\mathbb{F}(\mathrm{D})$ относительно компактно в $\mathbb{B}_2$. Следовательно, отображение $\mathbb{F}$ вполне непрерывно.

Теорема доказана.

Пока мы рассмотрели связь полной непрерывности и вполне непрерывности линейных операторов. Однако, есть некоторые результаты и для нелинейных операторов. Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть*

$$\mathbb{K} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

— это полностью непрерывный оператор. Тогда при условии рефлексивности банахова пространства $\mathbb{B}_1$ оператор $\mathbb{K}$ является вполне непрерывным.

Доказательство.

Докажем сначала непрерывность оператора $\mathbb{K}$. Действительно, пусть

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_1,$$

но тогда, очевидно,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_1.$$

Отсюда в силу полной непрерывности оператора $\mathbb{K}$ приходим к выводу, что

$$\mathbb{K}(u_n) \to \mathbb{K}(u) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Тем самым, непрерывность оператора $\mathbb{K}$ доказана.

Докажем теперь компактность оператора $\mathbb{K}$. Действительно, пусть $\mathrm{D} \subset \mathbb{B}_1$ — это некоторое ограниченное множество. Пусть $\{u_n\} \subset \mathrm{D}$. Тогда в силу рефлексивности $\mathbb{B}_1$ из этой последовательности можно выбрать некоторую подпоследовательность $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ такую, что

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}_1.$$

Поэтому в силу полной непрерывности оператора $\mathbb{K}$ приходим к выводу, что

$$\mathbb{K}(u_{n_k}) \to \mathbb{K}(u) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2.$$

Тем самым, компактность оператора $\mathbb{K}$ доказана.

Лемма доказана.

Заметим, что обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

ПРИМЕР 7. Пусть $\mathbb{B}_1 = L^2(0,1)$ и $\mathbb{B}_2 = \mathbb{R}_1$. Рассмотрим следующий нелинейный оператор

$$\mathbb{K}(u) = \int\limits_0^1 u^2(s)\, ds = \|u\|_2^2.$$

Докажем, что он является вполне непрерывным. Сначала докажем непрерывность. Пусть

$$u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,1),$$

но тогда в силу очевидного неравенства

$$|\|u_n\|_2 - \|u\|_2| \leqslant \|u_n - u\|_2$$

приходим к выводу о том, что

$$\|u_n\|_2 \to \|u\|_2 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

поэтому

$$\mathbb{K}(u_n) \to \mathbb{K}(u) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Докажем теперь компактность оператора $\mathbb{K}$. Пусть $\mathrm{D} \subset L^2(0,1)$ — это произвольное ограниченное множество. Докажем, что

$$\overline{\mathbb{K}(\mathrm{D})} \quad \text{компактно в} \quad \mathbb{R}^1.$$

Но для этого достаточно доказать, что $\mathbb{K}(\mathrm{D})$ — это ограниченное множество. В силу ограниченности D в $L^2(0,1)$ имеем следующее неравенство:

$$\|u\|_2 \leqslant c \quad \text{для всех} \quad u \in \mathrm{D}$$

при некотором $c > 0$, не зависящем от u. Тогда

$$0 < \mathbb{K}(u) \leqslant c^2 < +\infty.$$

Тем самым, компактность оператора $\mathbb{K}$ доказана.

Теперь докажем, что, тем не менее, оператор $\mathbb{K}$ не является полностью непрерывным. Действительно, рассмотрим последовательность $\{u_n\} \subset L^2(0,1)$, где

$$u_n(s) = \sin(\pi n s), \quad s \in (0,1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любой фиксированной функции

$$v(s) \in L^2(0,1)$$

в силу теоремы Римана–Лебега имеет место выражение

$$\int\limits_0^1 v(s)\sin(\pi n s)\,ds \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

т. е. в силу теоремы представления Рисса

$$u_n \rightharpoonup 0 \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,1).$$

Однако,

$$\mathbb{K}(u_n) = \int\limits_0^1 u_n^2(s)\,ds = \frac{1}{2} \not\to 0 = \mathbb{K}(0) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Теперь мы рассмотрим важное свойство вполне непрерывных операторов, а именно свойство существования вполне непрерывного продолжения всякого вполне непрерывного отображения. Предварительно приведем без доказательства две важные теоремы.

Теорема Мазура *Пусть $\mathbb{B}$ является банаховым пространством и $\mathrm{C} \subset \mathbb{B}$ является компактным множеством, тогда замыкание выпуклой оболочки множества C тоже компактно.*

Теорема Dugundji *Пусть $\mathbb{X}$ — это метрическое пространство, $\mathbb{Y}$ — это локально выпуклое векторное топологическое пространство и $\mathrm{A} \subset \mathbb{X}$ есть замкнутое непустое множество и*

$$\mathbb{F} : \mathrm{A} \to \mathbb{Y}$$

— это непрерывное отображение, тогда существует такое непрерывное отображение, что

$$\widehat{\mathbb{F}}\Big|_{\mathrm{A}} = \mathbb{F} \quad \textit{и} \quad \widehat{\mathbb{F}}(\mathbb{X}) \subset \operatorname{absconvex} \mathbb{F}(\mathrm{A}).$$

Наконец, справедлива следующая важная теорема о продолжении.

Теорема 13. *Пусть $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$ — это два банаховых пространства и $\mathrm{D} \subset \mathbb{B}_1$ есть ограниченное и замкнутое множество и*

$$\mathbb{F} : \mathrm{D} \to \mathbb{B}_2$$

— это вполне непрерывное отображение, тогда существует такое вполне непрерывное отображение:

$$\widehat{\mathbb{F}} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2,$$

что

$$\widehat{\mathbb{F}}\Big|_{\mathrm{D}} = \mathbb{F}.$$

Доказательство.

По теореме Dugundji для отображения $\mathbb{F}$ существует такое непрерывное отображение

$$\widehat{\mathbb{F}} : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2,$$

что

$$\widehat{\mathbb{F}}\Big|_{\mathrm{D}} = \mathbb{F} \quad \text{и} \quad \widehat{\mathbb{F}}(\mathbb{B}_1) \subset \operatorname{absconvex} \mathbb{F}(\mathrm{D}).$$

Теперь согласно теореме Мазура, поскольку множество $\mathbb{F}(\mathrm{D})$ относительно компактно в $\mathbb{B}_2$, то $\operatorname{absconvex} \mathbb{F}(\mathrm{D})$ тоже относительно компактно в $\mathbb{B}_2$, а вместе с ним относительно компактно и множество $\widehat{\mathbb{F}}(\mathbb{B}_1)$. Таким образом, оператор $\widehat{\mathbb{F}}$ является и компактным.

Теорема доказана.

§ 5. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [?], [?], [?], [?] и [?].