Лекция 8
Матрицы. Системы линейных уравнений.
Алгоритм Гаусса

1. Матрицы

1.1. **Основные определения.**

Матрица размера $m \times n$ — прямоугольная таблица из чисел (элементов матрицы), состоящая из m строк и n столбцов.

Нумерация элементов матрицы:

(1) верхний индекс — номер строки, нижний индекс — номер столбца:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix};$$

(2) первый индекс — номер строки, а второй — номер столбца:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сокращенные обозначения:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} = (a_j^i)_n^m, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{mn}.$$

Множество всех матриц размера $m \times n$, элементы которых принадлежат множеству X, обозначается $X^{m\times n}$. Для нас наиболее интересен случай, когда X — некоторое числовое поле $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Специальные виды матриц.

- Нулевая матрица: все элементы равны нулю; обозначение O.
- Квадратная матрица: количество строк равно количеству столбцов); порядок квадратной матрицы — это количество ее строк (столбцов). Следом квадратной матрицы называется сумма ее диагональных элементов:

$$\operatorname{tr} A = a_1^1 + a_2^2 + \cdots + a_n^n.$$

- Диагональная матрица: квадратная матрица, у которой $a^i_j = 0$ для всех $i \neq j$,

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a^2_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^3_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a^{n-1}_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a^n_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(a^1_1, \ldots, a^n_n).$$

- Верхнетреугольная (правая треугольная) матрица: квадратная матрица, у которой $a^i_j = 0$ для всех $i > j$,

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}.$$

- Нижнетреугольная (левая треугольная) матрица: квадратная матрица, у которой $a^i_j = 0$ для всех $i < j$,

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & * & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & 0 \\ * & * & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и B называются равными, $A = B$, если

(1) их размеры равны:

$$A = (a^i_j)^m_n, \quad B = (b^i_j)^m_n;$$

(2) элементы, стоящие на соответственных местах, равны между собой:

$$a^i_j = b^i_j \quad \forall\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

1.2. **Линейные операции и их свойства.**

Сумма матриц $A = (a^i_j)^m_n$ и $B = (b^i_j)^m_n$ одинакового размера $m \times n$:

$$C = A + B \quad \Longleftrightarrow \quad c^i_j = a^i_j + b^i_j \quad \forall\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Произведение матрицы $A = (a^i_j)^m_n$ на число α:

$$D = \alpha A \quad \Longleftrightarrow \quad d^i_j = \alpha a^i_j \quad \forall\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Теорема. *Операции над матрицами обладают следующими свойствами.*

(1) *коммутативность сложения*: $\forall A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$$A + B = B + A;$$

(2) *ассоциативность сложения*: $\forall A, B, C \in \mathbb{K}^{m \times n}$

$$(A + B) + C = A + (B + C);$$

(3) *свойство нулевой матрицы*: $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}$
$$A + O = A,$$
где $O \in \mathbb{K}^{m\times n}$;

(4) *существование противоположной матрицы*:
$$\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n} \quad \exists A' \in \mathbb{K}^{m\times n} : A + A' = O;$$

(5) *свойство единицы*: $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}$
$$1 \cdot A = A;$$

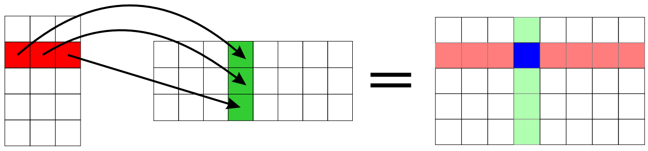
(6) *ассоциативность умножения на число*: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}$:
$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A;$$

(7) *дистрибутивность*-1: $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$
$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B;$$

(8) *дистрибутивность*-2: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}$
$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

1.3. **Умножение матриц.**

Произведение матриц $A \in \mathbb{K}^{m\times s}$ и $B \in \mathbb{K}^{s\times n}$ — матрица $C = AB \in \mathbb{K}^{m\times n}$, элементы которой вычисляются по формуле
$$c^i_j = \sum_{k=1}^{s} a^i_k b^k_j.$$
Перемножить матрицы можно лишь в случае, когда количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй.



Пример.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 6 \\ 3\cdot 5 + 4 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{не существует;}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 + 3\cdot 5 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 3 + 6\cdot 5 & 4\cdot 2 + 5\cdot 4 + 6\cdot 6 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1\cdot 1 + 2\cdot 4 & 1\cdot 2 + 2\cdot 5 & 1\cdot 3 + 2\cdot 6 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 4 & 3\cdot 2 + 4\cdot 5 & 3\cdot 3 + 4\cdot 6 \\ 5\cdot 1 + 6\cdot 4 & 5\cdot 2 + 6\cdot 5 & 5\cdot 3 + 6\cdot 6 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix};$$

здесь

$$AB \neq BA.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $AB = BA$.

Единичная матрица — диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны 1. Элементы единичной матрицы обозначаются

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j; \end{cases}$$

δ^i_j называется символом Кронекера.

Обозначения: I, E; если нужно указать размер — I_n, E_n.

Теорема. *Операция умножения матриц обладает следующими свойствами*:

(1) *ассоциативность умножения*: $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times s}$, $\forall B \in \mathbb{K}^{s\times p}$, $\forall C \in \mathbb{K}^{p\times n}$

$$A(BC) = (AB)C;$$

(2) *дистрибутивность*-1: $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times s}$, $\forall B, C \in \mathbb{K}^{s\times n}$

$$A(B + C) = AB + AC;$$

(3) *дистрибутивность*-2: $\forall A, B \in \mathbb{K}^{m\times s}$, $\forall C \in \mathbb{K}^{s\times n}$

$$(A + B)C = AC + BC;$$

(4) *свойство единичной матрицы*: $\forall A \in \mathbb{K}^{m\times n}$

$$I_m A = A I_n = A.$$

◀ Докажем соотношение

$$\underbrace{A(\overbrace{B\ C}^{D})}_{X} = \underbrace{(\overbrace{A\ B}^{F})C}_{Y}.$$

Пусть

$$A = (a^i_j)^m_s, \quad B = (b^j_k)^s_p, \quad C = (c^k_l)^p_n.$$

Рассмотрим произведение

$$D = BC = (d^j_l)^s_n, \quad d^j_l = \sum_{k=1}^{p} b^j_k\ c^k_l.$$

Далее,

$$X = AD = (x^i_l)^m_n,$$

$$x^i_l = \sum_{j=1}^{s} a^i_j\ d^j_l = \sum_{j=1}^{s} a^i_j \left(\sum_{k=1}^{p} b^j_k\ c^k_l \right) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{p} a^i_j\ b^j_k\ c^k_l.$$

Произведения в правой части равенства:

$$F = AB = (f^i_k)^m_p, \quad f^i_k = \sum_{j=1}^{s} a^i_j\ b^j_k,$$

$$Y = FC = (y^i_l)^m_n,$$

$$y^i_l = \sum_{k=1}^{p} f^i_k \; c^k_l = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{s} a^i_j \; b^j_k \right) \; c^k_l = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{s} a^i_j \; b^j_k \; c^k_l.$$

Ясно, что $x^i_l = y^i_l$, так как выражения этих величин отличаются лишь порядком суммирования. ▶

1.4. **Структура произведения матриц.** Рассмотрим матрицы

$$A = (a^j_l)^m_p \in \mathbb{K}^{m\times p}, \quad B = (b^l_k)^p_n \in \mathbb{K}^{p\times n},$$

Наша задача — описать структуру столбцов матрицы $C = AB$.

Представим матрицу A в виде совокупности столбцов

$$A = [A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_p],$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a^1_1 \\ a^2_1 \\ \vdots \\ a^m_1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a^1_2 \\ a^2_2 \\ \vdots \\ a^m_2 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A_p = \begin{pmatrix} a^1_p \\ a^2_p \\ \vdots \\ a^m_p \end{pmatrix}.$$

Произведением матриц $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$ и $B \in \mathbb{K}^{p\times n}$ является матрица $C \in \mathbb{K}^{m\times n}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c^j_k = \sum_{l=1}^{p} a^j_l \; b^l_k, \qquad \begin{aligned} j &= 1, \dots, m, \\ k &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Представим матрицу C в виде совокупности столбцов:

$$C = [C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_n].$$

Обсудим строение k-го столбца:

$$C_k = \begin{pmatrix} c^1_k \\ \vdots \\ c^m_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{l=1}^{p} a^1_l \; b^l_k \\ \vdots \\ \sum\limits_{l=1}^{p} a^m_l \; b^l_k \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{p} \begin{pmatrix} a^1_l \\ \vdots \\ a^m_l \end{pmatrix} b^l_k = \sum_{l=1}^{p} A_l \; b^l_k = A \cdot B_k.$$

Таким образом, доказаны следующие утверждения.

(1) k-й столбец матрицы AB равен линейной комбинации столбцов матрицы A с коэффициентами, равными элементам k-го столбца матрицы B.
(2) k-й столбец матрицы AB равен произведению матрицы A на k-й столбец матрицы B.

1.5. **Транспонирование.** Дана матрица $A = (a^i_j)^m_n \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Матрица

$$B = (b^j_i)^n_m \in \mathbb{K}^{n\times m}, \quad b^j_i = a^i_j,$$

называется транспонированной для A. Обозначения:

$$B = A^T = A^{\mathrm{tr}} = {}^{\mathrm{tr}}A.$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Теорема. *Операция транспонирования обладает следующими свойствами*:

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
2. $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$;
3. $(A^T)^T = A$;
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

◀ Докажите самостоятельно. ▶

Матрица A называется симметричной, если $A = A^T$.

Матрица A называется кососимметричной, если $A = -A^T$.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Множества всех симметричных и кососимметричных матриц порядка n обозначаются

$$S\mathbb{K}^{n\times n}, \quad A\mathbb{K}^{n\times n}.$$

Теорема. *Любую квадратную матрицу A можно представить в виде суммы симметричной и кососимметричной матриц*:

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\text{симм.}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\text{кососимм.}}.$$

Отметим, что такое представление единственно.

1.6. **Определитель произведения матриц.** В этом разделе матрицы A, B имеют следующую структуру:

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix}.$$

Теорема. *Если A, B — матрицы второго или третьего порядка, то*

$$\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

1. Доказательство для det-2.

$$\det(AB) = \det[AB_1, AB_2] = \det\left[A\left(b^1_1 I_1 + b^2_1 I_2\right),\ A\left(b^1_2 I_1 + b^2_2 I_2\right)\right] =$$

$$= b_1^1 \det\left[AI_1,\ A\left(b_2^1 I_1 + b_2^2 I_2\right)\right] + b_1^2 \det\left[AI_2,\ A\left(b_2^1 I_1 + b_2^2 I_2\right)\right] =$$

$$= b_1^1 b_2^1 \underbrace{\det\left[AI_1, AI_1\right]}_{=0} + b_1^1 b_2^2 \underbrace{\det\left[AI_1, AI_2\right]}_{=\det A} + b_1^2 b_2^1 \underbrace{\det\left[AI_2, AI_1\right]}_{=-\det A} + b_1^2 b_2^2 \underbrace{\det\left[AI_2, AI_2\right]}_{=0} =$$

$$= \det A\left(b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1\right) = \det A \cdot \det B.$$

2. Доказательство для det-3. Прежде всего запишем формулу полного разложения det-3:

$$\begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 \end{vmatrix} = b_1^1\ b_2^2\ b_3^3 + b_1^2\ b_2^3\ b_3^1 + b_1^3\ b_2^1\ b_3^2 - b_1^1\ b_2^3\ b_3^2 - b_1^2\ b_2^1\ b_3^3 - b_1^3\ b_2^2\ b_3^1.$$

Структура этой формулы такова: в каждом слагаемом нижние индексы следуют в естественном порядке $1, 2, 3$, а верхние образуют некоторую перестановку чисел $1, 2, 3$; всего слагаемых 6, по числу возможных перестановок из 3 элементов, $3! = 6$.

Слагаемое входит в формулу со знаком «+», если последовательность верхних индексов в нем получена из последовательности $1, 2, 3$ четным числом перестановок соседних элементов, и со знаком «$-$» в противном случае:

$$\begin{array}{ccccc} & & 123 & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ 213 & & & & 132 \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 231 & & & & 312 \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & 321 & & \end{array}$$

Для определителя произведения матриц имеем:

$$\det(AB) = \det\left[AB_1,\ AB_2,\ AB_3\right] = \det\left[\underbrace{A\left(\sum_{i=1}^{3} b_1^i I_i\right)}_{B_1},\ \underbrace{A\left(\sum_{j=1}^{3} b_2^j I_j\right)}_{B_2},\ \underbrace{A\left(\sum_{k=1}^{3} b_3^k I_k\right)}_{B_3}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} b_1^i \det\left[AI_i,\ A\left(\sum_{j=1}^{3} b_2^j I_j\right),\ A\left(\sum_{k=1}^{3} b_3^k I_k\right)\right] = \dots =$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\ b_1^i\ b_2^j\ b_3^k \det\left[AI_i,\ AI_j,\ AI_k\right] = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\ b_1^i\ b_2^j\ b_3^k\ \det\left[A_i,\ A_j,\ A_k\right].$$

В этой сумме $3^3 = 27$ слагаемых, но большинство из них равно нулю, так как содержат в качестве множителя det-3 вида $\det[A_i, A_j, A_k]$ с одинаковыми столбцами. Далее, если все столбцы A_i, A_j, A_k различны, то

$$\det[A_i, A_j, A_k] = \pm \det A,$$

где знак «+» или «$-$» зависит от того, четным или нечетным числом перестановок столбцов получен $\det[A_i, A_j, A_k]$ из $\det[A_1, A_2, A_3] = \det A$.

Поэтому, продолжая выкладку, получаем

$$\det(AB) = \det A \cdot \left(b_1^1 b_2^2 b_3^3 + b_1^2 b_2^3 b_3^1 + b_1^3 b_2^1 b_3^2 - b_1^1 b_2^3 b_3^2 - b_1^2 b_2^1 b_3^3 - b_1^3 b_2^2 b_3^1\right) = \det A \cdot \det B.$$

1.7. **Обратная матрица.** Понятие обратной матрицы определено только для квадратных матриц.

Дана матрица $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Матрица $A^{-1} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ называется обратной к матрице A, если

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Матрица A в этом случае называется обратимой.

Уже на примере матрицы 1×1 ясно, что обратная матрица существует не для любой матрицы: матрица (0) необратима.

Теорема. *Если для матрицы A существует обратная A^{-1}, то она единственна.*

◀ Предположим, что матрица A имеет две различные обратные матрицы B и C, т.е.

$$AB = BA = I, \quad AC = CA = I.$$

Имеем:

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C,$$

т.е. $B = C$. ▶

Теорема. *Матрица A обратима тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$, что эквивалентно условию линейной независимости столбцов (строк) матрицы A.*

Замечание. Сейчас нас интересует вопрос о существовании обратных матриц для матриц порядка 2 и 3. Всюду далее в доказательстве считаем, что $n = 3$. На самом деле теорема вместе с доказательством справедлива для матрицы A любого порядка.

◀ 1. Предположим, что существует A^{-1}. Имеем

$$A^{-1}A = I \quad \Longrightarrow \quad \det(A^{-1}A) = \det I \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \det A^{-1} \cdot \det A = 1 \quad \Longrightarrow \quad \det A \neq 0.$$

2. Пусть $\det A \neq 0$. Рассмотрим матрицу, составленную из алгебраических дополнений элементов матрицы A:

$$B = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \dots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \dots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \dots & A_n^n \end{pmatrix} = (A_j^k)_n^n;$$

она называется присоединенной к матрице A. Вычислим произведение $C = A \cdot B^T$:

$$c_j^i = \sum_{k=1}^{n} a_k^i A_k^j = \begin{cases} \det A \neq 0, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Таким образом, матрица

$$\frac{1}{\det A} B^T$$

является обратной для A. Эта формула позволяет вычислить обратную матрицу A^{-1}. ▶

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Алгебраические дополнения элементов

$$\text{АД}(a) = d, \quad \text{АД}(b) = -c, \quad \text{АД}(c) = -b, \quad \text{АД}(d) = a,$$

присоединенная матрица

$$B = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix},$$

так что обратная матрица равна

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} B^T = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

2. Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему, состоящую из m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_n^1 x^n = b^1, \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \dots + a_n^2 x^n = b^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \dots + a_n^m x^n = b^m. \end{cases}$$

Сокращенно — СЛУ.

Введем основную и расширенную матрицы системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} = [A_1, A_2, \dots, A_n],$$

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 & b^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m & b^m \end{array}\right) = [A, B], \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Систему можно записать в матричном виде

$$AX = B,$$

а также в виде

$$A_1 x^1 + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n = B.$$

Набор чисел $x^1, x^2, \dots, x^n$ (столбец $X = (x^1, x^2, \dots, x^n)^T$) называется решением СЛУ, если при подстановке этих чисел в каждое из уравнений системы получаем верное числовое равенство (при подстановке столбца в матричное уравнение получаем верное матричное равенство).

СЛУ называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет решений.

Две совместные СЛУ называются эквивалентными, если множества их решений совпадают. Ясно, что эквивалентные СЛУ содержат одинаковое число неизвестных; число же уравнений в них может быть различным.

Следующие преобразования СЛУ переводят ее в эквивалентную СЛУ:

(1) перестановка двух уравнений местами;
(2) умножение любого уравнения СЛУ на число $\alpha \neq 0$;
(3) прибавление к любому уравнению СЛУ другого уравнения, умноженного на произвольное число.

Эти преобразования СЛУ называются элементарными (ЭП).

Иногда к элементарным преобразованиям причисляют

(4) удаление из СЛУ уравнения вида

$$0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n = 0.$$

2.1. **Однородные системы.** СЛУ называется однородной (ОСЛУ), если столбец правых частей нулевой:

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_n^1 x^n = 0, \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \dots + a_n^1 x^n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \dots + a_n^m x^n = 0. \end{cases}$$

ОСЛУ всегда совместна: числа $x^1 = x^2 = \dots = x^n = 0$ образуют ее решение, называемое тривиальным. Может ли ОСЛУ иметь нетривиальное решение?

Теорема. *ОСЛУ имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда столбцы ее основной матрицы ЛЗ.*

◀ 1. Пусть ОСЛУ имеет нетривиальное решение $x^1, \dots, x^n$; это означает, что

$$A_1 x^1 + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n = O,$$

где хотя бы один коэффициент $x^k \neq 0$; это и означает ЛЗ столбцов $A_1, A_2, \dots, A_n$.

2. Пусть столбцы основной матрицы ОСЛУ ЛЗ, т.е.

$$A_1 x^1 + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n = O,$$

где хотя бы один из коэффициентов $x^k \neq 0$. Этот набор коэффициентов и образует нетривиальное решение ОСЛУ. ▶

Теорема. *Если X_1, X_2 — два решения ОСЛУ $AX = 0$, то любая их ЛК также является решением этой ОСЛУ.*

◀ Пусть c^1, c^2 — произвольные числа. Имеем:

$$AX_1 = O, \quad AX_2 = O \quad \Longrightarrow \quad c^1 AX_1 + c^2 AX_2 = A(c^1 X_1 + c^2 X_2) = 0,$$

т.е. ЛК $c^1 X_1 + c^2 X_2$ является решением ОСЛУ. ▶

Фундаментальная совокупность решений (ФСР) ОСЛУ — это такой упорядоченный набор линейно независимых решений $X_1, X_2, \dots, X_s$, что любое решение ОСЛУ можно представить в виде их линейной комбинации:

$$X = c^1 X_1 + c^2 X_2 + \dots + c^s X_s,$$

где $c^1, c^2, \dots, c^s$ — произвольные числа.

Матрица Φ, столбцами которой являются столбцы ФСР, называется фундаментальной матрицей (ФМ) ОСЛУ:

$$\Phi = [X_1, X_2, \ldots, X_s].$$

Общее решение ОСЛУ выражается через ФМ по формуле

$$X = \Phi \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^s \end{pmatrix}.$$

2.2. **Неоднородные системы.** Система $AX = B$ называется неоднородной (НСЛУ), если $B \neq O$. Часто НСЛУ $AX = B$ рассматривают вместе с ОСЛУ $AX = O$.

Теорема. *Если X_1, X_2 — решения НСЛУ $AX = B$, то $X_1 - X_2$ — решение ОСЛУ $AX = O$.*

◀ Пусть $AX_1 = B$, $AX_2 = B$. Тогда

$$A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = B - B = O. \qquad \blacktriangleright$$

Таким образом, любое решение НСЛУ можно представить в виде суммы некоторого частного решения НСЛУ и какого-либо решения ОСЛУ:

$$\text{ОРНС} = \text{ЧРНС} + \text{ОРОС}.$$

2.3. **Системы упрощенного вида.** Неизвестная x^k называется базисной, если она входит только в одно уравнение системы.

Система называется системой упрощенного вида, если в каждом уравнении имеется базисная неизвестная. В этом случае в каждом уравнении имеется неизвестная, входящая только в это уравнение, а число базисных неизвестных равно числу уравнений в системе.

Пример. Рассмотрим ОСЛУ упрощенного вида:

$$\begin{cases} x^1 \qquad + 3x^3 \qquad + x^5 = 0, \\ \qquad x^2 + 4x^3 \qquad + 2x^5 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad x^4 + 2x^5 = 0. \end{cases}$$

Базисные неизвестные выделены.

Запишем эту систему в виде

$$\begin{cases} x^1 = -3x^3 - x^5, \\ x^2 = -4x^3 - 2x^5, \\ x^4 = -x^5. \end{cases}$$

Если вместо x^3 и x^5 подставлять произвольные числа и вычислять x^1, x^2, x^4 по указанным формулам, то полученный набор чисел x^1, x^2, x^3, x^4, x^5 будет представлять собой некоторое решение ОСЛУ. Таким образом, полученные формулы доставляют нам описание всех решений исходной ОСЛУ.

Неизвестные, не являющиеся базисными, называются свободными; в общем решении системы они могут принимать произвольные значения.

Положив $x^3 = c^1$, $x^5 = c^2$, решение можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3c^1 - c^2 \\ -4c^1 - 2c^2 \\ c^1 \\ -c^2 \\ c^2 \end{pmatrix} = \underbrace{c^1 \overbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{X_1} + c^2 \overbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{X_2}}_{\text{ОРОС}}.$$

Каждый из столбцов X_1, X_2, образующих ФСР ОСЛУ, можно получить, придавая одной из свободных неизвестных значение 1, а остальным — значение 0. ФСР, полученная таким образом, называется нормальной ФСР (НФСР). Фундаментальная матрица, составленная из столбцов НФСР, называется нормальной фундаментальной матрицей (НФМ).

Пример. Рассмотрим НСЛУ упрощенного вида:

$$\begin{cases} x^1 \qquad\quad + 3x^3 \qquad + x^5 = 1, \\ \qquad x^2 + 4x^3 \qquad + 2x^5 = 2, \\ \qquad\qquad\qquad\quad x^4 + 2x^5 = 3. \end{cases}$$

Базисные неизвестные выделены.

Запишем эту систему в виде

$$\begin{cases} x^1 = 1 - 3x^3 - x^5, \\ x^2 = 2 - 4x^3 - 2x^5, \\ x^4 = 3 - x^5. \end{cases}$$

Если вместо x^3 и x^5 подставлять произвольные числа и вычислять x^1, x^2, x^4 по указанным формулам, то полученный набор чисел x^1, x^2, x^3, x^4, x^5 будет представлять собой некоторое решение системы. Таким образом, полученные формулы доставляют нам описание всех решений исходной системы.

Положив $x^3 = c^1$, $x^5 = c^2$, решение можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3c^1 - c^2 \\ 2 - 4c^1 - 2c^2 \\ c^1 \\ 3 - c^2 \\ c^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ЧРНС}} + \underbrace{c^1 \overbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{X_1} + c^2 \overbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}^{X_2}}_{\text{ОРОС}}.$$

Здесь ЧРНС отвечает нулевым значениям свободных переменных (такое ЧРНС называется базисным), а столбцы X_1, X_2 представляют собой НФСР ОСЛУ.

Итак, если СЛУ имеет упрощенный вид, то ее общее решение немедленно выписывается. Чтобы решить СЛУ произвольного вида, нужно с помощью элементарных преобразований привести ее к упрощенному виду.

Теорема. *Если в ОСЛУ число неизвестных больше числа уравнений, то она имеет нетривиальное решение.*

◀ Если число неизвестных больше числа уравнений, то найдется свободная неизвестная, которая может принимать любые значения. ▶

2.4. **Алгоритм Гаусса.** Вместо преобразований СЛУ удобно выполнять преобразования расширенной матрицы этой СЛУ; при этом ЭП СЛУ соответствуют ЭП строк расширенной матрицы:

(1) перестановка двух строк местами;
(2) умножение любой строки на число $\alpha \neq 0$;
(3) прибавление к любой строке другой строки, умноженной на произвольное число;
(4) [удаление из матрицы нулевых строк.]

Говорят, что матрица имеет упрощенный вид, если она является расширенной матрицей СЛУ упрощенного вида. Матрица упрощенного вида имеет следующую структуру:

(1) некоторые ее столбцы являются последовательными столбцами единичной матрицы; эти столбцы отвечают базисным неизвестным СЛУ и также называются базисными;
(2) каждый из остальных столбцов является ЛК предыдущих базисных столбцов.

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
1 & * & 0 & * & 0 & * & \dots & 0 & * \\
0 & 0 & 1 & * & 0 & * & \dots & 0 & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & \dots & 0 & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Опишем один шаг алгоритма Гаусса, который позволяет произвольную матрицу $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ привести к упрощенному виду.

ШАГ № k.

(1) Среди строк с номерами $k, \dots, m$ выбираем одну из строк с наименьшим количеством нулей, считая от начала строки; эту строку назовем разрешающей строкой (РС), а ее первый ненулевой элемент — разрешающим элементом (РЭ).
(2) Переставляем РС на k-е место.
(3) Разделим РС на РЭ; в полученной строке на месте РЭ будет стоять 1.
(4) Вычитаем из каждой строки матрицы РС, умноженную на элемент обрабатываемой строки, который стоит в одном столбце с РЭ. После этого столбец, содержащий РЭ, будет представлять собой k-й столбец единичной матрицы.

Процесс завершается, когда каждая строка матрицы уже побывала в роли РС или когда РС выбрать не удается.

Пример. Привести к упрощенному виду матрицу

$$\begin{pmatrix}
0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\
2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\
3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}.$$

Шаг 1. В качестве РС можно взять 2 или 4 строку; возьмем 2. РЭ $= 2$, делим РС на 2 и переставляем на первое место:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ \boxed{2} & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уничтожению подлежат все элементы первого столбца, кроме РЭ; такой элемент один — это 3. Выполняем ЭП: к 4-й строке добавляем 1-ю, умноженную на (-3):

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. В качестве РС можно взять 2-ю, 3-ю или 4-ю. Возьмем 3-ю, переставим ее на второе место и разделим на (-1):

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & \boxed{-1} & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Теперь нужно уничтожить все элементы 2-го столбца, кроме РЭ. Выполняем ЭП:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{1} & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ * \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. В качестве РС можно взять только 4-ю строку. Умножаем ее на (-2) и переставляем на 3-е место:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-\frac{1}{2}} & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уничтожаем все элементы 4-го столбца, кроме РЭ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ * \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Еще один шаг выполнить невозможно, так как четвертую строку нельзя выбрать в качестве РС: в ней нет ненулевых элементов. Процедура закончена.

Можно избежать появления дробей при выполнении ЭП, если сделать дополнительные ЭП.

Шаг 1. Вычтем из 4-й строки 2-ю (цель — получить 1 в одной из строк и выбрать эту строку в качестве РС):

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Первый элемент 4-й строки равен 1; эту строку берем в качестве РС, тогда РЭ $= 1$. Поменяем местами 1-ю и 4-ю строки:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Уничтожаем все элементы 1-го столбца, кроме РЭ; такой элемент один, это 2 во второй строке.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} * \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. В качестве РС берем 2-ю строку; РЭ $= 1$. Уничтожаем все элементы 2-го столбца, кроме РЭ; это -1 и -2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ * \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Шаг 3. В качестве РС берем 3-ю строку, РЭ $= 1$, который стоит в 4-м столбце. Уничтожаем все элементы 4-го столбца, кромее РЭ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ * \\ -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример. Решить ОСЛУ

$$\begin{cases} - 2x^2 + 6x^3 + 2x^4 + 8x^5 - 2x^6 = 0 \\ 2x^1 + x^2 + x^3 + x^6 = 0 \\ - x^2 + 3x^3 + x^4 + 4x^5 - x^6 = 0 \\ 3x^1 + x^2 + 3x^3 + x^5 = 0 \end{cases}$$

Основная матрица этой ОСЛУ

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 2 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица была приведена к упрощенному виду в предыдущем примере:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Базисные переменные этой ОСЛУ — x^1, x^2, x^4, свободные переменные — x^3, x^5, x^6. Получим НФСР ОСЛУ. Взяв $x^3 = 1$, $x^5 = x^6 = 0$, находим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x^1 = -2, \\ x^2 = 3, \\ x^3 = 1, \\ x^4 = 0, \\ x^5 = 0, \\ x^6 = 0. \end{cases}$$

Взяв $x^3 = x^6 = 0$, $x^5 = 1$, находим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x^1 = -1, \\ x^2 = 2, \\ x^3 = 0, \\ x^4 = -2, \\ x^5 = 1, \\ x^6 = 0. \end{cases}$$

Взяв $x^3 = x^5 = 0$, $x^6 = 1$, находим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x^1 = 1, \\ x^2 = -3, \\ x^3 = 0, \\ x^4 = -2, \\ x^5 = 0, \\ x^6 = 1. \end{cases}$$

Итак, НФСР ОСЛУ имеет вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы имеет вид

$$X = c^1 X_1 + c^2 X_2 + c^3 X_3,$$

где c^1, c^2, c^3 — произвольные числа.

НФМ ОСЛУ имеет вид

$$\Phi = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение ОСЛУ можно записать в виде

$$X = \Phi \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}.$$

2.5. **Восстановление ОСЛУ по известной ФСР.** Даны ЛН столбцы

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ \vdots \\ x_1^n \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_2^n \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad X_r = \begin{pmatrix} x_r^1 \\ x_r^2 \\ \vdots \\ x_r^n \end{pmatrix},$$

количество r которых меньше их размерности n ($r < n$). Составить ОСЛУ, состоящую из наименьшего числа уравнений, для которой данные столбцы образуют ФСР.

Поскольку размерность пространства столбцов равна n, а размерность пространства решений искомой системы равна r, минимальное количество уравнений в системе равно $n - r$.

Рассмотрим матрицу

$$\mathfrak{X} = [X_1, X_2, \dots, X_r, X] = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_r^1 & x^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_r^2 & x^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_r^n & x^n \end{pmatrix},$$

последний столбец которой $X = (x^1, x^2, \dots, x^n)^T$ состоит из неизвестных будущей ОСЛУ. Если этот столбец удовлетворяет искомой ОСЛУ, то он является ЛК столбцов $X_1, \dots, X_r$.

Приведем матрицу $\mathfrak{X}$ к упрощенному виду с помощью ЭП строк:

$$\left(\begin{array}{cc} \overbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}}}^{r\ \text{столбцов}} & \begin{matrix} * \\ * \\ * \\ * \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} & \boxed{\boxed{\begin{matrix} * \\ * \\ * \end{matrix}}} \end{array}\right) \quad \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r\ \text{строк}$$

Первые r столбцов ЛН, последний является их ЛК; это возможно лишь в случае, когда элементы, стоящие в последнем столбце и последних $n-r$ строках, равны нулю. Приравнивая их к нулю, получаем искомую ОСЛУ.

Пример. Найти однородную систему уравнений, имеющую ФСР

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Произвольное решение X искомой системы является линейной комбинацией двух данных решений, поэтому столбцы матрицы

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & x^1 \\ -3 & 0 & x^2 \\ 1 & 0 & x^3 \\ 0 & -2 & x^4 \\ 0 & 1 & x^5 \end{pmatrix}$$

должны быть ЛЗ. Приведем эту матрицу к упрощенному виду:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & x^1 \\ -3 & 0 & x^2 \\ 1 & 0 & x^3 \\ 0 & -2 & x^4 \\ 0 & 1 & x^5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & x^1+2x^3 \\ 0 & 0 & x^2+3x^3 \\ 1 & 0 & x^3 \\ 0 & -2 & x^4 \\ 0 & 1 & x^5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & x^3 \\ 0 & 0 & x^2+3x^3 \\ 0 & -1 & x^1+2x^3 \\ 0 & -2 & x^4 \\ 0 & 1 & x^5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x^3 \\ 0 & 1 & x^5 \\ 0 & -1 & x^1+2x^3 \\ 0 & -2 & x^4 \\ 0 & 0 & x^2+3x^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & x^3 \\ 0 & 1 & x^5 \\ 0 & 0 & x^1+2x^3+x^5 \\ 0 & 0 & x^4+2x^5 \\ 0 & 0 & x^2+3x^3 \end{pmatrix}.$$

Чтобы эта матрица имела два ЛН столбца, необходимо и достаточно, чтобы последние три ее строки были нулевыми. Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} x^1+2x^3+x^5=0, \\ x^4+2x^5=0, \\ x^2+3x^3=0. \end{cases} \iff \begin{cases} x^1+2x^3+x^5=0, \\ x^2+3x^3=0, \\ x^4+2x^5=0. \end{cases}$$

Матрица последней системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.6. **Элементарные преобразования и умножение матриц.** ЭП строк матрицы тесно связаны с операцией умножения матриц.

Теорема. *Пусть R — ЭП типа* (1), (2) *или* (3) *строк матрицы A. Тогда*

$$R(A) = R(I) \cdot A.$$

Здесь $R(A)$ — матрица, полученная из A с помощью ЭП R, I — единичная матрица.

◀ Проверим утверждение для простейших ЭПС.

Пусть R_1 — перестановка первой и второй строк, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}, \quad R_1(A) = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1(\boldsymbol{I}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем:

$$R_1(\boldsymbol{I}) \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} = R_1(A).$$

Пусть R_2 — умножение первой строки на $\alpha \neq 0$. Имеем:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}, \quad R_2(A) = \begin{pmatrix} \alpha a_1^1 & \alpha a_2^1 & \dots & \alpha a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2(\boldsymbol{I}) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем:

$$R_2(\boldsymbol{I}) \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1^1 & \alpha a_2^1 & \dots & \alpha a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} = R_2(A).$$

Пусть R_3 — прибавление к первой строке матрицы A ее второй строки:

$$A=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}, \quad R_3(A)=\begin{pmatrix} a_1^1+a_1^2 & a_2^1+a_2^2 & \dots & a_m^1+a_m^2 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad R_3(\boldsymbol{I})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем:

$$R_3(\boldsymbol{I})\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1^1+a_1^2 & a_2^1+a_2^2 & \dots & a_m^1+a_m^2 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}=R_3(A).$$

Пусть в матрице A выполнена серия ЭПС. Для простоты рассмотрим серию из двух ЭПС R_1 и R_2. Имеем:

$$R_1(R_2(A))=R_1(\boldsymbol{I})\cdot R_2(A)=R_1(\boldsymbol{I})\cdot[R_2(\boldsymbol{I})\cdot A]=[R_1(\boldsymbol{I})\cdot R_2(\boldsymbol{I})]\cdot A=R_1(R_2(\boldsymbol{I}))\cdot A.$$

Теорема доказана. ▶

Элементарные преобразования типов (1)–(3) обратимы, т.е. если матрица C может быть получена из матрицы B каким-либо ЭП, то и матрица B может быть получена из матрицы C некоторым ЭП преобразованием.

2.7. **Вычисление обратной матрицы.** Превратим матрицу B с помощью последовательности ЭП строк в единичную матрицу. Поскольку выполнение каждого ЭП эквивалентно умножению B слева на некоторую матрицу, видим, что

$$A_sA_{s-1}\dots A_2A_1\cdot B=I.$$

Но это означает, что

$$A_sA_{s-1}\dots A_2A_1=B^{-1}.$$

Если те же самые ЭП провести над единичной матрицей, то результатом окажется матрица B^{-1}. На практике это выполняется следующим образом:

$$(B\mid I)\xrightarrow{\text{ЭП строк}}(I\mid B^{-1}).$$

Если вместо единичной матрицы взять некоторую матрицу D (причем не обязательно квадратную), то результатом будет

$$(B\mid D)\xrightarrow{\text{ЭП строк}}(I\mid B^{-1}D).$$

Можно сформулировать аналогичную процедуру для ЭП столбцов:

$$\left(\frac{B}{I}\right)\xrightarrow{\text{ЭП столбцов}}\left(\frac{I}{B^{-1}}\right).$$

Если вместо I взять матрицу D (не обязательно квадратную), то

$$\left(\frac{B}{D}\right) \xrightarrow{\text{ЭП столбцов}} \left(\frac{I}{DB^{-1}}\right).$$

На практике выполнять ЭП столбцов неудобно, поэтому для вычисления матрицы DB^{-1} предпочтительнее пользоваться следующим алгоритмом:

$$\left(\frac{B}{D}\right) \xrightarrow{\text{транспонирование}}$$

$$(B^T \mid D^T) \xrightarrow{\text{ЭП строк}} (I \mid (B^T)^{-1}D^T) = (I \mid (B^{-1})^T D^T)$$

$$\xrightarrow{\text{транспонирование}} \left(\frac{I}{DB^{-1}}\right).$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T.$$

Докажите это соотношение самостоятельно.

Пример.

Вычислить обратную матрицу для

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Построим блочную матрицу $[A \mid \boldsymbol{I}]$ и проведем цепочку ЭП строк:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right).$$

Обратная матрица равна

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Экзаменационные задачи

Задача 1. Доказать, что k-я строка матрицы AB равна линейной комбинации строк матрицы B с коэффициентами, равными элементам k-й строки матрицы A. [Указание: ср. п. 1.4.]

Задача 2. Доказать, что k-я строка матрицы AB равна произведению k-й строки матрицы A на матрицу B. [Указание: ср. п. 1.4.]

Задача 3. Доказать соотношение $(AB)^T = B^T A^T$.

Задача 4. Матрица A такова, что $A^2 + A + E = 0$. Доказать, что матрица A обратима и выразить A^{-1} через A.

Задача 5. Пусть $A^m = 0$. Доказать, что $(E - A)^{-1} = E + A + \cdots + A^{m-1}$.

Задача 6. Пусть $f(t)$ — многочлен. Доказать, что $f(S^{-1}AS) = S^{-1}f(A)S$.

Задача 7. Доказать, что если A — обратимая симметрическая матрица, то A^{-1} — также симметрическая матрица.

Задача 8. Доказать, что если A — обратимая кососимметрическая матрица, то A^{-1} — также кососимметрическая матрица.

Задача 9. Пусть A, B — симметрические матрицы. Доказать, что AB является симметрической матрицей тогда и только тогда, когда $AB = BA$.

Задача 10. Пусть A, B — кососимметрические матрицы. Доказать, что AB является симметрической матрицей тогда и только тогда, когда $AB = BA$.

Задача 11. Пусть A, B — кососимметрические матрицы. Доказать, что AB является кососимметрической матрицей тогда и только тогда, когда $AB = -BA$.

Задача 12. Известно, что столбец свободных членов линейной системы уравнений равен сумме столбцов ее основной матрицы. Указать какое-либо частное решение системы.

Задача 13. Известно, что столбец свободных членов линейной системы уравнений совпадает с последним столбцом ее основной матрицы. Указать какое-либо частное решение системы.

Задача 14. Пусть X, Y — столбцы решений систем уравнений $AX = P$, $AY = Q$ соответственно, α, β — некоторые числа. Какой системе уравнений удовлетворяет столбец $Z = \alpha X + \beta Y$?

Задача 15. Пусть матрица получена из матрицы B элементарными преобразованиями строк. Доказать, что если столбцы матрицы B линейно независимы, то столбцы матрицы C также линейно независимы.

Задача 16. Пусть матрица получена из матрицы B элементарными преобразованиями строк. Доказать, что если между какими-либо столбцами матрицы B имеется линейная зависимость

$$\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \cdots + \alpha_k B_k = 0,$$

то соответствующие столбцы матрицы C связаны такой же линейной зависимостью:

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \cdots + \alpha_k C_k = 0.$$