Аналитическая геометрия

Бадьин А. В.

Содержание

Лекция 1. Логико-математическая символика

1.1. Логические связки

Логическими связками называются значки: $\neg$ (отрицание), $\wedge$ (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\implies$ (импликация), $\iff$ (эквивалентность).

Пусть A — утверждение. Обозначим через $\neg A$ утверждение, истинностное значение которого можно найти с помощью таблицы:

A	$\neg A$
0	1
1	0

.

Утверждение $\neg A$ читается: «неверно, что A» или «не А». Очевидно, роль отрицания в математическом языке похожа на роль частицы «не» в разговорном языке.

Пусть A, B — утверждения. Обозначим через $(A \wedge B)$ утверждение, истинностное значение которого можно найти с помощью таблицы:

A	B	$(A \wedge B)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

.

Утверждение $(A \wedge B)$ читается: «A и B». Далее часто будем писать $A \wedge B$ вместо $(A \wedge B)$. Будем говорить, что A, B — члены конъюнкции $A \wedge B$. Очевидно, роль конъюнкции в математическом языке похожа на роль союза «и» в разговорном языке.

Пусть A, B — утверждения. Обозначим через $(A \vee B)$ утверждение, истинностное значение которого можно найти с помощью таблицы:

A	B	$(A \vee B)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

.

Утверждение $(A \vee B)$ читается: «A или B». Далее часто будем писать $A \vee B$ вместо $(A \vee B)$. Будем говорить, что A, B — члены дизъюнкции $A \vee B$. **Внимание! Дизъюнкция истинных утверждений истинна.** Очевидно, роль дизъюнкции в математическом языке похожа на роль союза «или» в разговорном языке (если союз «или» употребляется в соединительном смысле).

Пусть A, B — утверждения. Обозначим через $(A \implies B)$ утверждение, истинностное значение которого можно найти с помощью таблицы:

A	B	$(A \implies B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

.

Утверждение $(A \implies B)$ читается: «если A, то B» или «из A следует B». Далее часто будем писать $A \implies B$ вместо $(A \implies B)$. Будем говорить, что: A — посылка импликации $A \implies B$; B — заключение импликации $A \implies B$. **Внимание! Импликация с ложной посылкой всегда истинна.** Очевидно, роль импликации в математическом языке похожа на роль оборота «если…, то…» в разговорном языке (если при употреблении этого оборота считается, что из лжи следует всё, что угодно).

Пусть A, B — утверждения. Обозначим через $(A \iff B)$ утверждение, истинностное значение которого можно найти с помощью таблицы:

A	B	$(A \iff B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

.

Утверждение $(A \iff B)$ читается: «A справедливо тогда и только тогда, когда B справедливо» или «A эквивалентно B». Далее часто будем писать $A \iff B$ вместо $(A \iff B)$. Очевидно, роль эквивалентности в математическом языке похожа на роль оборота «…тогда и только тогда, когда…» в разговорном языке.

Замечание. Пусть A, B, C — утверждения. Используя истинностные таблицы, нетрудно доказать:

$$\begin{gathered}
\neg\neg A \iff A, \\
(A \wedge B) \iff (B \wedge A), \\
\big((A \wedge B) \wedge C\big) \iff \big(A \wedge (B \wedge C)\big), \\
(A \vee B) \iff (B \vee A), \\
\big((A \vee B) \vee C\big) \iff \big(A \vee (A \vee C)\big), \\
(A \implies B) \iff (\neg A \vee B), \\
(A \iff B) \iff \big((A \implies B) \wedge (B \implies A)\big), \\
\big(A \wedge (B \vee C)\big) \iff \big((A \wedge B) \vee (A \wedge C)\big), \\
\big(A \vee (B \wedge C)\big) \iff \big((A \vee B) \wedge (A \vee C)\big), \\
\neg(A \wedge B) \iff (\neg A \vee \neg B), \\
\neg(A \vee B) \iff (\neg A \wedge \neg B).
\end{gathered}$$

Очевидно:

$$\neg(A \implies B) \iff (A \wedge \neg B).$$

1.2. Кванторы

Кванторами называются значки: $\forall$ (квантор общности или квантор всеобщности), $\exists$ (квантор существования).

Пусть $A(x)$ — утверждение относительно допустимого объекта x. Будем писать $\forall x A(x)$, если для любого допустимого объекта x справедливо $A(x)$.

Пусть $A(x)$ — утверждение относительно допустимого объекта x. Будем писать $\exists x A(x)$, если существует допустимый объект x, удовлетворяющий условию $A(x)$.

Пусть $A(x)$ — утверждение относительно допустимого объекта x. Будем писать $\exists! x A(x)$, если:

$$\exists x A(x) \land \forall x \forall y \big(A(x) \land A(y) \implies x = y\big).$$

Утверждение $\exists! x A(x)$ читается: «существует единственный допустимый объект x, удовлетворяющий условию $A(x)$».

Пусть $A(x)$, $B(x)$ — утверждения относительно допустимого объекта x. Будем писать $\forall x \big[B(x)\big] A(x)$, если:

$$\forall x \big(B(x) \implies A(x)\big).$$

Утверждение $\forall x \big[B(x)\big] A(x)$ читается: «для любого допустимого объекта x, удовлетворяющего условию $B(x)$, справедливо $A(x)$».

Пусть $A(x)$, $B(x)$ — утверждения относительно допустимого объекта x. Будем писать $\exists x \big[B(x)\big] A(x)$, если:

$$\exists x \big(B(x) \land A(x)\big).$$

Утверждение $\exists x \big[B(x)\big] A(x)$ читается: «существует допустимый объект x, удовлетворяющий условию $B(x)$, такой, что $A(x)$».

Пусть $A(x)$, $B(x)$ — утверждения относительно допустимого объекта x. Будем писать $\exists! x \big[B(x)\big] A(x)$, если:

$$\exists! x \big(B(x) \land A(x)\big).$$

Утверждение $\exists! x \big[B(x)\big] A(x)$ читается: «существует единственный допустимый объект x, удовлетворяющий условию $B(x)$, такой, что $A(x)$».

Замечание. Пусть $A(x)$, $B(x)$ — утверждения относительно допустимого объекта x. Очевидно:

$$\begin{aligned}
\neg \forall x A(x) &\iff \exists x \neg A(x), \\
\neg \exists x A(x) &\iff \forall x \neg A(x), \\
\neg \forall x \big[B(x)\big] A(x) &\iff \exists x \big[B(x)\big] \neg A(x), \\
\neg \exists x \big[B(x)\big] A(x) &\iff \forall x \big[B(x)\big] \neg A(x).
\end{aligned}$$

1.3. Теория множеств

Пусть A — множество. Будем писать $x \in A$, если x принадлежит множеству A.

Пусть: $A(x)$ — утверждение относительно допустимого объекта x, Q — множество. Далее часто будем писать: $\forall x \in Q\ A(x)$ вместо $\forall x[x \in Q]A(x)$; $\exists x \in Q\ A(x)$ вместо $\exists x[x \in Q]A(x)$; $\exists! x \in Q\ A(x)$ вместо $\exists! x[x \in Q]A(x)$. Утверждение $\forall x[x \in Q]A(x)$ можно читать: «для любого допустимого объекта x, принадлежащего множеству Q, справедливо $A(x)$». Утверждение $\exists x \in Q\ A(x)$ можно читать: «существует допустимый объект x, принадлежащий множеству Q, удовлетворяющий условию $A(x)$». Утверждение $\exists! x \in Q\ A(x)$ можно читать: «существует единственный допустимый объект x, принадлежащий множеству Q, удовлетворяющий условию $A(x)$».

Пусть A, B — множества. Тогда:

$$A = B \iff \forall x (x \in A \iff x \in B).$$

Пусть $A(x)$ — утверждение относительно допустимого объекта x. Пусть существует множество Q, удовлетворяющее условию: Q — множество всех допустимых объектов x, удовлетворяющих условию $A(x)$. Тогда существует единственное множество Q, удовлетворяющее условию: Q — множество всех допустимых объектов x, удовлетворяющих условию $A(x)$. Обозначим через $\big\{x\colon A(x)\big\}$ множество всех допустимых объектов x, удовлетворяющих условию $A(x)$.

Будем говорить, что A — пустое множество, если: A — множество, $\forall x(x \notin A)$. Существует единственное множество A, удовлетворяющее условию: A — пустое множество. Обозначим через $\varnothing$ пустое множество.

Пусть A — множество. Будем писать $B \subseteq A$, если: B — множество, $\forall x(x \in B \implies x \in A)$. Утверждение $B \subseteq A$ читается: «B — подмножество множества A». **Внимание! Утверждения $B \in A$ и $B \subseteq A$ имеют разный смысл.** Очевидно: $\varnothing \subseteq A$, $A \subseteq A$.

Пусть A — множество. Будем писать $B \subset A$, если $B \subseteq A \wedge B \neq A$. Утверждение $B \subset A$ читается: «B — **собственное** подмножество множества A».

Пусть A — множество. Обозначим, $P(A) = \{B\colon B \subseteq A\}$.

Пусть x — некоторый объект. Обозначим, $\{x\} = \{u\colon u = x\}$.

Пусть x, y — некоторые объекты. Обозначим, $\{x, y\} = \{u\colon u = x \vee u = y\}$. **Внимание: $\{y, x\} = \{x, y\}$, $\{x, x\} = \{x\}$.**

Пусть x — некоторый объект. Обозначим, $(x) = x$.

Пусть x, y — некоторые объекты. Обозначим через (x, y) упорядоченную пару объектов x, y. Мы не даём строгого определения упорядоченной пары. Достаточно знать, что (x, y) это некоторый новый объект, по которому можно однозначно восстановить как объект x, так и объект y. Пусть $u = (x, y)$. Обозначим: $u^1 = x$, $u^2 = y$. **Внимание: $x \neq y \implies (y, x) \neq (x, y)$, $(x, x) \neq (x)$.**

Пусть A, B — множества. Обозначим:

$$A \cap B = \{x\colon x \in A \wedge x \in B\},$$
$$A \cup B = \{x\colon x \in A \vee x \in B\},$$
$$A \setminus B = \{x\colon x \in A \wedge x \notin B\},$$
$$A \times B = \big\{(x, y)\colon x \in A \wedge y \in B\big\} = \Big\{u\colon \exists x \exists y\big(x \in A \wedge y \in B \wedge u = (x, y)\big)\Big\}.$$

Будем говорить, что: $A \cap B$ — пересечение множеств A, B; $A \cup B$ — объединение множеств A, B; $A \setminus B$ — разность множеств A, B; $A \times B$ — прямое произведение множеств A, B (декартово произведение множеств A, B).

1.4. Теория функций

Пусть F — функция. Обозначим через $\mathrm{D}(F)$ область определения функции F.

Внимание! Пусть F_1, F_2 — функции. Очевидно, $F_1 = F_2$ тогда и только тогда, когда: $\mathrm{D}(F_1) = \mathrm{D}(F_2)$, $F_1(x) = F_2(x)$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$.

Будем говорить, что F — пустая функция, если: F — функция, $\mathrm{D}(F) = \varnothing$. Существует единственная функция, удовлетворяющая условию: F — пустая функция.

Пусть F — функция. Обозначим:

$$\mathrm{R}(F) = \big\{F(x)\colon x \in \mathrm{D}(F)\big\} = \Big\{y\colon \exists x\big(x \in \mathrm{D}(F) \wedge y = F(x)\big)\Big\}.$$

Множество $\mathrm{R}(F)$ называется областью значений функции F или образом функции F. Другое обозначение, $\mathrm{Im}(F)$.

Пусть: F — функция, A — множество. Обозначим:

$$\mathrm{D}(F, A) = \{x\colon x \in \mathrm{D}(F) \wedge F(x) \in A\}.$$

Множество $\mathrm{D}(F, A)$ называется прообразом множества A под действием функции F. Очевидно, $\mathrm{D}(F, A) \subseteq \mathrm{D}(F)$. Пусть $\mathrm{R}(F) \subseteq A$. Очевидно, $\mathrm{D}(F, A) = \mathrm{D}(F)$.

Пусть: F — функция, A — множество. Обозначим:

$$F[A] = \{F(x)\colon x \in A \wedge x \in \mathrm{D}(F)\} = \Big\{y\colon \exists x\big(x \in A \wedge x \in \mathrm{D}(F) \wedge y = F(x)\big)\Big\}.$$

Множество $F[A]$ называется образом множества A под действием функции F. Очевидно, $F[A] \subseteq \mathrm{R}(F)$. Пусть $\mathrm{D}(F) \subseteq A$. Очевидно, $F[A] = \mathrm{R}(F)$.

Пусть A, B — множества. Будем писать $F\colon A \to B$, если: F — функция, $\mathrm{D}(F) \subseteq A$, $\mathrm{R}(F) \subseteq B$. Утверждение $F\colon A \to B$ читается: «функция F действует из множества A в множество B». Обозначим через $\mathrm{fun}(A, B)$ множество всех функций F, удовлетворяющих условию $F\colon A \to B$.

Пусть A, B — множества. Будем писать $F\colon A \implies B$, если: F — функция, $\mathrm{D}(F) = A$, $\mathrm{R}(F) \subseteq B$. Утверждение $F\colon A \implies B$ читается: «функция F действует из **всего** множества A в множество B». Обозначим через $\mathrm{Fun}(A, B)$ множество всех функций F, удовлетворяющих условию $F\colon A \implies B$.

Пусть: F — функция, A — множество. Обозначим через $F|_A$ функцию, удовлетворяющую условиям: $\mathrm{D}(F|_A) = A \cap \mathrm{D}(F)$, $F|_A(x) = F(x)$ при $x \in A \cap D(F)$. Функция $F|_A$ называется ограничением функции F на множество A. Очевидно, $\mathrm{R}(F|_A) = F[A]$

Пусть F_1, F_2 — функции. Обозначим через $F_2 \circ F_1$ функцию, удовлетворяющую условиям: $\mathrm{D}(F_2 \circ F_1) = \{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)\}$, $(F_2 \circ F_1)(x) = F_2\big(F_1(x)\big)$ при $x \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$. Функция $F_2 \circ F_1$ называется суперпозицией функций F_2, F_1 или композицией функций F_2, F_1 или произведением функций F_2, F_1 или сложной функцией, образованной функциями F_2, F_1. Другое обозначение, F_2F_1.

Утверждение. *Пусть F_1, F_2, F_3 — функции. Тогда $(F_3 \circ F_2) \circ F_1 = F_3 \circ (F_2 \circ F_1)$.*

Доказательство. Очевидно:

$$\begin{gathered}\mathrm{D}\big((F_3 \circ F_2) \circ F_1\big) = \{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_3 \circ F_2)\} = \\ = \Big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2) \wedge F_2\big(F_1(x)\big) \in \mathrm{D}(F_3)\Big\} = \\ = \{x\colon x \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1) \wedge (F_2 \circ F_1)(x) \in \mathrm{D}(F_3)\} = \mathrm{D}\big(F_3 \circ (F_2 \circ F_1)\big).\end{gathered}$$

Пусть $x \in \mathrm{D}\big((F_3 \circ F_2) \circ F_1\big)$. Тогда:

$$\begin{gathered}\big((F_3 \circ F_2) \circ F_1\big)(x) = (F_3 \circ F_2)\big(F_1(x)\big) = F_3\Big(F_2\big(F_1(x)\big)\Big) = F_3\big((F_2 \circ F_1)(x)\big) = \\ = \big(F_3 \circ (F_2 \circ F_1)\big)(x). \quad \square\end{gathered}$$

Утверждение. *Пусть: F_1, F_2 — функции, A — множество. Тогда $(F_2 \circ F_1)[A] = F_2\big[F_1[A]\big]$.*

Доказательство. Пусть $z \in (F_2 \circ F_1)[A]$. Тогда существует объект x, удовлетворяющий условиям: $x \in A$, $x \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$, $z = (F_2 \circ F_1)(x)$. Следовательно: $x \in A$, $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$, $z = F_2\big(F_1(x)\big)$. Тогда: $F_1(x) \in F_1[A]$, $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$, $z = F_2\big(F_1(x)\big)$. Следовательно, $z \in F_2\big[F_1[A]\big]$.

Пусть $z \in F_2\big[F_1[A]\big]$. Тогда существует объект y, удовлетворяющий условиям: $y \in F_1[A]$, $y \in \mathrm{D}(F_2)$, $z = F_2(y)$. Так как $y \in F_1[A]$, то существует объект x, удовлетворяющий условиям: $x \in A$, $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $y = F_1(x)$. Тогда: $x \in A$, $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$, $z = F_2\big(F_1(x)\big)$. Следовательно: $x \in A$, $x \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$, $z = (F_2 \circ F_1)(x)$. Тогда $z \in (F_2 \circ F_1)[A]$. □

Замечание. Пусть F_1, F_2 — функции. Очевидно:

$$\mathrm{D}(F_2 \circ F_1) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)\big\} \subseteq \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1)\big\} = \mathrm{D}(F_1);$$
$$\mathrm{D}(F_2 \circ F_1) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)\big\} = \mathrm{D}\big(F_1, \mathrm{D}(F_2)\big);$$
$$\mathrm{R}(F_2 \circ F_1) = (F_2 \circ F_1)\big[\mathrm{D}(F_1)\big] = F_2\Big[F_1\big[\mathrm{D}(F_1)\big]\Big] \subseteq \mathrm{R}(F_2);$$
$$\mathrm{R}(F_2 \circ F_1) = (F_2 \circ F_1)\big[\mathrm{D}(F_1)\big] = F_2\Big[F_1\big[\mathrm{D}(F_1)\big]\Big] = F_2\big[\mathrm{R}(F_1)\big].$$

Пусть: F_1, F_2 — функции, $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$. Тогда:

$$\mathrm{D}(F_2 \circ F_1) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)\big\} = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1)\big\} = \mathrm{D}(F_1).$$

Пусть: F_1, F_2 — функции, $\mathrm{D}(F_2) \subseteq \mathrm{R}(F_1)$. Тогда:

$$\mathrm{R}(F_2 \circ F_1) = F_2\big[\mathrm{R}(F_1)\big] = \mathrm{R}(F_2).$$

Пусть F — функция. Очевидно, существует функция φ, удовлетворяющая условиям: $\varphi\colon \mathrm{R}(F) \implies \mathrm{D}(F)$, $F\big(\varphi(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{R}(F)$.

Пусть F — функция. Будем говорить, что F — обратимая функция, если

$$\forall x_1 \in \mathrm{D}(F) \forall x_2 \in \mathrm{D}(F) \big(x_1 \neq x_2 \implies F(x_1) \neq F(x_2)\big).$$

Пусть F — обратимая функция. Будем говорить, что φ — обратная функция к функции F, если: $\varphi\colon \mathrm{R}(F) \implies \mathrm{D}(F)$, $F\big(\varphi(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{R}(F)$. Очевидно, существует единственная функция φ, удовлетворяющая условию: φ — обратная функция к функции F. Обозначим через F^{-1} обратную функцию к функции F.

Утверждение. *Пусть: F_1, F_2 — функции, $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$. Тогда: F_1 — обратимая функция, $\mathrm{D}(F_1) \subseteq \mathrm{R}(F_2)$.*

Доказательство. Пусть: x_1, $x_2 \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x_1) = F_1(x_2)$. Тогда: $x_1 = F_2\big(F_1(x_1)\big) = F_2\big(F_1(x_2)\big) = x_2$. Следовательно, F_1 — обратимая функция.

Пусть $x \in \mathrm{D}(F_1)$. Тогда: $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$, $x = F_2\big(F_1(x)\big)$. Следовательно, $x \in \mathrm{R}(F_2)$. Тогда $\mathrm{D}(F_1) \subseteq \mathrm{R}(F_2)$. □

Утверждение. *Пусть: F_1, F_2 — функции, $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$; $\mathrm{R}(F_2) \subseteq \mathrm{D}(F_1)$. Тогда: F_1 — обратимая функция, $\mathrm{D}(F_1) = \mathrm{R}(F_2)$.*

Доказательство. Так как: $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$, то: F_1 — обратимая функция, $\mathrm{D}(F_1) \subseteq \mathrm{R}(F_2)$. Так как: $\mathrm{D}(F_1) \subseteq \mathrm{R}(F_2)$, $\mathrm{R}(F_2) \subseteq \mathrm{D}(F_1)$, то $\mathrm{D}(F_1) = \mathrm{R}(F_2)$. Итак: F_1 — обратимая функция, $\mathrm{D}(F_1) = \mathrm{R}(F_2)$. □

Утверждение. *Пусть: F_1, F_2 — функции, $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big)$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$; $\mathrm{R}(F_2) \subseteq \mathrm{D}(F_1)$, $F_1\big(F_2(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{D}(F_2)$. Тогда: F_1, F_2 — обратимые функции, $F_1^{-1} = F_2$, $F_2^{-1} = F_1$.*

Доказательство. Так как: $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big)$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$, то F_1 — обратимая функция.

Так как: $\mathrm{R}(F_2) \subseteq \mathrm{D}(F_1)$, $F_1\big(F_2(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{D}(F_2)$; $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, то $\mathrm{D}(F_2) = \mathrm{R}(F_1)$.

Так как: F_1 — обратимая функция, $F_2\colon\ \mathrm{R}(F_1) \implies \mathrm{D}(F_1)$, $F_1\big(F_2(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{R}(F_1)$, то F_2 — обратная функция к функции F_1.

Аналогично доказываем, что: F_2 — обратимая функция, $F_2^{-1} = F_1$. □

Утверждение. *Пусть: F_1, F_2 — обратимые функции. Тогда: $F_2 \circ F_1$ — обратимая функция, $(F_2 \circ F_1)^{-1} = F_1^{-1} \circ F_2^{-1}$.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$. Обозначим, $z = (F_2 \circ F_1)(x)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$, $z = F_2\big(F_1(x)\big)$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $z \in \mathrm{D}(F_2^{-1})$, $F_2^{-1}(z) = F_1(x)$. Тогда: $z \in \mathrm{D}(F_2^{-1})$, $F_2^{-1}(z) \in \mathrm{D}(F_1^{-1})$, $F_1^{-1}\big(F_2^{-1}(z)\big) = x$. Следовательно: $z \in \mathrm{D}(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})$, $(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})(z) = x$. Итак: $(F_2 \circ F_1)(x) \in \mathrm{D}(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})$, $(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})\big((F_2 \circ F_1)(x)\big) = x$.

Пусть $z \in \mathrm{D}(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})$. Обозначим, $x = (F_1^{-1} \circ F_2^{-1})(z)$. Тогда: $z \in \mathrm{D}(F_2^{-1})$, $F_2^{-1}(z) \in \mathrm{D}(F_1^{-1})$, $x = F_1^{-1}\big(F_2^{-1}(z)\big)$. Следовательно: $z \in \mathrm{D}(F_2^{-1})$, $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x) = F_2^{-1}(z)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = z$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$, $(F_2 \circ F_1)(x) = z$. Итак: $(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})(z) \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$, $(F_2 \circ F_1)\big((F_1^{-1} \circ F_2^{-1})(z)\big) = z$.

Окончательно получаем, что: $F_2 \circ F_1$ — обратимая функция, $(F_2 \circ F_1)^{-1} = F_1^{-1} \circ F_2^{-1}$. □

Утверждение. *Пусть F — обратимая функция. Тогда: $F^{-1}\big(F(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F)$; $\mathrm{R}(F^{-1}) = \mathrm{D}(F)$.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathrm{D}(F)$. Тогда $F(x) \in \mathrm{R}(F)$. Следовательно: $F^{-1}\big(F(x)\big) \in \mathrm{D}(F)$, $F\Big(F^{-1}\big(F(x)\big)\Big) = F(x)$. Так как F — обратимая функция, то $F^{-1}\big(F(x)\big) = x$.

Так как: $\mathrm{R}(F) \subseteq \mathrm{D}(F^{-1})$, $F^{-1}\big(F(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F)$; $\mathrm{R}(F^{-1}) \subseteq \mathrm{D}(F)$, то $\mathrm{D}(F) = \mathrm{R}(F^{-1})$. □

Утверждение. *Пусть: F_1, F_2 — функции, $\mathrm{R}(F_1) = \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$. Тогда: F_1 — обратимая функция, $F_1^{-1} = F_2$*

Доказательство. Так как: $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$, то F_1 — обратимая функция.

Очевидно, $\mathrm{D}(F_1^{-1})$, $\mathrm{D}(F_2) = \mathrm{R}(F_1)$. Пусть $y \in \mathrm{R}(F_1)$. Тогда существует объект x, удовлетворяющий условиям: $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $y = F_1(x)$. Следовательно: $F_1^{-1}(y) = F_1^{-1}\big(F_1(x)\big) = x = F_2\big(F_1(x)\big) = F_2(y)$. Тогда $F_1^{-1} = F_2$. □

Утверждение. *Пусть F — обратимая функция. Тогда: F^{-1} — обратимая функция, $(F^{-1})^{-1} = F$.*

Доказательство. Так как: $\mathrm{R}(F^{-1}) = \mathrm{D}(F)$, $F\big(F^{-1}(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{D}(F^{-1})$, то: F^{-1} — обратимая функция, $(F^{-1})^{-1} = F$. □

Пусть A — множество. Будем говорить, что I — единичная функция на множестве A, если: I — функция, $\mathrm{D}(I) = A$, $I(x) = x$ при $x \in A$.

Пусть: A_1, A_2 — множества, $F\colon A_1 \to A_2$. Очевидно: $F \circ I_1 = F$, $I_2 \circ F = F$.

Пусть: A_1, A_2 — множества, $F\colon A_1 \to A_2$, F — обратимая функция. Очевидно: $F \circ F^{-1} = I_2|_{\mathrm{R}(F)}$, $F^{-1} \circ F = I_1|_{\mathrm{D}(F)}$.

1.5. Числовые системы

Обозначим через $\mathbb{Z}$ множество всех целых чисел. Обозначим: $\mathbb{Z}_+ = \{k\colon k \in \mathbb{Z} \wedge k \geqslant 0\}$, $\mathbb{N} = \{k\colon k \in \mathbb{Z} \wedge k \geqslant 1\}$, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\overline{\mathbb{Z}}_+ = \{k\colon k \in \overline{\mathbb{Z}} \wedge k \geqslant 0\}$, $\overline{\mathbb{N}} = \{k\colon k \in \overline{\mathbb{Z}} \wedge k \geqslant 1\}$.

Пусть N_1, $N_2 \in \overline{\mathbb{Z}}$. Будем писать $k = \overline{N_1, N_2}$, если: $k \in \overline{\mathbb{Z}}$, $N_1 \leqslant k \leqslant N_2$.

Пусть A — конечное множество. Обозначим через $\operatorname{card}(A)$ количество элементов множества A.

Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 3$, $x_1, \ldots, x_N$ — некоторые объекты. Обозначим, $\{x_1, \ldots, x_N\} = \{u\colon u = x_1 \vee \cdots \vee u = x_N\}$.

Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 3$, $x_1, \ldots, x_N$ — некоторые объекты. Обозначим, $(x_1, \ldots, x_N) = \big((x_1, \ldots, x_{N-1}), x_N\big)$. Пусть $u = (x_1, \ldots, x_N)$. Обозначим: $u^1 = x_1, \ldots, u^N = x_N$.

Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 3$, $A_1, \ldots, A_N$ — множества. Обозначим:

$$A_1 \times \cdots \times A_N = \big\{(x_1, \ldots, x_N)\colon x_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge x_N \in A_N\big\} =$$
$$= \Big\{u\colon \exists x_1 \cdots \exists x_N \big(x_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge x_N \in A_N \wedge u = (x_1, \ldots, x_N)\big)\Big\}.$$

Очевидно, $A_1 \times \cdots \times A_N = (A_1 \times \cdots \times A_{N-1}) \times A_N$.

Пусть A — множество. Обозначим, $A^1 = A$. Пусть: A — множество, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$. Пусть $A_1, \ldots, A_N = A$. Обозначим, $A^N = A_1 \times \cdots \times A_N$. Очевидно, $A^N = A^{N-1} \times A$.

Обозначим через $\mathbb{Q}$ множество всех рациональных чисел. Обозначим: $\mathbb{Q}_+ = \{x\colon x \in \mathbb{Q} \wedge x \geqslant 0\}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\overline{\mathbb{Q}}_+ = \{x\colon x \in \overline{\mathbb{Q}} \wedge x \geqslant 0\}$.

Обозначим через $\mathbb{R}$ множество всех вещественных чисел. Обозначим: $\mathbb{R}_+ = \{x\colon x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant 0\}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{x\colon x \in \overline{\mathbb{R}} \wedge x \geqslant 0\}$.

Пусть $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Будем говорить, что α — наименьший элемент множества A, если: $\alpha \in A$, $\forall x \in A (x \geqslant \alpha)$. Пусть существует число α, удовлетворяющее условию: α — наименьший элемент множества A. Тогда существует единственное число α, удовлетворяющее условию: α — наименьший элемент множества A. Обозначим через $\min(A)$ наименьший элемент множества A.

Пусть $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Будем говорить, что α — наибольший элемент множества A, если: $\alpha \in A$, $\forall x \in A (x \leqslant \alpha)$. Пусть существует число α, удовлетворяющее условию: α — наибольший элемент множества A. Тогда существует единственное число α, удовлетворяющее условию: α — наибольший элемент множества A. Обозначим через $\max(A)$ наибольший элемент множества A.

Пусть α, $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$. Обозначим:

$$[\alpha, \beta] = \big\{x\colon x \in \overline{\mathbb{R}} \wedge \min\{\alpha, \beta\} \leqslant x \leqslant \max\{\alpha, \beta\}\big\},$$
$$(\alpha, \beta] = [\alpha, \beta] \setminus \{\alpha\},$$
$$[\alpha, \beta) = [\alpha, \beta] \setminus \{\beta\},$$
$$(\alpha, \beta) = [\alpha, \beta] \setminus \{\alpha, \beta\}.$$

1.6. Примеры

Утверждение $0 < 1 \vee 2 + 2 = 4$ истинно. Утверждение $1 < 0 \implies 2 + 2 = 5$ истинно. Очевидно:

$$\neg(0 < 1 \vee 2 + 2 = 4) \iff (1 \leqslant 0 \wedge 2 + 2 \neq 4),$$
$$\neg(1 < 0 \implies 2 + 2 = 5) \iff (1 < 0 \wedge 2 + 2 \neq 5).$$

Пусть: $A(x)$ — утверждение относительно допустимого объекта x; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_r$ — некоторые допустимые объекты. Очевидно:

$$\begin{aligned} \forall k = \overline{1,r}\, A(x_k) &\iff A(x_1) \wedge \dots \wedge A(x_r), \\ \exists k = \overline{1,r}\, A(x_k) &\iff A(x_1) \vee \dots \vee A(x_r). \end{aligned}$$

Утверждение $\forall x \in \mathbb{R}(x = 0)$ ложно. Утверждение $\exists x \in \mathbb{R}(x = 0)$ истинно. Утверждение $\exists! x \in \mathbb{R}(x = 0)$ истинно. **Внимание! Утверждение** $\forall x \in \varnothing(x \neq x)$ **истинно.** Утверждение $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}(x < y)$ истинно. Утверждение $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}(x < y)$ ложно. **Внимание! Утверждения** $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}(x < y)$ **и** $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}(x < y)$ **имеют разный смысл.** Очевидно:

$$\begin{aligned} \neg \forall x \in \mathbb{R}(x = 0) &\iff \exists x \in \mathbb{R}(x \neq 0), \\ \neg \exists x \in \mathbb{R}(x = 0) &\iff \forall x \in \mathbb{R}(x \neq 0), \\ \neg \forall x \in \varnothing(x \neq x) &\iff \exists x \in \varnothing(x = x), \\ \neg \forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}(x < y) &\iff \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}(y \leqslant x), \\ \neg \exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}(x < y) &\iff \forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R}(y \leqslant x). \end{aligned}$$

Лекция 2. Векторы в пространствах E^1, E^2, E^3

2.1. Пространство $\mathbb{R}^N$

Определение. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество $\mathbb{R}^N$.

Пусть x, $y \in \mathbb{R}^N$. Обозначим:

$$x + y = \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ \vdots \\ x^N + y^N \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $x+y \in \mathbb{R}^N$. Будем говорить, что $\{x+y\}_{x,y\in\mathbb{R}^N}$ — стандартная операция сложения на множестве $\mathbb{R}^N$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$. Обозначим:

$$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x^1 \\ \vdots \\ \lambda x^N \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\lambda x \in \mathbb{R}^N$. Будем говорить, что $\{\lambda x\}_{\lambda\in\mathbb{R},\, x\in\mathbb{R}^N}$ — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\mathbb{R}^N$.

Обозначим:

$$\tilde{\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}^N$. Будем говорить, что $\tilde{\theta}$ — стандартный нулевой элемент множества $\mathbb{R}^N$.

Утверждение. *Пусть $N \in \mathbb{N}$.*

1. *Пусть x, $y \in \mathbb{R}^N$. Тогда $x + y = y + x$.*
2. *Пусть x, y, $z \in \mathbb{R}^N$. Тогда $(x + y) + z = x + (y + z)$.*
3. *Пусть $x \in \mathbb{R}^N$. Тогда $x + \tilde{\theta} = x$.*
4. *Пусть $x \in \mathbb{R}^N$. Тогда $x + (-1)x = \tilde{\theta}$.*
5. *Пусть: α, $\beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$. Тогда $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.*
6. *Пусть $x \in \mathbb{R}^N$. Тогда $1x = x$.*
7. *Пусть: α, $\beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$. Тогда $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.*
8. *Пусть: $\lambda \in \mathbb{R}$, x, $y \in \mathbb{R}^N$. Тогда $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.*
9. *Пусть $x \in \mathbb{R}^N$. Тогда $0x = \tilde{\theta}$.*
10. *Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $\lambda\tilde{\theta} = \tilde{\theta}$.*
11. *Пусть a, $b \in \mathbb{R}^N$. Существует единственный столбец x, удовлетворяющий условиям: $x \in \mathbb{R}^N$, $a + x = b$.*

Доказательство.

1. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(x + y)^j = x^j + y^j = y^j + x^j = (y + x)^j.$$

Следовательно, $x + y = y + x$.

2. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big((x+y)+z\big)^j = (x^j + y^j) + z^j = x^j + (y^j + z^j) = \big(x + (y+z)\big)^j.$$

Следовательно, $(x+y)+z = x+(y+z)$.

3. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(x+\tilde{\theta})^j = x^j + \tilde{\theta}^j = x^j + 0 = x^j.$$

Следовательно, $x + \tilde{\theta} = x$.

4. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big(x + (-1)x\big)^j = x^j + (-1)x^j = 0 = \tilde{\theta}^j.$$

Следовательно, $x + (-1)x = \tilde{\theta}$.

5. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big((\alpha\beta)x\big)^j = (\alpha\beta)x^j = \alpha(\beta x^j) = \big(\alpha(\beta x)\big)^j.$$

Следовательно, $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

6. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(1x)^j = 1x^j = x^j.$$

Следовательно, $1x = x$.

7. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big((\alpha+\beta)x\big)^j = (\alpha+\beta)x^j = \alpha x^j + \beta x^j = (\alpha x + \beta x)^j.$$

Следовательно, $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$.

8. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big(\lambda(x+y)\big)^j = \lambda(x^j + y^j) = \lambda x^j + \lambda y^j = (\lambda x + \lambda y)^j.$$

Следовательно, $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$.

9. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(0x)^j = 0x^j = 0 = \tilde{\theta}^j.$$

Следовательно, $0x = \tilde{\theta}$.

10. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(\lambda\tilde{\theta})^j = \lambda\tilde{\theta}^j = \lambda 0 = 0 = \tilde{\theta}^j.$$

Следовательно, $\lambda\tilde{\theta} = \tilde{\theta}$.

11. Пусть: $x \in \mathbb{R}^N$, $a + x = b$. Тогда:

$$\begin{aligned}
(-1)a + (a+x) &= (-1)a + b,\\
\big((-1)a + a\big) + x &= (-1)a + b,\\
\big(a + (-1)a\big) + x &= (-1)a + b,
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}\tilde{\theta} + x = (-1)a + b,\\ x + \tilde{\theta} = (-1)a + b,\\ x = (-1)a + b.\end{gathered}$$

Пусть: $x_1 \in \mathbb{R}^N$, $a + x_1 = b$, $x_2 \in \mathbb{R}^N$, $a + x_2 = b$. Тогда: $x_1 = (-1)a + b$, $x_2 = (-1)a + b$. Следовательно, $x_1 = x_2$.

Обозначим, $x = (-1)a + b$. Тогда: $x \in \mathbb{R}^N$, $a + x = a + \big((-1)a + b\big) = \big(a + (-1)a\big) + b = \tilde{\theta} + b = b + \tilde{\theta} = b$. □

Определение. Пусть $N \in \mathbb{N}$.

Пусть $x \in \mathbb{R}^N$. Обозначим, $-x = (-1)x$. Очевидно: $-x \in \mathbb{R}^N$, $x + (-x) = \tilde{\theta}$. Будем говорить, что $-x$ — противоположный столбец к столбцу x.

Пусть x, $y \in \mathbb{R}^N$. Обозначим, $y - x = (-1)x + y$. Очевидно: $y - x \in \mathbb{R}^N$, $x + (y - x) = y$. Будем говорить, что $y - x$ — разность столбцов y, x.

2.2. Линейная комбинация столбцов, линейная зависимость столбцов

Определение (линейная комбинация столбцов). Пусть: $N \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $\lambda^1, \dots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^N$.

Будем говорить, что $\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda^k x_k$ — линейная комбинация столбцов $x_1, \dots, x_r$ с коэффициентами $\lambda^1, \dots, \lambda^r$.

Далее часто будем писать $\lambda^k x_k$ вместо $\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda^k x_k$ (частный случай *правила суммирования Эйнштейна*).

Определение (линейная оболочка столбцов, линейная зависимость столбцов, линейная независимость столбцов). Пусть: $N \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^N$.

Обозначим:

$$\begin{gathered}L(x_1, \dots, x_r) = \{\lambda^k x_k \colon \lambda^1 \in \mathbb{R} \wedge \dots \wedge \lambda^r \in \mathbb{R}\} =\\ = \big\{u \colon \exists \lambda^1 \cdots \exists \lambda^r (\lambda^1 \in \mathbb{R} \wedge \dots \wedge \lambda^r \in \mathbb{R} \wedge u = \lambda^k x_k)\big\}.\end{gathered}$$

Очевидно, $L(x_1, \dots, x_r) \subseteq \mathbb{R}^N$. Будем говорить, что $L(x_1, \dots, x_r)$ — линейная оболочка столбцов $x_1, \dots, x_r$. Пусть $k = \overline{1, r}$. Тогда: $x_k = \delta_k^m x_m \in L(x_1, \dots, x_r)$ (здесь: $\delta_k^m = 0$ при: k, $m = \overline{1, r}$, $k \neq m$; $\delta_k^m = 1$ при: k, $m = \overline{1, r}$, $k = m$).

Будем говорить, что по любой линейной комбинации столбцов $x_1, \dots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты, если для любых чисел $\alpha^1, \dots, \alpha^r$, $\beta^1, \dots, \beta^r$, удовлетворяющих условиям: $\alpha^1, \dots, \alpha^r$, $\beta^1, \dots, \beta^r \in \mathbb{R}$, $\alpha^k x_k = \beta^k x_k$, справедливо утверждение $\forall k = \overline{1, r} (\alpha^k = \beta^k)$.

Будем говорить, что $x_1, \dots, x_r$ — линейно зависимые столбцы, если существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^r$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1, \dots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $\lambda^k x_k = \tilde{\theta}$, $\exists k = \overline{1, r} (\lambda^k \neq 0)$.

Будем говорить, что $x_1, \dots, x_r$ — линейно независимые столбцы, если для любых чисел $\lambda^1, \dots, \lambda^r$, удовлетворяющих условиям: $\lambda^1, \dots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $\lambda^k x_k = \tilde{\theta}$, справедливо утверждение $\forall k = \overline{1, r} (\lambda^k = 0)$.

Утверждение (критерий линейной зависимости столбцов). *Пусть $N \in \mathbb{N}$.*

1. Пусть $x \in \mathbb{R}^N$. Столбец x является линейно зависимым тогда и только тогда, когда $x = \tilde{\theta}$.

2. Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^N$. Столбцы $x_1, \dots, x_r$ являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда существует номер $k_0 = \overline{1, r}$, удовлетворяющий условию $x_{k_0} \in L(x_1, \dots, x_{k_0-1}, x_{k_0+1}, \dots, x_r)$.

Доказательство.

1. Пусть x — линейно зависимый столбец. Тогда существует число $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям: $\lambda x = \tilde{\theta}$, $\lambda \neq 0$. Следовательно, $x = \tilde{\theta}$.

Пусть $x = \tilde{\theta}$. Тогда $1x = \tilde{\theta}$. Так как $1 \neq 0$, то x — линейно зависимый столбец.

2. Пусть $x_1, \dots, x_r$ — линейно зависимые столбцы. Тогда существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^N \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^k x_k = \tilde{\theta}$, $\exists k = \overline{1, r}(\lambda^k \neq 0)$. Выберем номер $k_0 = \overline{1, r}$, удовлетворяющий условию $\lambda^{k_0} \neq 0$. Тогда:

$$\lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^{k_0-1} x_{k_0-1} + \lambda^{k_0} x_{k_0} + \lambda^{k_0+1} x_{k_0+1} + \dots + \lambda^r x_r = \tilde{\theta},$$
$$x_{k_0} = \frac{-\lambda^1}{\lambda_{k_0}} x_1 + \dots + \frac{-\lambda^{k_0-1}}{\lambda_{k_0}} x_{k_0-1} + \frac{-\lambda^{k_0+1}}{\lambda_{k_0}} x_{k_0+1} + \dots + \frac{-\lambda^r}{\lambda_{k_0}} x_r,$$
$$x_{k_0} \in L(x_1, \dots, x_{k_0-1}, x_{k_0+1}, \dots, x_r).$$

Пусть существует номер $k_0 = \overline{1, r}$, удовлетворяющий условию $x_{k_0} \in L(x_1, \dots, x_{k_0-1}, x_{k_0+1}, \dots, x_r)$. Тогда существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^{k_0-1}$, $\lambda^{k_0+1}, \dots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию:

$$x_{k_0} = \lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^{k_0-1} x_{k_0-1} + \lambda^{k_0+1} x_{k_0+1} + \dots + \lambda^r x_r.$$

Следовательно:

$$(-\lambda^1) x_1 + \dots + (-\lambda^{k_0-1}) x_{k_0-1} + 1 x_{k_0} + (-\lambda^{k_0+1}) x_{k_0+1} + \dots + (-\lambda^r) x_r = \tilde{\theta}.$$

Так как $1 \neq 0$, то $x_1, \dots, x_r$ — линейно зависимые столбцы. □

Утверждение (критерий линейной независимости столбцов). *Пусть: $N \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^N$. Столбцы $x_1, \dots, x_r$ являются линейно независимыми тогда и только тогда, когда по любой линейной комбинации столбцов $x_1, \dots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты.*

Доказательство. Пусть $x_1, \dots, x_r$ — линейно независимые столбцы. Пусть: $\alpha^1, \dots, \alpha^r$, $\beta^1, \dots, \beta^r \in \mathbb{R}$, $\alpha^k x_k = \beta^k x_k$. Тогда $(\alpha^k - \beta^k) x_k = \tilde{\theta}$. Так как $x_1, \dots, x_r$ — линейно независимые столбцы, то $\forall k = \overline{1, r}(\alpha^k - \beta^k = 0)$. Тогда $\forall k = \overline{1, r}(\alpha^k = \beta^k)$. Следовательно, по любой линейной комбинации столбцов $x_1, \dots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты.

Пусть по любой линейной комбинации столбцов $x_1, \dots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты. Пусть: $\lambda^1, \dots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $\lambda^k x_k = \tilde{\theta}$. Тогда:

$$\lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^r x_r = 0 x_1 + \dots + 0 x_r.$$

Так как по любой линейной комбинации столбцов $x_1, \dots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты, то $\forall k = \overline{1, r}(\lambda^k = 0)$. Тогда $x_1, \dots, x_r$ — линейно независимые столбцы. □

Утверждение. *Пусть:* $N \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_r$, $x \in \mathbb{R}^N$, $x_1, \dots, x_r$ *— линейно независимые столбцы,* $x_1, \dots, x_r$, x *— линейно зависимые столбцы. Тогда* $x \in L(x_1, \dots, x_r)$.

Доказательство. Так как $x_1, \dots, x_r$, x — линейно зависимые столбцы, то существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^{r+1} \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^r x_r + \lambda^{r+1} x = \tilde{\theta}$, $\exists k = \overline{1, r+1} (\lambda^k \neq 0)$. Предположим, что $\lambda^{r+1} = 0$. Тогда: $\lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^r x_r = \tilde{\theta}$, $\exists k = \overline{1, r} (\lambda^k \neq 0)$ (что противоречит утверждению: $x_1, \dots, x_r$ — линейно независимые столбцы). Итак, $\lambda^{r+1} \neq 0$. Тогда:

$$x = \frac{-\lambda^1}{\lambda^{r+1}} x_1 + \dots + \frac{-\lambda^r}{\lambda^{r+1}} x_r,$$
$$x \in L(x_1, \dots, x_r). \quad \square$$

Замечание (перестановки).

1. Пусть M — некоторое множество.

Будем говорить, что σ — перестановка множества M, если: σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma) = M$, $\mathrm{R}(\sigma) = M$.

Обозначим через $S(M)$ множество всех перестановок множества M.

Пусть σ_1, $\sigma_2 \in S(M)$. Обозначим, $\sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \circ \sigma_1$. Очевидно: $\sigma_2 \sigma_1$ — обратимая функция,

$$\mathrm{D}(\sigma_2 \sigma_1) = \big\{x \colon x \in \mathrm{D}(\sigma_1) \wedge \sigma_1(x) \in \mathrm{D}(\sigma_2)\big\} = \big\{x \colon x \in M \wedge \sigma_1(x) \in M\big\} = \{x \colon x \in M\} = M,$$
$$\mathrm{R}(\sigma_2 \sigma_1) = (\sigma_2 \sigma_1)[M] = \sigma_2\big[\sigma_1[M]\big] = \sigma_2\big[\mathrm{R}(\sigma_1)\big] = \sigma_2[M] = \mathrm{R}(\sigma_2) = M.$$

Тогда $\sigma_2 \sigma_1 \in S(M)$.

Обозначим: $e(x) = x$ при $x \in M$. Очевидно, $e \in S(M)$.

Пусть $\sigma \in S(M)$. Очевидно: σ^{-1} — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma^{-1}) = \mathrm{R}(\sigma) = M$, $\mathrm{R}(\sigma^{-1}) = \mathrm{D}(\sigma) = M$. Тогда $\sigma^{-1} \in S(M)$.

Пусть σ_1, σ_2, $\sigma_3 \in S(M)$. Очевидно, $(\sigma_3 \sigma_2) \sigma_1 = \sigma_3 (\sigma_2 \sigma_1)$.

Пусть $\sigma \in S(M)$. Очевидно: $\sigma e = \sigma$, $e \sigma = \sigma$.

Пусть $\sigma \in S(M)$. Очевидно: $\sigma \sigma^{-1} = e$, $\sigma^{-1} \sigma = e$.

2. Пусть: M — некоторое **конечное** множество, σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma) = M$, $\mathrm{R}(\sigma) \subseteq M$. Так как $\mathrm{D}(\sigma)$ — конечное множество, то $\mathrm{R}(\sigma)$ — конечное множество. Так как σ — обратимая функция, то: $\mathrm{card}\big(\mathrm{R}(\sigma)\big) = \mathrm{card}\big(\mathrm{D}(\sigma)\big) = \mathrm{card}(M)$. Так как: $\mathrm{R}(\sigma) \subseteq M$, $\mathrm{card}\big(\mathrm{R}(\sigma)\big) = \mathrm{card}(M)$, то $\mathrm{R}(\sigma) = M$. Тогда $\sigma \in S(M)$.

3. Обозначим, $S_0 = S(\varnothing)$.

Пусть $r \in \mathbb{N}$. Обозначим, $S_r = S\big(\{1, \dots, r\}\big)$.

4. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_r = \overline{1, r}$, $k_1, \dots, k_r$ — различные числа. Обозначим: $\sigma(1) = k_1, \dots, \sigma(r) = k_r$. Очевидно: σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma) = \{1, \dots, r\}$, $\mathrm{R}(\sigma) \subseteq \{1, \dots, r\}$. Тогда $\sigma \in S_r$.

Утверждение. *Пусть:* $N \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^N$, $\sigma \in S_r$, $x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)}$ *— линейно зависимые столбцы. Тогда* $x_1, \dots, x_r$ *— линейно зависимые столбцы.*

Доказательство. Так как $x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)}$ — линейно зависимые столбцы, то существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1 x_{\sigma(1)} + \dots + \lambda^r x_{\sigma(r)} = \tilde{\theta}$, $\exists m = \overline{1, r} (\lambda^m \neq 0)$. Тогда:

$$\lambda^{\sigma^{-1}(1)} x_1 + \dots + \lambda^{\sigma^{-1}(r)} x_r = \tilde{\theta}, \quad \exists k = \overline{1, r} (\lambda^{\sigma^{-1}(k)} \neq 0).$$

Следовательно, $x_1, \dots, x_r$ — линейно зависимые столбцы. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $N \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}^N$, $r_0 \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_{r_0} = \overline{1, r}$, $k_1 < \cdots < k_{r_0}$, $x_{k_1}, \ldots, x_{k_{r_0}}$ *— линейно зависимые столбцы. Тогда* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно зависимые столбцы.*

Доказательство. Так как $x_{k_1}, \ldots, x_{k_{r_0}}$ — линейно зависимые столбцы, то существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{r_0} \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\alpha^1 x_{k_1} + \cdots + \alpha^{r_0} x_{k_{r_0}} = \tilde{\theta}$, $\exists m = \overline{1, r_0}(\alpha^m \neq 0)$. Обозначим: $\beta^{k_1} = \alpha^1, \ldots, \beta^{k_{r_0}} = \alpha^{r_0}$, $\beta^k = 0$ при: $k = \overline{1, r}$, $k \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$. Тогда:

$$\beta^{k_1} x_{k_1} + \cdots + \beta^{k_{r_0}} x_{k_{r_0}} = \tilde{\theta}, \quad \exists m = \overline{1, r_0}(\beta^{k_m} \neq 0);$$
$$\beta^1 x_1 + \cdots + \beta^r x_r = \tilde{\theta}, \quad \exists k = \overline{1, r}(\beta^k \neq 0).$$

Следовательно, $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые столбцы. □

2.3. Пространства E^1, E^2, E^3

Замечание (пространство E^1). Обозначим через E^1 одномерное евклидово геометрическое пространство. Из аксиом элементарной геометрии непосредственно следует, что $E^1 \neq \varnothing$.

Пусть A, $B \in E^1$. Обозначим через $\rho(A, B)$ расстояние между точками A, B.

Пусть $p_1, p_2 \in E^1$. Будем говорить, что p_1, p_2 — аффинно зависимые точки, если $p_1 = p_2$.

Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 3$, $p_1, \ldots, p_r \in E^1$. Будем говорить, что $p_1, \ldots, p_r$ — аффинно зависимые точки.

Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $p_1, \ldots, p_r \in E^1$. Будем говорить, что $p_1, \ldots, p_r$ — аффинно независимые точки, если точки $p_1, \ldots, p_r$ не являются аффинно зависимыми.

Пусть A, B — аффинно независимые точки пространства E^1. Обозначим через $l_+(A, B)$ множество всех точек p, удовлетворяющих условиям: $p \in E^1$ и либо $p = A$, либо точка p лежит между точками A, B, либо $p = B$, либо точка B лежит между точками A, p. Будем говорить, что $l_+(A, B)$ — луч, выходящий из точки A и проходящий через точку B.

Пусть O, I — аффинно независимые точки пространства E^1. Пусть $A \in E^1$. Пусть $A \in l_+(O, I)$. Обозначим, $h(A) = \frac{\rho(O,A)}{\rho(O,I)}$. Пусть $A \notin l_+(O, I)$. Обозначим, $h(A) = -\frac{\rho(O,A)}{\rho(O,I)}$. Очевидно: h — обратимая функция, $\mathrm{D}(h) = E^1$, $\mathrm{R}(h) = \mathbb{R}$. Будем говорить, что h — аффинная координатная карта (аффинная система координат) в пространстве E^1, соответствующая точкам O, I. Пусть $A \in E^1$. Будем говорить, что $h(A)$ — координата точки A в координатной карте h. Очевидно: $h(O) = 0$, $h(I) = 1$.

Замечание (пространство E^2). Обозначим через E^2 двумерное евклидово геометрическое пространство. Из аксиом элементарной геометрии непосредственно следует, что $E^2 \neq \varnothing$.

Пусть A, $B \in E^2$. Обозначим через $\rho(A, B)$ расстояние между точками A, B.

Пусть $p_1, p_2 \in E^2$. Будем говорить, что p_1, p_2 — аффинно зависимые точки, если $p_1 = p_2$.

Пусть p_1, p_2, $p_3 \in E^2$. Будем говорить, что p_1, p_2, p_3 — аффинно зависимые точки, если существует прямая l, удовлетворяющая условиям: l — прямая в пространстве E^2, p_1, p_2, $p_3 \in l$.

Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 4$, $p_1, \ldots, p_r \in E^2$. Будем говорить, что $p_1, \ldots, p_r$ — аффинно зависимые точки.

Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $p_1, \ldots, p_r \in E^2$. Будем говорить, что $p_1, \ldots, p_r$ — аффинно независимые точки, если точки $p_1, \ldots, p_r$ не являются аффинно зависимыми.

Пусть l_1, l_2 — прямые в пространстве E^2. Будем писать $l_1 \parallel l_2$, если либо $l_1 \cap l_2 = \varnothing$, либо $l_1 = l_2$. Утверждение $l_1 \parallel l_2$ читается: «прямая l_1 параллельна прямой l_2».

Пусть A, B — аффинно независимые точки пространства E^2. Обозначим через $l_*(A, B)$ прямую, удовлетворяющую условиям: $l_*(A, B)$ — прямая в пространстве E^2, A, $B \in l_*(A, B)$.

Пусть A, B — аффинно независимые точки пространства E^2. Обозначим через $l_+(A, B)$ множество всех точек p, удовлетворяющих условиям: $p \in l_*(A, B)$ и либо $p = A$, либо точка p лежит между точками A, B, либо $p = B$, либо точка B лежит между точками A, p. Будем говорить, что $l_+(A, B)$ — луч, выходящий из точки A и проходящий через точку B.

Пусть O, I_1, I_2 — аффинно независимые точки пространства E^2. Пусть $A \in E^2$. Обозначим через l_1 прямую, удовлетворяющую условиям: l_1 — прямая в пространстве E^2, $A \in l_1$, $l_1 \parallel l_*(O, I_2)$. Обозначим через A_1 точку, удовлетворяющую условиям: $A_1 \in l_1$, $A_1 \in l_*(O, I_1)$. Пусть $A_1 \in l_+(O, I_1)$. Обозначим, $h^1(A) = \frac{\rho(O,A_1)}{\rho(O,I_1)}$. Пусть $A_1 \notin l_+(O, I_1)$. Обозначим, $h^1(A) = -\frac{\rho(O,A_1)}{\rho(O,I_1)}$. Обозначим через l_2 прямую, удовлетворяющую условиям: l_2 — прямая в пространстве E^2, $A \in l_2$, $l_2 \parallel l_*(O, I_1)$. Обозначим через A_2 точку, удовлетворяющую условиям: $A_2 \in l_2$, $A_2 \in l_*(O, I_2)$. Пусть $A_2 \in l_+(O, I_2)$. Обозначим, $h^2(A) = \frac{\rho(O,A_2)}{\rho(O,I_2)}$. Пусть $A_2 \notin l_+(O, I_2)$. Обозначим, $h^2(A) = -\frac{\rho(O,A_2)}{\rho(O,I_2)}$. Очевидно: h — обратимая функция, $\mathrm{D}(h) = E^2$, $\mathrm{R}(h) = \mathbb{R}^2$. Будем говорить, что h — аффинная координатная карта (аффинная система координат) в пространстве E^2, соответствующая точкам O, I_1, I_2. Пусть $A \in E^2$. Будем говорить, что $h(A)$ — столбец координат точки A в координатной карте h. Очевидно: $h^m(O) = 0$ при $m = 1, 2$; $h^m(I_k) = \delta^m_k$ при k, $m = 1, 2$.

Пусть: p_1, p_2, $p_3 \in E^2$, p_1, p_2 — аффинно независимые точки, p_1, p_2, p_3 — аффинно зависимые точки. Очевидно, $p_3 \in l_*(p_1, p_2)$.

Пусть: O, I_1, I_2 — аффинно независимые точки пространства E^2, h — соответствующая аффинная координатная карта. Очевидно: $p \in l_*(O, I_1)$ тогда и только тогда, когда: $p \in E^2$, $h^2(p) = 0$.

Замечание (пространство E^3). Обозначим через E^3 трёхмерное евклидово геометрическое пространство. Из аксиом элементарной геометрии непосредственно следует, что $E^3 \neq \varnothing$.

Пусть A, $B \in E^3$. Обозначим через $\rho(A, B)$ расстояние между точками A, B.

Пусть $p_1, p_2 \in E^3$. Будем говорить, что p_1, p_2 — аффинно зависимые точки, если $p_1 = p_2$.

Пусть p_1, p_2, $p_3 \in E^3$. Будем говорить, что p_1, p_2, p_3 — аффинно зависимые точки, если существует прямая l, удовлетворяющая условиям: l — прямая в пространстве E^3, p_1, p_2, $p_3 \in l$.

Пусть $p_1, p_2, p_3, p_4 \in E^3$. Будем говорить, что p_1, p_2, p_3, p_4 — аффинно зависимые точки, если существует плоскость π, удовлетворяющая условиям: π — плоскость в пространстве E^3, p_1, p_2, p_3, $p_4 \in \pi$.

Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 5$, $p_1, \ldots, p_r \in E^3$. Будем говорить, что $p_1, \ldots, p_r$ — аффинно зависимые точки.

Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $p_1, \ldots, p_r \in E^3$. Будем говорить, что $p_1, \ldots, p_r$ — аффинно независимые точки, если точки $p_1, \ldots, p_r$ не являются аффинно зависимыми.

Пусть l_1, l_2 — прямые в пространстве E^3. Будем писать $l_1 \parallel l_2$, если:

1. существует плоскость π, удовлетворяющая условиям: π — плоскость в пространстве E^3, l_1, $l_2 \subseteq \pi$;
2. либо $l_1 \cap l_2 = \varnothing$, либо $l_1 = l_2$.

Утверждение $l_1 \parallel l_2$ читается: «прямая l_1 параллельна прямой l_2».

Пусть A, B — аффинно независимые точки пространства E^3. Обозначим через $l_*(A, B)$ прямую, удовлетворяющую условиям: $l_*(A, B)$ — прямая в пространстве E^3, A, $B \in l_*(A, B)$.

Пусть A, B — аффинно независимые точки пространства E^3. Обозначим через $l_+(A,B)$ множество всех точек p, удовлетворяющих условиям: $p \in l_*(A,B)$ и либо $p = A$, либо точка p лежит между точками A, B, либо $p = B$, либо точка B лежит между точками A, p. Будем говорить, что $l_+(A,B)$ — луч, выходящий из точки A и проходящий через точку B.

Пусть π_1, π_2 — плоскости в пространстве E^3. Будем писать $\pi_1 \parallel \pi_2$, если либо $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$, либо $\pi_1 = \pi_2$. Утверждение $\pi_1 \parallel \pi_2$ читается: «плоскость π_1 параллельна плоскости π_2».

Пусть A, B, C — аффинно независимые точки пространства E^3. Обозначим через $\pi_*(A,B,C)$ плоскость, удовлетворяющую условиям: $\pi_*(A,B,C)$ — плоскость в пространстве E^3, A, B, $C \in \pi_*(A,B,C)$.

Пусть: O, I_1, I_2, I_3 — аффинно независимые точки пространства E^3. Пусть $A \in E^3$. Обозначим через π_1 плоскость, удовлетворяющую условиям: π_1 — плоскость в пространстве E^3, $A \in \pi_1$, $\pi_1 \parallel \pi_*(O,I_2,I_3)$. Обозначим через A_1 точку, удовлетворяющую условиям: $A_1 \in \pi_1$, $A_1 \in l_*(O,I_1)$. Пусть $A_1 \in l_+(O,I_1)$. Обозначим, $h^1(A) = \frac{\rho(O,A_1)}{\rho(O,I_1)}$. Пусть $A_1 \notin l_+(O,I_1)$. Обозначим, $h^1(A) = -\frac{\rho(O,A_1)}{\rho(O,I_1)}$. Обозначим через π_2 плоскость, удовлетворяющую условиям: π_2 — плоскость в пространстве E^3, $A \in \pi_2$, $\pi_2 \parallel \pi_*(O,I_1,I_3)$. Обозначим через A_2 точку, удовлетворяющую условиям: $A_2 \in \pi_2$, $A_2 \in l_*(O,I_2)$. Пусть $A_2 \in l_+(O,I_2)$. Обозначим, $h^2(A) = \frac{\rho(O,A_2)}{\rho(O,I_2)}$. Пусть $A_2 \notin l_+(O,I_2)$. Обозначим, $h^2(A) = -\frac{\rho(O,A_2)}{\rho(O,I_2)}$. Обозначим через π_3 плоскость, удовлетворяющую условиям: π_3 — плоскость в пространстве E^3, $A \in \pi_3$, $\pi_3 \parallel \pi_*(O,I_1,I_2)$. Обозначим через A_3 точку, удовлетворяющую условиям: $A_3 \in \pi_3$, $A_3 \in l_*(O,I_3)$. Пусть $A_3 \in l_+(O,I_3)$. Обозначим, $h^3(A) = \frac{\rho(O,A_3)}{\rho(O,I_3)}$. Пусть $A_3 \notin l_+(O,I_3)$. Обозначим, $h^3(A) = -\frac{\rho(O,A_3)}{\rho(O,I_3)}$. Очевидно: h — обратимая функция, $\mathrm{D}(h) = E^3$, $\mathrm{R}(h) = \mathbb{R}^3$. Будем говорить, что h — аффинная координатная карта (аффинная система координат) в пространстве E^3, соответствующая точкам O, I_1, I_2, I_3. Пусть $A \in E^3$. Будем говорить, что $h(A)$ — столбец координат точки A в координатной карте h. Очевидно: $h^m(O) = 0$ при $m = \overline{1,3}$; $h^m(I_k) = \delta^m_k$ при k, $m = \overline{1,3}$.

Пусть: p_1, p_2, $p_3 \in E^3$, p_1, p_2 — аффинно независимые точки, p_1, p_2, p_3 — аффинно зависимые точки. Очевидно, $p_3 \in l_*(p_1,p_2)$.

Пусть: p_1, p_2, p_3, $p_4 \in E^3$, p_1, p_2, p_3 — аффинно независимые точки, p_1, p_2, p_3, p_4 — аффинно зависимые точки. Очевидно, $p_4 \in \pi_*(p_1,p_2,p_3)$.

Пусть: O, I_1, I_2, I_3 — аффинно независимые точки пространства E^3, h — соответствующая аффинная координатная карта. Очевидно: $p \in l_*(O,I_1)$ тогда и только тогда, когда: $p \in E^3$, $h^2(p)$, $h^3(p) = 0$.

Пусть: O, I_1, I_2, I_3 — аффинно независимые точки пространства E^3, h — соответствующая аффинная координатная карта. Очевидно: $p \in \pi_*(O,I_1,I_2)$ тогда и только тогда, когда: $p \in E^3$, $h^3(p) = 0$.

Утверждение (непосредственно следует из определения аффинно зависимых точек)**.** *Пусть:* $N = \overline{1,3}$*;* $r \in \mathbb{Z}$*,* $r \geqslant 2$*,* $p_1, \ldots, p_r \in E^N$*,* $\sigma \in S_r$*,* $p_{\sigma(1)}, \ldots, p_{\sigma(r)}$ *— аффинно зависимые точки. Тогда* $p_1, \ldots, p_r$ *— аффинно зависимые точки.*

Утверждение (нетрудно доказать, используя определение аффинно зависимых точек и средства элементарной геометрии)**.** *Пусть:* $N = \overline{1,3}$*;* $r \in \mathbb{Z}$*,* $r \geqslant 2$*,* $p_1, \ldots, p_r \in E^N$*,* $r_0 \in \mathbb{Z}$*,* $r_0 \geqslant 2$*,* $k_1, \ldots, k_{r_0} = \overline{1,r}$*,* $k_1 < \cdots < k_{r_0}$*,* $p_{k_1}, \ldots, p_{k_{r_0}}$ *— аффинно зависимые точки. Тогда* $p_1, \ldots, p_r$ *— аффинно зависимые точки.*

Утверждение (нетрудно доказать, используя определение аффинно зависимых точек и средства элементарной геометрии)**.** *Пусть:* $N = \overline{1,3}$*;* $r = \overline{2,N}$*,* $p_1, \ldots, p_r \in E^N$*,* $p_1, \ldots, p_r$ *—*

аффинно независимые точки. Существуют точки $p_{r+1}, \ldots, p_{N+1}$, удовлетворяющие условиям: $p_{r+1}, \ldots, p_{N+1} \in E^N$, $p_1, \ldots, p_{N+1}$ — аффинно независимые точки.

Определение (эквивалентность упорядоченных пар точек). Пусть: $N = \overline{1,3}$; u_1, $u_2 \in (E^N)^2$. Пусть: $A_1 = u_1^1$, $B_1 = u_1^2$, $A_2 = u_2^1$, $B_2 = u_2^2$, C_1 — середина отрезка $[A_1, B_2]$, C_2 — середина отрезка $[A_2, B_1]$. Будем писать $u_1 \approx u_2$, если $C_1 = C_2$. Утверждение $u_1 \approx u_2$ читается: «упорядоченная пара точек u_1 эквивалентна упорядоченной паре точек u_2».

Утверждение (нетрудно доказать, используя определение эквивалентности упорядоченных пар точек и средства элементарной геометрии)**.** *Пусть $N = \overline{1,3}$.*

1. Пусть: A_1, B_1, A_2, $B_2 \in E^N$, $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$. Тогда $\rho(A_1, B_1) = \rho(A_2, B_2)$.

2. Пусть: A_1, B_1, A_2, $B_2 \in E^N$, $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$, $A_1 \neq B_1$. Тогда: $A_2 \neq B_2$, $l_*(A_1, B_1) \parallel l_*(A_2, B_2)$.

Утверждение (выражение для координат середины отрезка; нетрудно доказать, используя определение аффинной координатной карты и теорему Фалеса)**.** *Пусть: $N = \overline{1,3}$; O, $I_1, \ldots, I_N$ — аффинно независимые точки пространства E^N, h — соответствующая аффинная координатная карта; A, $B \in E^N$, C — середина отрезка $[A, B]$. Тогда $h(C) = \frac{1}{2}\big(h(A) + h(B)\big)$.*

Утверждение (критерий эквивалентности упорядоченных пар точек)**.** *Пусть: $N = \overline{1,3}$; O, $I_1, \ldots, I_N$ — аффинно независимые точки пространства E^N, h — соответствующая аффинная координатная карта; A_1, B_1, A_2, $B_2 \in E^N$. Утверждение $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$ справедливо тогда и только тогда, когда $h(B_1) - h(A_1) = h(B_2) - h(A_2)$.*

Доказательство. Пусть $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$. Тогда:

$$\begin{gathered} C_1 = C_2, \\ h(C_1) = h(C_2), \\ \frac{1}{2}\big(h(A_1) + h(B_2)\big) = \frac{1}{2}\big(h(A_2) + h(B_1)\big), \\ h(B_1) - h(A_1) = h(B_2) - h(A_2). \end{gathered}$$

Пусть $h(B_1) - h(A_1) = h(B_2) - h(A_2)$. Тогда:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\big(h(A_1) + h(B_2)\big) = \frac{1}{2}\big(h(A_2) + h(B_1)\big), \\ h(C_1) = h(C_2), \\ C_1 = C_2, \\ (A_1, B_1) \approx (A_2, B_2). \quad \square \end{gathered}$$

Утверждение. *Пусть $N = \overline{1,3}$.*

1. Пусть $u \in (E^N)^2$. Тогда $u \approx u$.

2. Пусть: u_1, $u_2 \in (E^N)^2$, $u_1 \approx u_2$. Тогда $u_2 \approx u_1$.

3. Пусть: u_1, u_2, $u_3 \in (E^N)^2$, $u_1 \approx u_2$, $u_2 \approx u_3$. Тогда $u_1 \approx u_3$.

Доказательство.

1. Утверждение непосредственно следует из определения эквивалентности упорядоченных пар точек.

2. Утверждение непосредственно следует из определения эквивалентности упорядоченных пар точек.

3. Обозначим: $A_1 = u_1^1$, $B_1 = u_1^2$, $A_2 = u_2^1$, $B_2 = u_2^2$, $A_3 = u_3^1$, $B_3 = u_3^2$. Так как: $u_1 \approx u_2$, $u_2 \approx u_3$, то: $h(B_1) - h(A_1) = h(B_2) - h(A_2)$, $h(B_2) - h(A_2) = h(B_3) - h(A_3)$. Тогда $h(B_1) - h(A_1) = h(B_3) - h(A_3)$. Следовательно, $u_1 \approx u_3$. □

Определение (вектор пространства E^N). Пусть $N = \overline{1,3}$.

Пусть A, $B \in E^N$. Обозначим:

$$\overrightarrow{AB} = \big\{u\colon u \in (E^N)^2 \wedge u \approx (A,B)\big\}.$$

Будем говорить, что x — вектор пространства E^N, если существуют точки A, B, удовлетворяющие условиям: A, $B \in E^N$, $x = \overrightarrow{AB}$.

Обозначим через $\vec{E}^N$ множество всех векторов пространства E^N.

Пусть A, $B \in E^N$. Очевидно, $\overrightarrow{AB} \in \vec{E}^N$. Будем говорить, что $\{\overrightarrow{AB}\}_{A,B\in E^N}$ — стандартная операция векторизации на множестве E^N.

Утверждение (первый критерий равенства векторов). *Пусть:* $N = \overline{1,3}$*;* A_1, B_1, A_2, $B_2 \in E^N$. *Утверждение* $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$ *справедливо тогда и только тогда, когда* $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$.

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$. Так как: $(A_1, B_1) \in (E^N)^2$, $(A_1, B_1) \approx (A_1, B_1)$, то $(A_1, B_1) \in \overrightarrow{A_1B_1}$. Так как $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$, то $(A_1, B_1) \in \overrightarrow{A_2B_2}$. Тогда $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$.

Пусть $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$. Тогда $(A_2, B_2) \approx (A_1, B_1)$.

Пусть $u \in \overrightarrow{A_1B_1}$. Тогда: $u \in (E^N)^2$, $u \approx (A_1, B_1)$. Так как $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$, то: $u \in (E^N)^2$, $u \approx (A_2, B_2)$. Тогда $u \in \overrightarrow{A_2B_2}$.

Пусть $u \in \overrightarrow{A_2B_2}$. Тогда: $u \in (E^N)^2$, $u \approx (A_2, B_2)$. Так как $(A_2, B_2) \approx (A_1, B_1)$, то: $u \in (E^N)^2$, $u \approx (A_1, B_1)$. Тогда $u \in \overrightarrow{A_1B_1}$. Итак, $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$. □

Определение (координаты вектора). Пусть: $N = \overline{1,3}$; O, $I_1, \ldots, I_N$ — аффинно независимые точки пространства E^N, h — соответствующая аффинная координатная карта; $x \in \vec{E}^N$. Пусть: A, $B \in E^N$, $x = \overrightarrow{AB}$. Обозначим, $[x](h) = h(B) - h(A)$. Будем говорить, что $[x](h)$ — столбец координат вектора x в координатной карте h. **Корректность определения координат вектора непосредственно следует из: определения вектора; первого критерия равенства векторов, критерия эквивалентности упорядоченных пар точек.**

Утверждение (второй критерий равенства векторов). *Пусть:* $N = \overline{1,3}$*;* O, $I_1, \ldots, I_N$ *— аффинно независимые точки пространства* E^N, h *— соответствующая аффинная координатная карта;* x, $y \in \vec{E}^N$. *Утверждение* $x = y$ *справедливо тогда и только тогда, когда* $[x](h) = [y](h)$.

Доказательство. Пусть $x = y$. Тогда $[x](h) = [y](h)$.

Пусть $[x](h) = [y](h)$. Выберем точки A_1, B_1, A_2, B_2, удовлетворяющие условиям: A_1, B_1, A_2, $B_2 \in E^N$, $x = \overrightarrow{A_1B_1}$, $y = \overrightarrow{A_2B_2}$. Тогда $h(B_1) - h(A_1) = h(B_2) - h(A_2)$. Следовательно $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$. Тогда $x = y$. □

Определение. Пусть: $N = \overline{1,3}$; $\lambda \in \mathbb{R}$, A, $B \in E^N$. Пусть $A = B$. Обозначим, $P_*(\lambda, A, B) = A$. Пусть: $A \neq B$, $\lambda \geqslant 0$. Обозначим через $P_*(\lambda, A, B)$ точку, удовлетворяющую условиям: $P_*(\lambda, A, B) \in l_+(A, B)$, $\rho\bigl(A, P_*(\lambda, A, B)\bigr) = \lambda\rho(A, B)$. Пусть: $A \neq B$, $\lambda < 0$. Обозначим через $P_*(\lambda, A, B)$ точку, удовлетворяющую условиям: $P_*(\lambda, A, B) \in l_*(A, B)$, $P_*(\lambda, A, B) \notin l_+(A, B)$, $\rho\bigl(A, P_*(\lambda, A, B)\bigr) = (-\lambda)\rho(A, B)$.

Утверждение 2.1. *Пусть: $N = \overline{1,3}$; O, $I_1, \ldots, I_N$ — аффинно независимые точки пространства E^N, h — соответствующая аффинная координатная карта.*

1. Справедливо утверждение $\forall A \in E^N \forall x \in \vec{E}^N \exists! B \in E^N (\overrightarrow{AB} = x)$.

2. Пусть: A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, $C_2 \in E^N$, $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$, $(B_1, C_1) \approx (B_2, C_2)$. Тогда $(A_1, C_1) \approx (A_2, C_2)$.

3. Пусть: $\lambda \in \mathbb{R}$, A, $B \in E^N$. Тогда $h\bigl(P_*(\lambda, A, B)\bigr) - h(A) = \lambda\bigl(h(B) - h(A)\bigr)$.

4. Пусть: $\lambda \in \mathbb{R}$, A_1, B_1, A_2, $B_2 \in E^N$, $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$. Тогда $\bigl(A_1, P_*(\lambda, A_1, B_1)\bigr) \approx \bigl(A_2, P_*(\lambda, A_2, B_2)\bigr)$.

5. Пусть A_1, $A_2 \in E^N$. Тогда $(A_1, A_1) \approx (A_2, A_2)$.

Доказательство.

1. Пусть: $A \in E^N$, $x \in \vec{E}^N$.

Пусть: $B \in E^N$, $\overrightarrow{AB} = x$. Тогда:

$$
\begin{gathered}
[\overrightarrow{AB}](h) = [x](h), \\
h(B) - h(A) = [x](h), \\
h(B) = h(A) + [x](h), \\
B = h^{-1}\bigl(h(A) + [x](h)\bigr).
\end{gathered}
$$

Пусть: $B_1 \in E^N$, $\overrightarrow{AB_1} = x$, $B_2 \in E^N$, $\overrightarrow{AB_2} = x$. Тогда: $B_1 = h^{-1}\bigl(h(A) + [x](h)\bigr)$, $B_2 = h^{-1}\bigl(h(A) + [x](h)\bigr)$. Следовательно, $B_1 = B_2$.

Пусть $B = h^{-1}\bigl(h(A) + [x](h)\bigr)$. Тогда: $B \in E^N$,

$$
[\overrightarrow{AB}](h) = h(B) - h(A) = h\Bigl(h^{-1}\bigl(h(A) + [x](h)\bigr)\Bigr) - h(A) = \bigl(h(A) + [x](h)\bigr) - h(A) = [x](h).
$$

Согласно второму критерию равенства векторов: $B \in E^N$, $\overrightarrow{AB} = x$.

2. Так как: $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$, $(B_1, C_1) \approx (B_2, C_2)$, то: $h(B_1) - h(A_1) = h(B_2) - h(A_2)$, $h(C_1) - h(B_1) = h(C_2) - h(B_2)$. Тогда:

$$
\begin{aligned}
h(C_1) - h(A_1) &= \bigl(h(C_1) - h(B_1)\bigr) + \bigl(h(B_1) - h(A_1)\bigr) = \\
&= \bigl(h(C_2) - h(B_2)\bigr) + \bigl(h(B_2) - h(A_2)\bigr) = h(C_2) - h(A_2).
\end{aligned}
$$

Следовательно, $(A_1, C_1) \approx (A_2, C_2)$.

3. Утверждение нетрудно доказать, используя определение аффинной координатной карты и теорему Фалеса.

4. Так как $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$, то $h(B_1) - h(A_1) = h(B_2) - h(A_2)$. Тогда:

$$
\begin{gathered}
h\bigl(P_*(\lambda, A_1, B_1)\bigr) - h(A_1) = \lambda\bigl(h(B_1) - h(A_1)\bigr) = \lambda\bigl(h(B_2) - h(A_2)\bigr) = \\
= h\bigl(P_*(\lambda, A_2, B_2)\bigr) - h(A_2).
\end{gathered}
$$

Следовательно, $\bigl(A_1, P_*(\lambda, A_1, B_1)\bigr) \approx \bigl(A_2, P_*(\lambda, A_2, B_2)\bigr)$.

5. Утверждение непосредственно следует из определения эквивалентности упорядоченных пар точек. $\square$

Утверждение (нетрудно доказать, используя второй пункт утверждения (2.1) и средства элементарной геометрии)**.** *Пусть* $N = \overline{1,3}$.

1. Пусть: A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, $C_2 \in E^N$, $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$, $(A_1, C_1) \approx (A_2, C_2)$. *Тогда* $\triangle B_1A_1C_1 \cong \triangle B_2A_2C_2$.

2. Пусть: A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, $C_2 \in E^N$, $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$, $(A_1, C_1) \approx (A_2, C_2)$, $A_1 \neq B_1$, $A_1 \neq C_1$. *Тогда:* $A_2 \neq B_2$, $A_2 \neq C_2$, $\widehat{B_1A_1C_1} = \widehat{B_2A_2C_2}$.

Определение. Пусть $N = \overline{1,3}$.

Пусть x, $y \in \vec{E}^N$. Пусть: A, B, $C \in E^N$, $x = \overrightarrow{AB}$, $y = \overrightarrow{BC}$. Обозначим, $x + y = \overrightarrow{AC}$. Очевидно, $x+y \in \vec{E}^N$. Будем говорить, что $\{x+y\}_{x,y\in\vec{E}^N}$ — стандартная операция сложения на множестве $\vec{E}^N$. **Корректность определения стандартной операции сложения на множестве $\vec{E}^N$ непосредственно следует из: определения вектора, первого пункта утверждения 2.1; первого критерия равенства векторов, второго пункта утверждения 2.1.**

Пусть: $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \vec{E}^N$. Пусть: A, $B \in E^N$, $x = \overrightarrow{AB}$. Обозначим, $\lambda x = \overrightarrow{AP_*(\lambda, A, B)}$. Очевидно, $\lambda x \in \vec{E}^N$. Будем говорить, что $\{\lambda x\}_{\lambda\in\mathbb{R},\, x\in\vec{E}^N}$ — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\vec{E}^N$. **Корректность определения стандартной внешней операции умножения на множестве $\vec{E}^N$ непосредственно следует из: определения вектора; первого критерия равенства векторов, четвёртого пункта утверждения 2.1.**

Пусть $A \in E^N$. Обозначим, $\theta = \overrightarrow{AA}$. Очевидно, $\theta \in \vec{E}^N$. Будем говорить, что θ — стандартный нулевой элемент множества $\vec{E}^N$. **Корректность определения стандартного нулевого элемента множества $\vec{E}^N$ непосредственно следует из: утверждения $E^N \neq \varnothing$; пятого пункта утверждения 2.1, первого критерия равенства векторов.**

Утверждение. *Пусть:* $N = \overline{1,3}$*;* O, $I_1, \dots, I_N$ *— аффинно независимые точки пространства* E^N, h *— соответствующая аффинная координатная карта.*

1. Пусть x, $y \in \vec{E}^N$. *Тогда* $[x + y](h) = [x](h) + [y](h)$.

2. Пусть: $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \vec{E}^N$. *Тогда* $[\lambda x](h) = \lambda[x](h)$.

3. Справедливо утверждение $[\theta](h) = \tilde{\theta}$.

Доказательство.

1. Выберем точки A, B, C, удовлетворяющие условиям: A, B, $C \in E^N$, $x = \overrightarrow{AB}$, $y = \overrightarrow{BC}$. Тогда:

$$[x + y](h) = [\overrightarrow{AC}](h) = h(C) - h(A) = \big(h(B) - h(A)\big) + \big(h(C) - h(B)\big) = [x](h) + [y](h).$$

2. Выберем точки, удовлетворяющие условиям: A, $B \in E^N$, $x = \overrightarrow{AB}$. Тогда:

$$[\lambda x](h) = \big[\overrightarrow{AP_*(\lambda, A, B)}\big](h) = h\big(P_*(\lambda, A, B)\big) - h(A) = \lambda\big(h(B) - h(A)\big) = \lambda[x](h).$$

3. Выберем точку A, удовлетворяющую условию $A \in E^N$. Тогда:

$$[\theta](h) = [\overrightarrow{AA}](h) = h(A) - h(A) = \tilde{\theta}. \quad \square$$

Утверждение. *Пусть* $N = \overline{1,3}$.

1. Пусть $x,\ y \in \vec{E}^N$. Тогда $x + y = y + x$.
2. Пусть $x,\ y,\ z \in \vec{E}^N$. Тогда $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. Пусть $x \in \vec{E}^N$. Тогда $x + \theta = x$.
4. Пусть $x \in \vec{E}^N$. Тогда $x + (-1)x = \theta$.
5. Пусть: $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, $x \in \vec{E}^N$. Тогда $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.
6. Пусть $x \in \vec{E}^N$. Тогда $1x = x$.
7. Пусть: $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, $x \in \vec{E}^N$. Тогда $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
8. Пусть: $\lambda \in \mathbb{R}$, $x,\ y \in \vec{E}^N$. Тогда $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.
9. Пусть $x \in \vec{E}^N$. Тогда $0x = \theta$.
10. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $\lambda\theta = \theta$.
11. Пусть $a,\ b \in \vec{E}^N$. Существует единственный вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in \vec{E}^N$, $a + x = b$.

Доказательство. Пусть: $O,\ I_1, \ldots, I_N$ — аффинно независимые точки пространства E^N, h — соответствующая аффинная координатная карта.

1. Очевидно:

$$[x + y](h) = [x](h) + [y](h) = [y](h) + [x](h) = [y + x](h).$$

Согласно второму критерию равенства векторов, $x + y = y + x$.

2. Очевидно:

$$\big[(x + y) + z\big](h) = \big([x](h) + [y](h)\big) + [z](h) = [x](h) + \big([x](h) + [y](h)\big) = \big[x + (y + z)\big](h).$$

Согласно второму критерию равенства векторов, $(x + y) + z = x + (y + z)$.

3. Очевидно:

$$[x + \theta](h) = [x](h) + \tilde{\theta} = [x](h).$$

Согласно второму критерию равенства векторов, $x + \theta = x$.

4. Очевидно:

$$\big[x + (-1)x\big](h) = [x](h) + (-1)[x](h) = \tilde{\theta} = [\theta](h).$$

Согласно второму критерию равенства векторов, $x + (-1)x = \theta$.

5. Очевидно:

$$\big[(\alpha\beta)x\big](h) = (\alpha\beta)[x](h) = \alpha\big(\beta[x](h)\big) = \big[\alpha(\beta x)\big](h).$$

Согласно второму критерию равенства векторов, $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

6. Очевидно:

$$[1x](h) = 1[x](h) = [x](h).$$

Согласно второму критерию равенства векторов, $1x = x$.

7. Очевидно:

$$\big[(\alpha + \beta)x\big](h) = (\alpha + \beta)[x](h) = \alpha[x](h) + \beta[x](h) = [\alpha x + \beta x](h).$$

Согласно второму критерию равенства векторов, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

8. Очевидно:

$$\big[\lambda(x+y)\big](h) = \lambda\big([x](h)+[y](h)\big) = \lambda[x](h)+\lambda[y](h) = [\lambda x+\lambda y](h).$$

Согласно второму критерию равенства векторов, $\lambda(x+y) = \lambda x+\lambda y$.

9. Очевидно:

$$[0x](h) = 0[x](h) = \tilde{\theta} = [\theta](h).$$

Согласно второму критерию равенства векторов, $0x = \theta$.

10. Очевидно:

$$[\lambda\theta](h) = \lambda[\theta](h) = \lambda\tilde{\theta} = \tilde{\theta} = [\theta](h).$$

Согласно второму критерию равенства векторов, $\lambda\theta = \theta$.

11. Пусть: $x \in \vec{E}^N$, $a+x = b$. Тогда:

$$\begin{gathered}(-1)a+(a+x) = (-1)a+b,\\ \big((-1)a+a\big)+x = (-1)a+b,\\ \big(a+(-1)a\big)+x = (-1)a+b,\\ \theta+x = (-1)a+b,\\ x+\theta = (-1)a+b,\\ x = (-1)a+b.\end{gathered}$$

Пусть: $x_1 \in \vec{E}^N$, $a+x_1 = b$, $x_2 \in \vec{E}^N$, $a+x_2 = b$. Тогда: $x_1 = (-1)a+b$, $x_2 = (-1)a+b$. Следовательно, $x_1 = x_2$.

Обозначим, $x = (-1)a+b$. Тогда: $x \in \vec{E}^N$, $a+x = a+\big((-1)a+b\big) = \big(a+(-1)a\big)+b = \theta+b = b+\theta = b$. □

Определение. Пусть $N = \overline{1,3}$.

Пусть $x \in \vec{E}^N$. Обозначим, $-x = (-1)x$. Очевидно: $-x \in \vec{E}^N$, $x+(-x) = \theta$. Будем говорить, что $-x$ — противоположный вектор к вектору x.

Пусть x, $y \in \vec{E}^N$. Обозначим, $y-x = (-1)x+y$. Очевидно: $y-x \in \vec{E}^N$, $x+(y-x) = y$. Будем говорить, что $y-x$ — разность векторов y, x.

Утверждение. *Пусть $N = \overline{1,3}$.*

1. *Справедливо утверждение $E^N \neq \varnothing$.*
2. *Пусть A, B, $C \in E^N$. Тогда $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.*
3. *Справедливо утверждение $\forall A \in E^N \forall x \in \vec{E}^N \exists! B \in E^N (\overrightarrow{AB} = x)$.*
4. *Пусть $A \in E^N$. Тогда $\overrightarrow{AA} = \theta$.*
5. *Пусть: A, $B \in E^N$, $\overrightarrow{AB} = \theta$. Тогда $A = B$.*
6. *Пусть A, $B \in E^N$. Тогда $(-1)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.*

Доказательство.

1. Утверждение обсуждалось выше.
2. Утверждение непосредственно следует из определения суммы векторов.
3. Утверждение обсуждалось выше.
4. Утверждение непосредственно следует из определения нулевого вектора.
5. Очевидно, $\overrightarrow{AA} = \theta$. По условию, $\overrightarrow{AB} = \theta$. Тогда $A = B$.
6. Очевидно, $\overrightarrow{AB}+(-1)\overrightarrow{AB} = \theta$. С другой стороны: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \theta$. Тогда $(-1)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. □

2.4. Линейная комбинация векторов, линейная зависимость векторов

Определение (линейная комбинация векторов). Пусть: $N = \overline{1,3}$; $r \in \mathbb{N}$, $\lambda^1, \dots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $x_1, \dots, x_r \in \vec{E}^N$.

Будем говорить, что $\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda^k x_k$ — линейная комбинация векторов $x_1, \dots, x_r$ с коэффициентами $\lambda^1, \dots, \lambda^r$.

Далее часто будем писать $\lambda^k x_k$ вместо $\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda^k x_k$ (частный случай *правила суммирования Эйнштейна*).

Определение (линейная оболочка векторов, линейная зависимость векторов, линейная независимость векторов). Пусть: $N = \overline{1,3}$; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_r \in \vec{E}^N$.

Обозначим:

$$L(x_1, \dots, x_r) = \{\lambda^k x_k \colon \lambda^1 \in \mathbb{R} \wedge \dots \wedge \lambda^r \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \big\{u \colon \exists \lambda^1 \cdots \exists \lambda^r (\lambda^1 \in \mathbb{R} \wedge \dots \wedge \lambda^r \in \mathbb{R} \wedge u = \lambda^k x_k)\big\}.$$

Очевидно, $L(x_1, \dots, x_r) \subseteq \vec{E}^N$. Будем говорить, что $L(x_1, \dots, x_r)$ — линейная оболочка векторов $x_1, \dots, x_r$. Пусть $k = \overline{1,r}$. Тогда: $x_k = \delta_k^m x_m \in L(x_1, \dots, x_r)$.

Будем говорить, что по любой линейной комбинации векторов $x_1, \dots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты, если для любых чисел $\alpha^1, \dots, \alpha^r$, $\beta^1, \dots, \beta^r$, удовлетворяющих условиям: $\alpha^1, \dots, \alpha^r$, $\beta^1, \dots, \beta^r \in \mathbb{R}$, $\alpha^k x_k = \beta^k x_k$, справедливо утверждение $\forall k = \overline{1,r} (\alpha^k = \beta^k)$.

Будем говорить, что $x_1, \dots, x_r$ — линейно зависимые векторы, если существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^r$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1, \dots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $\lambda^k x_k = \theta$, $\exists k = \overline{1,r} (\lambda^k \neq 0)$.

Будем говорить, что $x_1, \dots, x_r$ — линейно независимые векторы, если для любых чисел $\lambda^1, \dots, \lambda^r$, удовлетворяющих условиям: $\lambda^1, \dots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $\lambda^k x_k = \theta$, справедливо утверждение $\forall k = \overline{1,r} (\lambda^k = 0)$.

Утверждение (критерий линейной зависимости векторов)**.** *Пусть $N = \overline{1,3}$.*

1. Пусть $x \in \vec{E}^N$. Вектор x является линейно зависимым тогда и только тогда, когда $x = \theta$.

2. Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $x_1, \dots, x_r \in \vec{E}^N$. Векторы $x_1, \dots, x_r$ являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда существует номер $k_0 = \overline{1,r}$, удовлетворяющий условию $x_{k_0} \in L(x_1, \dots, x_{k_0-1}, x_{k_0+1}, \dots, x_r)$.

Доказательство.

1. Пусть x — линейно зависимый вектор. Тогда существует число $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям: $\lambda x = \theta$, $\lambda \neq 0$. Следовательно, $x = \theta$.

Пусть $x = \theta$. Тогда $1x = \theta$. Так как $1 \neq 0$, то x — линейно зависимый вектор.

2. Пусть $x_1, \dots, x_r$ — линейно зависимые векторы. Тогда существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^N \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^k x_k = \theta$, $\exists k = \overline{1,r} (\lambda^k \neq 0)$. Выберем номер $k_0 = \overline{1,r}$, удовлетворяющий условию $\lambda^{k_0} \neq 0$. Тогда:

$$\lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^{k_0-1} x_{k_0-1} + \lambda^{k_0} x_{k_0} + \lambda^{k_0+1} x_{k_0+1} + \dots + \lambda^r x_r = \theta,$$
$$x_{k_0} = \frac{-\lambda^1}{\lambda_{k_0}} x_1 + \dots + \frac{-\lambda^{k_0-1}}{\lambda_{k_0}} x_{k_0-1} + \frac{-\lambda^{k_0+1}}{\lambda_{k_0}} x_{k_0+1} + \dots + \frac{-\lambda^r}{\lambda_{k_0}} x_r,$$

$$x_{k_0} \in L(x_1, \ldots, x_{k_0-1}, x_{k_0+1}, \ldots, x_r).$$

Пусть существует номер $k_0 = \overline{1, r}$, удовлетворяющий условию $x_{k_0} \in L(x_1, \ldots, x_{k_0-1}, x_{k_0+1}, \ldots, x_r)$. Тогда существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^{k_0-1}$, $\lambda^{k_0+1}, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию:

$$x_{k_0} = \lambda^1 x_1 + \cdots + \lambda^{k_0-1} x_{k_0-1} + \lambda^{k_0+1} x_{k_0+1} + \cdots + \lambda^r x_r.$$

Следовательно:

$$(-\lambda^1)x_1 + \cdots + (-\lambda^{k_0-1})x_{k_0-1} + 1x_{k_0} + (-\lambda_{k_0+1})x_{k_0+1} + \cdots + (-\lambda^r)x_r = \theta.$$

Так как $1 \neq 0$, то $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы. □

Утверждение (критерий линейной независимости векторов)**.** *Пусть:* $N = \overline{1, 3}$*;* $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in \vec{E}^N$*. Векторы* $x_1, \ldots, x_r$ *являются линейно независимыми тогда и только тогда, когда по любой линейной комбинации векторов* $x_1, \ldots, x_r$ *однозначно восстанавливаются её коэффициенты.*

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы. Пусть: $\alpha^1, \ldots, \alpha^r$, $\beta^1, \ldots, \beta^r \in \mathbb{R}$, $\alpha^k x_k = \beta^k x_k$. Тогда $(\alpha^k - \beta^k)x_k = \theta$. Так как $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы, то $\forall k = \overline{1, r}(\alpha^k - \beta^k = 0)$. Тогда $\forall k = \overline{1, r}(\alpha^k = \beta^k)$. Следовательно, по любой линейной комбинации векторов $x_1, \ldots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты.

Пусть по любой линейной комбинации векторов $x_1, \ldots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты. Пусть: $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $\lambda^k x_k = \theta$. Тогда:

$$\lambda^1 x_1 + \cdots + \lambda^r x_r = 0x_1 + \cdots + 0x_r.$$

Так как по любой линейной комбинации векторов $x_1, \ldots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты, то $\forall k = \overline{1, r}(\lambda^k = 0)$. Тогда $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы. □

Утверждение. *Пусть:* $N = \overline{1, 3}$*;* $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r, x \in \vec{E}^N$, $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно независимые векторы,* $x_1, \ldots, x_r, x$ *— линейно зависимые векторы. Тогда* $x \in L(x_1, \ldots, x_r)$.

Доказательство. Так как $x_1, \ldots, x_r, x$ — линейно зависимые векторы, то существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^{r+1} \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1 x_1 + \cdots + \lambda^r x_r + \lambda^{r+1} x = \theta$, $\exists k = \overline{1, r+1}(\lambda^k \neq 0)$. Предположим, что $\lambda^{r+1} = 0$. Тогда: $\lambda^1 x_1 + \cdots + \lambda^r x_r = \theta$, $\exists k = \overline{1, r}(\lambda^k \neq 0)$ (что противоречит утверждению: $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы). Итак, $\lambda^{r+1} \neq 0$. Тогда:

$$x = \frac{-\lambda^1}{\lambda^{r+1}} x_1 + \cdots + \frac{-\lambda^r}{\lambda^{r+1}} x_r,$$
$$x \in L(x_1, \ldots, x_r). \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* $N = \overline{1, 3}$*;* $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in \vec{E}^N$, $\sigma \in S_r$, $x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)}$ *— линейно зависимые векторы. Тогда* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно зависимые векторы.*

Доказательство. Так как $x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)}$ — линейно зависимые векторы, то существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1 x_{\sigma(1)} + \dots + \lambda^r x_{\sigma(r)} = \theta$, $\exists m = \overline{1, r}(\lambda^m \neq 0)$. Тогда:

$$\lambda^{\sigma^{-1}(1)} x_1 + \dots + \lambda^{\sigma^{-1}(r)} x_r = \theta, \quad \exists k = \overline{1, r}(\lambda^{\sigma^{-1}(k)} \neq 0).$$

Следовательно, $x_1, \dots, x_r$ — линейно зависимые векторы. □

Утверждение. *Пусть: $N = \overline{1, 3}$; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_r \in \vec{E}^N$, $r_0 \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_{r_0} = \overline{1, r}$, $k_1 < \dots < k_{r_0}$, $x_{k_1}, \dots, x_{k_{r_0}}$ — линейно зависимые векторы. Тогда $x_1, \dots, x_r$ — линейно зависимые векторы.*

Доказательство. Так как $x_{k_1}, \dots, x_{k_{r_0}}$ — линейно зависимые векторы, то существуют числа $\alpha^1, \dots, \alpha^{r_0} \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\alpha^1 x_{k_1} + \dots + \alpha^{r_0} x_{k_{r_0}} = \theta$, $\exists m = \overline{1, r_0}(\alpha^m \neq 0)$. Обозначим: $\beta^{k_1} = \alpha^1, \dots, \beta^{k_{r_0}} = \alpha^{r_0}$, $\beta^k = 0$ при: $k = \overline{1, r}$, $k \notin \{k_1, \dots, k_{r_0}\}$. Тогда:

$$\beta^{k_1} x_{k_1} + \dots + \beta^{k_{r_0}} x_{k_{r_0}} = \theta, \quad \exists m = \overline{1, r_0}(\beta^{k_m} \neq 0);$$
$$\beta^1 x_1 + \dots + \beta^r x_r = \theta, \quad \exists k = \overline{1, r}(\beta^k \neq 0).$$

Следовательно, $x_1, \dots, x_r$ — линейно зависимые векторы. □

Утверждение. *Пусть: $N = \overline{1, 3}$; O, $I_1, \dots, I_N$ — аффинно независимые точки пространства E^N, h — соответствующая аффинная координатная карта; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_r \in \vec{E}^N$. Векторы $x_1, \dots, x_r$ являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда столбцы $[x_1](h), \dots, [x_r](h)$ являются линейно зависимыми.*

Доказательство. Пусть $x_1, \dots, x_r$ — линейно зависимые векторы. Тогда существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^k x_k = \theta$, $\exists k = \overline{1, r}(\lambda^k \neq 0)$. Следовательно:

$$\lambda^k [x_k](h) = [\lambda^k x_k](h) = [\theta](h) = \tilde{\theta}.$$

Так как $\exists k = \overline{1, r}(\lambda^k \neq 0)$, то $[x_1](h), \dots, [x_r](h)$ — линейно зависимые столбцы.

Пусть $[x_1](h), \dots, [x_r](h)$ — линейно зависимые столбцы. Тогда существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^k [x_k](h) = \tilde{\theta}$, $\exists k = \overline{1, r}(\lambda^k \neq 0)$. Следовательно:

$$[\lambda^k x_k](h) = \lambda^k [x_k](h) = \tilde{\theta} = [\theta](h).$$

Согласно второму критерию равенства векторов, $\lambda^k x_k = \theta$. Так как $\exists k = \overline{1, r}(\lambda^k \neq 0)$, то $x_1, \dots, x_r$ — линейно зависимые векторы. □

Утверждение. *Пусть: $N = \overline{1, 3}$; O, $I_1, \dots, I_N$ — аффинно независимые точки пространства E^N, h — соответствующая аффинная координатная карта, $e_k = \overrightarrow{OI_k}$ при $k = \overline{1, N}$.*

1. *Справедливо утверждение: $[e_k]^m(h) = \delta^m_k$ при k, $m = \overline{1, N}$.*
2. *Пусть $\lambda^1, \dots, \lambda^N \in \mathbb{R}$. Тогда: $[\lambda^k e_k]^m(h) = \lambda^m$ при $m = \overline{1, N}$.*
3. *Пусть $x \in \vec{E}^N$. Тогда $x = [x]^k(h) e_k$.*

Доказательство.

1. Пусть k, $m = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[e_k]^m(h) = [\overrightarrow{OI_k}]^m(h) = \big(h(I_k) - h(O)\big)^m = h^m(I_k) - h^m(O) = \delta^m_k - 0 = \delta^m_k.$$

2. Пусть $m = \overline{1,N}$. Тогда:

$$[\lambda^k e_k]^m(h) = \lambda^k [e_k]^m(h) = \lambda^k \delta_k^m = \lambda^m.$$

3. Очевидно: $\big[[x]^k(h)e_k\big]^m(h) = [x]^m(h)$ при $m = \overline{1,N}$. Тогда $\big[[x]^k(h)e_k\big](h) = [x](h)$. Согласно второму критерию равенства векторов, $[x]^k(h)e_k = x$. □

Утверждение. *Пусть: $N = \overline{1,3}$; O, $I_1, \dots, I_N$ — аффинно независимые точки пространства E^N, $e_k = \overrightarrow{OI_k}$ при $k = \overline{1,N}$.*

1. Справедливо утверждение: $e_1, \dots, e_N$ — линейно независимые векторы.

2. Пусть $x \in \vec{E}^N$. Тогда $x \in L(e_1, \dots, e_N)$.

Доказательство. Пусть h — аффинная координатная карта в пространстве E^N, соответствующая точкам O, $I_1, \dots, I_N$.

1. Очевидно, по любой линейной комбинации векторов $e_1, \dots, e_N$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты. Тогда $e_1, \dots, e_N$ — линейно независимые векторы.

2. Так как $x = [x]^k(h)e_k$, то $x \in L(e_1, \dots, e_N)$.

Замечание. Пусть: $N = \overline{1,3}$; O, $I_1, \dots, I_N$ — аффинно независимые точки пространства E^N, $e_k = \overrightarrow{OI_k}$ при $k = \overline{1,N}$. Будем говорить, что $e_1, \dots, e_N$ — базис пространства $\vec{E}^N$.

Пусть $x \in \vec{E}^N$. Будем говорить, что $\tilde{x}$ — столбец координат вектора x в базисе e, если: $\tilde{x} \in \mathbb{R}^N$, $x = \tilde{x}^k e_k$.

Пусть $x \in \vec{E}^N$. Очевидно, существует единственный столбец $\tilde{x}$, удовлетворяющий условию: $\tilde{x}$ — столбец координат вектора x в базисе e.

Пусть $x \in \vec{E}^N$. Обозначим через $[x](e)$ столбец координат вектора x в базисе e.

Обозначим: $h_{O,e}(A) = [\overrightarrow{OA}](e)$ при $A \in E^N$. Будем говорить, что $h_{O,e}$ — аффинная координатная карта (аффинная система координат) в пространстве E^N, соответствующая точке O и базису e. Пусть $A \in E^N$. Будем говорить, что $h_{O,e}(A)$ — столбец координат точки A в координатной карте $h_{O,e}$.

Замечание. Пусть: $N = \overline{1,3}$; O, $I_1, \dots, I_N$ — аффинно независимые точки пространства E^N, h — соответствующая аффинная координатная карта, $e_k = \overrightarrow{OI_k}$ при $k = \overline{1,N}$.

Пусть $x \in \vec{E}^N$. Так как: $[x](h) \in \mathbb{R}^N$, $x = [x]^k(h)e_k$, то $[x](e) = [x](h)$.

Пусть $A \in E^N$. Тогда:

$$h_{O,e}(A) = [\overrightarrow{OA}](e) = [\overrightarrow{OA}](h) = h(A) - h(O) = h(A) - \tilde{\theta} = h(A).$$

Следовательно, $h_{O,e} = h$.

Утверждение. *Пусть: l — прямая в пространстве E^2; O, I_1 — аффинно независимые точки прямой l, $e_1 = \overrightarrow{OI_1}$. Справедливо утверждение: $A \in l$ тогда и только тогда, когда: $A \in E^2$, $\overrightarrow{OA} \in L(e_1)$.*

Доказательство. Так как: O, $I_1 \in l$, O, I_1 — аффинно независимые точки, то $l_*(O, I_1) = l$. Так как O, I_1 — аффинно независимые точки, то существует точка I_2, удовлетворяющая условиям: $I_2 \in E^2$, O, I_1, I_2 — аффинно независимые точки. Пусть: h — аффинная координатная карта в пространстве E^2, соответствующая точкам O, I_1, I_2, $e_2 = \overrightarrow{OI_2}$.

Пусть $A \in l$. Тогда: $A \in E^2$, $h^2(A) = 0$. Следовательно, $[\overrightarrow{OA}]^2(e) = 0$. Тогда: $\overrightarrow{OA} = [\overrightarrow{OA}]^1(e)e_1 + [\overrightarrow{OA}]^2(e)e_2 = [\overrightarrow{OA}]^1(e)e_1 \in L(e_1)$.

Пусть: $A \in E^2$, $\overrightarrow{OA} \in L(e_1)$. Тогда существует число $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее условию $\overrightarrow{OA} = te_1$. Следовательно, $\overrightarrow{OA} = te_1 + 0e_2$. С другой стороны, $\overrightarrow{OA} = [\overrightarrow{OA}]^1(e)e_1 + [\overrightarrow{OA}]^2(e)e_2$. Тогда $[\overrightarrow{OA}]^2(e) = 0$. Следовательно, $h^2(A) = 0$. Тогда $A \in l$. □

Утверждение. *Пусть: l — прямая в пространстве E^3; O, I_1 — аффинно независимые точки прямой l, $e_1 = \overrightarrow{OI_1}$. Справедливо утверждение: $A \in l$ тогда и только тогда, когда: $A \in E^3$, $\overrightarrow{OA} \in L(e_1)$.*

Доказательство. Так как: $O, I_1 \in l$, O, I_1 — аффинно независимые точки, то $l_*(O, I_1) = l$. Так как O, I_1 — аффинно независимые точки, то существуют точки I_2, I_3, удовлетворяющие условиям: $I_2, I_3 \in E^3$, O, I_1, I_2, I_3 — аффинно независимые точки. Пусть: h — аффинная координатная карта в пространстве E^3, соответствующая точкам O, I_1, I_2, I_3, $e_2 = \overrightarrow{OI_2}$, $e_3 = \overrightarrow{OI_3}$.

Пусть $A \in l$. Тогда: $A \in E^3$, $h^2(A), h^3(A) = 0$. Следовательно, $[\overrightarrow{OA}]^2(e), [\overrightarrow{OA}]^3(e) = 0$. Тогда: $\overrightarrow{OA} = [\overrightarrow{OA}]^1(e)e_1 + [\overrightarrow{OA}]^2(e)e_2 + [\overrightarrow{OA}]^3(e)e_3 = [\overrightarrow{OA}]^1(e)e_1 \in L(e_1)$.

Пусть: $A \in E^3$, $\overrightarrow{OA} \in L(e_1)$. Тогда существует число $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее условию $\overrightarrow{OA} = te_1$. Следовательно, $\overrightarrow{OA} = te_1 + 0e_2 + 0e_3$. С другой стороны, $\overrightarrow{OA} = [\overrightarrow{OA}]^1(e)e_1 + [\overrightarrow{OA}]^2(e)e_2 + [\overrightarrow{OA}]^3(e)$. Тогда $[\overrightarrow{OA}]^2(e), [\overrightarrow{OA}]^3(e) = 0$. Следовательно, $h^2(A), h^3(A) = 0$. Тогда $A \in l$. □

Утверждение. *Пусть: π — плоскость в пространстве E^3; O, I_1, I_2 — аффинно независимые точки плоскости π, $e_1 = \overrightarrow{OI_1}$, $e_2 = \overrightarrow{OI_2}$. Справедливо утверждение: $A \in \pi$ тогда и только тогда, когда: $A \in E^3$, $\overrightarrow{OA} \in L(e_1, e_2)$.*

Доказательство. Так как: $O, I_1, I_2 \in \pi$, O, I_1, I_2 — аффинно независимые точки, то $\pi_*(O, I_1, I_2) = \pi$. Так как O, I_1, I_2 — аффинно независимые точки, то существует точка I_3, удовлетворяющая условиям: $I_3 \in E^3$, O, I_1, I_2, I_3 — аффинно независимые точки. Пусть: h — аффинная координатная карта в пространстве E^3, соответствующая точкам O, I_1, I_2, I_3, $e_3 = \overrightarrow{OI_3}$.

Пусть $A \in \pi$. Тогда: $A \in E^3$, $h^3(A) = 0$. Следовательно, $[\overrightarrow{OA}]^3(e) = 0$. Тогда: $\overrightarrow{OA} = [\overrightarrow{OA}]^1(e)e_1 + [\overrightarrow{OA}]^2(e)e_2 + [\overrightarrow{OA}]^3(e)e_3 = [\overrightarrow{OA}]^1(e)e_1 + [\overrightarrow{OA}]^2(e)e_2 \in L(e_1, e_2)$.

Пусть: $A \in E^3$, $\overrightarrow{OA} \in L(e_1, e_2)$. Тогда существуют числа $u^1, u^2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее условию $\overrightarrow{OA} = u^1e_1 + u^2e_2$. Следовательно, $\overrightarrow{OA} = u^1e_1 + u^2e_2 + 0e_3$. С другой стороны, $\overrightarrow{OA} = [\overrightarrow{OA}]^1(e)e_1 + [\overrightarrow{OA}]^2(e)e_2 + [\overrightarrow{OA}]^3(e)e_3$. Тогда $[\overrightarrow{OA}]^3(e) = 0$. Следовательно, $h^3(A) = 0$. Тогда $A \in \pi$. □

Утверждение. *Пусть: $N = \overline{1,3}$; $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $p_1, \ldots, p_r \in E^N$, $p_1, \ldots, p_r$ — аффинно независимые точки. Тогда $\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно независимые векторы.*

Доказательство. Так как $p_1, \ldots, p_r$ — аффинно независимые точки, то $r \leqslant N + 1$.

Пусть $r \leqslant N$. Так как $p_1, \ldots, p_r$ — аффинно независимые точки, то существуют точки $p_{r+1}, \ldots, p_{N+1}$, удовлетворяющие условиям: $p_{r+1}, \ldots, p_{N+1} \in E^N$, $p_1, \ldots, p_{N+1}$ — аффинно независимые точки. Тогда $\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_{N+1}}$ — линейно независимые векторы. Следовательно, $\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно независимые векторы.

Пусть $r = N + 1$. Так как $p_1, \ldots, p_r$ — аффинно независимые точки, то $\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно независимые векторы. □

Утверждение. *Пусть: $N = \overline{1,3}$; $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $p_1, \ldots, p_r \in E^N$, $\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно независимые векторы. Тогда $p_1, \ldots, p_r$ — аффинно независимые точки.*

Доказательство. Пусть: $N = 1$, $r = 2$. Так как $\overrightarrow{p_1p_2}$ — линейно независимый вектор, то $\overrightarrow{p_1p_2} \neq \theta$. Тогда $p_1 \neq p_2$. Следовательно, p_1, p_2 — аффинно независимые точки.

Пусть $N = 1$. Предположим, что $r \geqslant 3$. Так как $\overrightarrow{p_1p_2}, \dots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно независимые векторы, то $\overrightarrow{p_1p_2}$ — линейно независимый вектор. Тогда p_1, p_2 — аффинно независимые точки. Следовательно, $\overrightarrow{p_1p_3} \in L(\overrightarrow{p_1p_2})$. Тогда $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$ — линейно зависимые векторы. Следовательно, $\overrightarrow{p_1p_2}, \dots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно зависимые векторы (что противоречит утверждению: $\overrightarrow{p_1p_2}, \dots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно независимые векторы). Итак, $r \leqslant 2$.

Пусть: $N = 2$, $r = 2$. Так как $\overrightarrow{p_1p_2}$ — линейно независимый вектор, то $\overrightarrow{p_1p_2} \neq \theta$. Тогда $p_1 \neq p_2$. Следовательно, p_1, p_2 — аффинно независимые точки.

Пусть: $N = 2$, $r = 3$. Предположим, что p_1, p_2, p_3 — аффинно зависимые точки. Тогда существует прямая l, удовлетворяющая условиям: l — прямая в пространстве E^2, p_1, p_2, $p_3 \in l$. Так как $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$ — линейно независимые векторы, то $\overrightarrow{p_1p_2}$ — линейно независимый вектор. Тогда p_1, p_2 — аффинно независимые точки. Так как $p_1, p_2, p_3 \in l$, то $\overrightarrow{p_1p_3} \in L(\overrightarrow{p_1p_2})$. Тогда $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$ — линейно зависимые векторы (что противоречит утверждению: $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$ — линейно независимые векторы). Итак, p_1, p_2, p_3 — аффинно независимые точки.

Пусть $N = 2$. Предположим, что $r \geqslant 4$. Так как $\overrightarrow{p_1p_2}, \dots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно независимые векторы, то $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$ — линейно независимые векторы. Тогда p_1, p_2, p_3 — аффинно независимые точки. Следовательно, $\overrightarrow{p_1p_4} \in L(\overrightarrow{p_1p_2}, \overrightarrow{p_1p_3})$. Тогда $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$, $\overrightarrow{p_1p_4}$ — линейно зависимые векторы. Следовательно, $\overrightarrow{p_1p_2}, \dots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно зависимые векторы (что противоречит утверждению: $\overrightarrow{p_1p_2}, \dots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно независимые векторы). Итак, $r \leqslant 3$.

Пусть: $N = 3$, $r = 2$. Так как $\overrightarrow{p_1p_2}$ — линейно независимый вектор, то $\overrightarrow{p_1p_2} \neq \theta$. Тогда $p_1 \neq p_2$. Следовательно, p_1, p_2 — аффинно независимые точки.

Пусть: $N = 3$, $r = 3$. Предположим, что p_1, p_2, p_3 — аффинно зависимые точки. Тогда существует прямая l, удовлетворяющая условиям: l — прямая в пространстве E^3, p_1, p_2, $p_3 \in l$. Так как $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$ — линейно независимые векторы, то $\overrightarrow{p_1p_2}$ — линейно независимый вектор. Тогда p_1, p_2 — аффинно независимые точки. Так как $p_1, p_2, p_3 \in l$, то $\overrightarrow{p_1p_3} \in L(\overrightarrow{p_1p_2})$. Тогда $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$ — линейно зависимые векторы (что противоречит утверждению: $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$ — линейно независимые векторы). Итак, p_1, p_2, p_3 — аффинно независимые точки.

Пусть: $N = 3$, $r = 4$. Предположим, что p_1, p_2, p_3, p_4 — аффинно зависимые точки. Тогда существует плоскость π, удовлетворяющая условиям: π — плоскость в пространстве E^3, p_1, p_2, p_3, $p_4 \in \pi$. Так как $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$, $\overrightarrow{p_1p_4}$ — линейно независимые векторы, то $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$ — линейно независимые векторы. Тогда p_1, p_2, p_3 — аффинно независимые точки. Так как p_1, p_2, p_3, $p_4 \in \pi$, то $\overrightarrow{p_1p_4} \in L(\overrightarrow{p_1p_2}, \overrightarrow{p_1p_3})$. Тогда $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$, $\overrightarrow{p_1p_4}$ — линейно зависимые векторы (что противоречит утверждению: $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$, $\overrightarrow{p_1p_4}$ — линейно независимые векторы). Итак, p_1, p_2, p_3, p_4 — аффинно независимые точки.

Пусть $N = 3$. Предположим, что $r \geqslant 5$. Так как $\overrightarrow{p_1p_2}, \dots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно независимые векторы, то $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$, $\overrightarrow{p_1p_4}$ — линейно независимые векторы. Тогда p_1, p_2, p_3, p_4 — аффинно независимые точки. Следовательно, $\overrightarrow{p_1p_5} \in L(\overrightarrow{p_1p_2}, \overrightarrow{p_1p_3}, \overrightarrow{p_1p_4})$. Тогда $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$, $\overrightarrow{p_1p_4}$, $\overrightarrow{p_1p_5}$ — линейно зависимые векторы. Следовательно, $\overrightarrow{p_1p_2}, \dots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно зависимые векторы (что противоречит утверждению: $\overrightarrow{p_1p_2}, \dots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно независимые векторы). Итак, $r \leqslant 4$. $\square$

Замечание. Пусть $N = \overline{1,3}$.

Пусть: $e_1, \dots, e_N \in \vec{E}^N$, $e_1, \dots, e_N$ — линейно независимые векторы. Очевидно, существуют точки O, $I_1, \dots, I_N$, удовлетворяющие условиям: O, $I_1, \dots, I_N \in E^N$, $e_k = \overrightarrow{OI_k}$ при $k = \overline{1,N}$. Так как $e_1, \dots, e_N$ — линейно независимые векторы, то O, $I_1, \dots, I_N$ — аффинно независимые точки. Тогда $e_1, \dots, e_N$ — базис пространства $\vec{E}^N$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $e_1, \dots, e_r \in \vec{E}^N$, $e_1, \dots, e_r$ — линейно независимые векторы. Очевидно, существуют точки O, $I_1, \dots, I_r$, удовлетворяющие условиям: O, $I_1, \dots, I_r \in E^N$, $e_k = \overrightarrow{OI_k}$

при $k = \overline{1, r}$. Так как $e_1, \dots, e_r$ — линейно независимые векторы, то O, $I_1, \dots, I_r$ — аффинно независимые точки. Тогда $r + 1 \leqslant N + 1$. Следовательно, $r \leqslant N$.

Лекция 3. Матричная алгебра. Определители порядков 1, 2, 3

3.1. Пространство $\mathbb{R}^{N_2\times N_1}$

Определение (что такое матрица). Пусть N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$.

1. Будем говорить, что A — матрица, имеющая N_2 строки и N_1 столбец, если: A — функция, $\mathrm{D}(A) = \{1,\ldots,N_2\} \times \{1,\ldots,N_1\}$.

2. Пусть $\alpha_1^1,\ldots,\alpha_1^{N_2},\ldots,\alpha_{N_1}^1,\ldots,\alpha_{N_1}^{N_2}$ — некоторые объекты. Пусть: $A(j,i) = \alpha_i^j$ при: $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Обозначим:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \cdots & \alpha_{N_1}^1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_1^{N_2} & \cdots & \alpha_{N_1}^{N_2} \end{pmatrix} = A.$$

Пусть A — матрица, имеющая N_2 строки и N_1 столбец. Тогда:

$$A = \begin{pmatrix} A(1,1) & \cdots & A(1,N_1) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ A(N_2,1) & \cdots & A(N_2,N_1) \end{pmatrix}.$$

3. Пусть A — матрица, имеющая N_2 строки и N_1 столбец. Далее часто будем писать: A_i^j, $A_{j,i}$, $A^{j,i}$ вместо $A(j,i)$. Пусть $i=\overline{1,N_1}$. Обозначим:

$$A_i = \begin{pmatrix} A_i^1 \\ \vdots \\ A_i^{N_2} \end{pmatrix}.$$

Пусть $j=\overline{1,N_2}$. Обозначим:

$$A^j = \begin{pmatrix} A_1^j & \cdots & A_{N_1}^j \end{pmatrix}.$$

4. Пусть Q — множество. Будем говорить, что A — матрица с элементами из множества Q, имеющая N_2 строки и N_1 столбец, если:

$$A\colon \{1,\ldots,N_2\} \times \{1,\ldots,N_1\} \implies Q.$$

5. Пусть Q — множество. Обозначим через $Q^{N_2\times N_1}$ множество всех матриц с элементами из множества Q, имеющих N_2 строки и N_1 столбец.

Определение. Пусть N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество $\mathbb{R}^{N_2\times N_1}$.

Пусть A, $B \in \mathbb{R}^{N_2\times N_1}$. Обозначим:

$$(A+B)_i^j = A_i^j + B_i^j, \quad i=\overline{1,N_1},\ j=\overline{1,N_2}.$$

Очевидно, $A+B \in \mathbb{R}^{N_2\times N_1}$. Будем говорить, что $\{A+B\}_{A,B\in\mathbb{R}^{N_2\times N_1}}$ — стандартная операция сложения на множестве $\mathbb{R}^{N_2\times N_1}$.

Пусть: $\lambda\in\mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{N_2\times N_1}$. Обозначим:

$$(\lambda A)_i^j = \lambda A_i^j, \quad i=\overline{1,N_1},\ j=\overline{1,N_2}.$$

Очевидно, $\lambda A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Будем говорить, что $\{\lambda A\}_{\lambda \in \mathbb{R},\, A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}}$ — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$.

Обозначим:

$$\Theta_i^j = 0, \quad i = \overline{1, N_1},\ j = \overline{1, N_2}.$$

Очевидно, $\Theta \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Будем говорить, что Θ — стандартный нулевой элемент множества $\mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$.

Утверждение. *Пусть $N_1,\ N_2 \in \mathbb{N}$.*

1. Пусть $A,\ B \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Тогда $A + B = B + A$.

2. Пусть $A,\ B,\ C \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Тогда $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3. Пусть $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Тогда $A + \Theta = A$.

4. Пусть $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Тогда $A + (-1)A = \Theta$.

5. Пусть: $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Тогда $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

6. Пусть $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Тогда $1A = A$.

7. Пусть: $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Тогда $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

8. Пусть: $\lambda \in \mathbb{R},\ A,\ B \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Тогда $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

9. Пусть $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Тогда $0A = \Theta$.

10. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда $\lambda\Theta = \Theta$.

11. Пусть $A,\ B \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Существует единственная матрица X, удовлетворяющая условиям: $X \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $A + X = B$.

Доказательство.

1. Пусть $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$(A + B)_i^j = A_i^j + B_i^j = B_i^j + A_i^j = (B + A)_i^j.$$

Следовательно, $A + B = B + A$.

2. Пусть $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$\big((A + B) + C\big)_i^j = (A_i^j + B_i^j) + C_i^j = A_i^j + (B_i^j + C_i^j) = \big(A + (B + C)\big)_i^j.$$

Следовательно, $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3. Пусть $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$(A + \Theta)_i^j = A_i^j + \Theta_i^j = A_i^j + 0 = A_i^j.$$

Следовательно, $A + \Theta = A$.

4. Пусть $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$\big(A + (-1)A\big)_i^j = A_i^j + (-1)A_i^j = 0 = \Theta_i^j.$$

Следовательно, $A + (-1)A = \Theta$.

5. Пусть $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$\big((\alpha\beta)A\big)_i^j = (\alpha\beta)A_i^j = \alpha(\beta A_i^j) = \big(\alpha(\beta A)\big)_i^j.$$

Следовательно, $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

6. Пусть $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$(1A)_i^j = 1A_i^j = A_i^j.$$

Следовательно, $1A = A$.

7. Пусть $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$\big((\alpha+\beta)A\big)_i^j = (\alpha+\beta)A_i^j = \alpha A_i^j + \beta A_i^j = (\alpha A + \beta A)_i^j.$$

Следовательно, $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.

8. Пусть $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$\big(\lambda(A+B)\big)_i^j = \lambda(A_i^j + B_i^j) = \lambda A_i^j + \lambda B_i^j = (\lambda A + \lambda B)_i^j.$$

Следовательно, $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.

9. Пусть $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$(0A)_i^j = 0A_i^j = 0 = \Theta_i^j.$$

Следовательно, $0A = \Theta$.

10. Пусть $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$(\lambda\Theta)_i^j = \lambda\Theta_i^j = \lambda 0 = 0 = \Theta_i^j.$$

Следовательно, $\lambda\Theta = \Theta$.

11. Пусть: $X \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $A + X = B$. Тогда:

$$\begin{gathered}(-1)A + (A + X) = (-1)A + B,\\ \big((-1)A + A\big) + X = (-1)A + B,\\ \big(A + (-1)A\big) + X = (-1)A + B,\\ \Theta + X = (-1)A + B,\\ X + \Theta = (-1)A + B,\\ X = (-1)A + B.\end{gathered}$$

Пусть: $X_1 \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $A + X_1 = B$, $X_2 \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $A + X_2 = B$. Тогда: $X_1 = (-1)A + B$, $X_2 = (-1)A + B$. Следовательно, $X_1 = X_2$.

Обозначим, $X = (-1)A + B$. Тогда: $X \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $A + X = A + \big((-1)A + B\big) = \big(A + (-1)A\big) + B = \Theta + B = B + \Theta = B$. □

Определение. Пусть N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Обозначим, $-A = (-1)A$. Очевидно: $-A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $A + (-A) = \Theta$. Будем говорить, что $-A$ — противоположная матрица к матрице A.

Пусть A, $B \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Обозначим, $B - A = (-1)A + B$. Очевидно: $B - A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $A + (B - A) = B$. Будем говорить, что $B - A$ — разность матриц B, A.

3.2. Линейная комбинация матриц, линейная зависимость матриц

Определение (линейная комбинация матриц). Пусть: N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $X_1, \ldots, X_r \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$.

Будем говорить, что $\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda^k X_k$ — линейная комбинация матриц $X_1, \ldots, X_r$ с коэффициентами $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$.

Далее часто будем писать $\lambda^k X_k$ вместо $\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda^k X_k$ (частный случай *правила суммирования Эйнштейна*).

Определение (линейная оболочка матриц, линейная зависимость матриц, линейная независимость матриц). Пусть: $N_1,\ N_2 \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $X_1, \ldots, X_r \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$.

Обозначим:

$$L(X_1, \ldots, X_r) = \{\lambda^k X_k \colon \lambda^1 \in \mathbb{R} \wedge \cdots \wedge \lambda^r \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \bigl\{U \colon \exists \lambda^1 \cdots \exists \lambda^r (\lambda^1 \in \mathbb{R} \wedge \cdots \wedge \lambda^r \in \mathbb{R} \wedge U = \lambda^k X_k)\bigr\}.$$

Очевидно, $L(X_1, \ldots, X_r) \subseteq \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Будем говорить, что $L(X_1, \ldots, X_r)$ — линейная оболочка матриц $X_1, \ldots, X_r$. Пусть $k = \overline{1, r}$. Тогда: $X_k = \delta_k^m X_m \in L(X_1, \ldots, X_r)$.

Будем говорить, что по любой линейной комбинации матриц $X_1, \ldots, X_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты, если для любых чисел $\alpha^1, \ldots, \alpha^r$, $\beta^1, \ldots, \beta^r$, удовлетворяющих условиям: $\alpha^1, \ldots, \alpha^r$, $\beta^1, \ldots, \beta^r \in \mathbb{R}$, $\alpha^k X_k = \beta^k X_k$, справедливо утверждение $\forall k = \overline{1, r} (\alpha^k = \beta^k)$.

Будем говорить, что $X_1, \ldots, X_r$ — линейно зависимые матрицы, если существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $\lambda^k X_k = \Theta$, $\exists k = \overline{1, r} (\lambda^k \neq 0)$.

Будем говорить, что $X_1, \ldots, X_r$ — линейно независимые матрицы, если для любых чисел $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$, удовлетворяющих условиям: $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $\lambda^k X_k = \Theta$, справедливо утверждение $\forall k = \overline{1, r} (\lambda^k = 0)$.

Утверждение (критерий линейной зависимости матриц)**.** *Пусть $N_1,\ N_2 \in \mathbb{N}$.*

1. Пусть $X \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Матрица X является линейно зависимой тогда и только тогда, когда $X = \Theta$.

2. Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $X_1, \ldots, X_r \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Матрицы $X_1, \ldots, X_r$ являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда существует номер $k_0 = \overline{1, r}$, удовлетворяющий условию $X_{k_0} \in L(X_1, \ldots, X_{k_0 - 1}, X_{k_0 + 1}, \ldots, X_r)$.

Доказательство.

1. Пусть X — линейно зависимая матрица. Тогда существует число $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям: $\lambda X = \Theta$, $\lambda \neq 0$. Следовательно, $X = \Theta$.

Пусть $X = \Theta$. Тогда $1X = \Theta$. Так как $1 \neq 0$, то X — линейно зависимая матрица.

2. Пусть $X_1, \ldots, X_r$ — линейно зависимые матрицы. Тогда существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^N \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^k X_k = \Theta$, $\exists k = \overline{1, r} (\lambda^k \neq 0)$. Выберем номер $k_0 = \overline{1, r}$, удовлетворяющий условию $\lambda^{k_0} \neq 0$. Тогда:

$$\lambda^1 X_1 + \cdots + \lambda^{k_0 - 1} X_{k_0 - 1} + \lambda^{k_0} X_{k_0} + \lambda^{k_0 + 1} X_{k_0 + 1} + \cdots + \lambda^r X_r = \Theta,$$
$$X_{k_0} = \frac{-\lambda^1}{\lambda_{k_0}} X_1 + \cdots + \frac{-\lambda^{k_0 - 1}}{\lambda_{k_0}} X_{k_0 - 1} + \frac{-\lambda^{k_0 + 1}}{\lambda_{k_0}} X_{k_0 + 1} + \cdots + \frac{-\lambda^r}{\lambda_{k_0}} X_r,$$
$$X_{k_0} \in L(X_1, \ldots, X_{k_0 - 1}, X_{k_0 + 1}, \ldots, X_r).$$

Пусть существует номер $k_0 = \overline{1, r}$, удовлетворяющий условию $X_{k_0} \in L(X_1, \ldots, X_{k_0 - 1}, X_{k_0 + 1}, \ldots, X_r)$. Тогда существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^{k_0 - 1}$, $\lambda^{k_0 + 1}, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию:

$$X_{k_0} = \lambda^1 X_1 + \cdots + \lambda^{k_0 - 1} X_{k_0 - 1} + \lambda^{k_0 + 1} X_{k_0 + 1} + \cdots + \lambda^r X_r.$$

Следовательно:

$$(-\lambda^1)X_1 + \dots + (-\lambda^{k_0-1})X_{k_0-1} + 1X_{k_0} + (-\lambda^{k_0+1})X_{k_0+1} + \dots + (-\lambda^r)X_r = \Theta.$$

Так как $1 \neq 0$, то $X_1, \dots, X_r$ — линейно зависимые матрицы. □

Утверждение (критерий линейной независимости матриц)**.** *Пусть: N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $X_1, \dots, X_r \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Матрицы $X_1, \dots, X_r$ являются линейно независимыми тогда и только тогда, когда по любой линейной комбинации матриц $X_1, \dots, X_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты.*

Доказательство. Пусть $X_1, \dots, X_r$ — линейно независимые матрицы. Пусть: $\alpha^1, \dots, \alpha^r$, $\beta^1, \dots, \beta^r \in \mathbb{R}$, $\alpha^k X_k = \beta^k X_k$. Тогда $(\alpha^k - \beta^k)X_k = \Theta$. Так как $X_1, \dots, X_r$ — линейно независимые матрицы, то $\forall k = \overline{1,r}(\alpha^k - \beta^k = 0)$. Тогда $\forall k = \overline{1,r}(\alpha^k = \beta^k)$. Следовательно, по любой линейной комбинации матриц $X_1, \dots, X_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты.

Пусть по любой линейной комбинации матриц $X_1, \dots, X_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты. Пусть: $\lambda^1, \dots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $\lambda^k X_k = \Theta$. Тогда:

$$\lambda^1 X_1 + \dots + \lambda^r X_r = 0X_1 + \dots + 0X_r.$$

Так как по любой линейной комбинации матриц $X_1, \dots, X_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты, то $\forall k = \overline{1,r}(\lambda^k = 0)$. Тогда $X_1, \dots, X_r$ — линейно независимые матрицы. □

Утверждение. *Пусть: N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $X_1, \dots, X_r$, $X \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $X_1, \dots, X_r$ — линейно независимые матрицы, $X_1, \dots, X_r$, X — линейно зависимые матрицы. Тогда $X \in L(X_1, \dots, X_r)$.*

Доказательство. Так как $X_1, \dots, X_r$, X — линейно зависимые матрицы, то существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^{r+1} \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1 X_1 + \dots + \lambda^r X_r + \lambda^{r+1} X = \Theta$, $\exists k = \overline{1, r+1}(\lambda^k \neq 0)$. Предположим, что $\lambda^{r+1} = 0$. Тогда: $\lambda^1 X_1 + \dots + \lambda^r X_r = \Theta$, $\exists k = \overline{1,r}(\lambda^k \neq 0)$ (что противоречит утверждению: $X_1, \dots, X_r$ — линейно независимые матрицы). Итак, $\lambda^{r+1} \neq 0$. Тогда:

$$X = \frac{-\lambda^1}{\lambda^{r+1}} X_1 + \dots + \frac{-\lambda^r}{\lambda^{r+1}} X_r,$$
$$X \in L(X_1, \dots, X_r). \quad \square$$

Утверждение. *Пусть: N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $X_1, \dots, X_r \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $\sigma \in S_r$, $X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}$ — линейно зависимые матрицы. Тогда $X_1, \dots, X_r$ — линейно зависимые матрицы.*

Доказательство. Так как $X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}$ — линейно зависимые матрицы, то существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1 X_{\sigma(1)} + \dots + \lambda^r X_{\sigma(r)} = \Theta$, $\exists m = \overline{1,r}(\lambda^m \neq 0)$. Тогда:

$$\lambda^{\sigma^{-1}(1)} X_1 + \dots + \lambda^{\sigma^{-1}(r)} X_r = \Theta, \quad \exists k = \overline{1,r}(\lambda^{\sigma^{-1}(k)} \neq 0).$$

Следовательно, $X_1, \dots, X_r$ — линейно зависимые матрицы. □

Утверждение. *Пусть: N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $X_1, \dots, X_r \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $r_0 \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_{r_0} = \overline{1,r}$, $k_1 < \dots < k_{r_0}$, $X_{k_1}, \dots, X_{k_{r_0}}$ — линейно зависимые матрицы. Тогда $X_1, \dots, X_r$ — линейно зависимые матрицы.*

Доказательство. Так как $X_{k_1}, \ldots, X_{k_{r_0}}$ — линейно зависимые матрицы, то существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{r_0} \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\alpha^1 X_{k_1} + \cdots + \alpha^{r_0} X_{k_{r_0}} = \Theta$, $\exists m = \overline{1, r_0}(\alpha^m \neq 0)$. Обозначим: $\beta^{k_1} = \alpha^1, \ldots, \beta^{k_{r_0}} = \alpha^{r_0}$, $\beta^k = 0$ при: $k = \overline{1, r}$, $k \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$. Тогда:

$$\beta^{k_1} X_{k_1} + \cdots + \beta^{k_{r_0}} X_{k_{r_0}} = \Theta, \quad \exists m = \overline{1, r_0}(\beta^{k_m} \neq 0);$$
$$\beta^1 X_1 + \cdots + \beta^r X_r = \Theta, \quad \exists k = \overline{1, r}(\beta^k \neq 0).$$

Следовательно, $X_1, \ldots, X_r$ — линейно зависимые матрицы. □

3.3. Перемножение матриц

Определение.

1. Пусть: N_1, N_2, $N_3 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $B \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_2}$. Обозначим:

$$(BA)_i^j = B_k^j A_i^k, \quad i = \overline{1, N_1},\ j = \overline{1, N_3}.$$

Очевидно, $BA \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_1}$. Будем говорить, что BA — произведение матриц B, A.

2. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Обозначим:

$$I_i^j = \delta_i^j, \quad i = \overline{1, N},\ j = \overline{1, N}.$$

Очевидно, $I \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Будем говорить, что I — единичная матрица из множества $\mathbb{R}^{N \times N}$.

Утверждение.

1. Пусть: N_1, N_2, N_3, $N_4 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $B \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_2}$, $C \in \mathbb{R}^{N_4 \times N_3}$. Тогда $(CB)A = C(BA)$.

2. Пусть: N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Тогда: $AI_1 = A$, $I_2 A = A$.

3. Пусть: N_1, N_2, $N_3 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, B_1, $B_2 \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_2}$. Тогда $(B_1 + B_2)A = B_1 A + B_2 A$.

4. Пусть: N_1, N_2, $N_3 \in \mathbb{N}$; $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $B \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_2}$. Тогда $(\lambda B)A = \lambda(BA)$.

5. Пусть: N_1, N_2, $N_3 \in \mathbb{N}$; A_1, $A_2 \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $B \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_2}$. Тогда $B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2$.

6. Пусть: N_1, N_2, $N_3 \in \mathbb{N}$; $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $B \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_2}$. Тогда $B(\lambda A) = \lambda(BA)$.

Доказательство.

1. Очевидно, $(CB)A$, $C(BA) \in \mathbb{R}^{N_4 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_4}$. Тогда:

$$\big((CB)A\big)_i^j = \sum_{k=1}^{N_2} (CB)_k^j A_i^k = \sum_{k=1}^{N_2} \left(\sum_{m=1}^{N_3} C_m^j B_k^m \right) A_i^k = \sum_{k=1}^{N_2} \sum_{m=1}^{N_3} (C_m^j B_k^m) A_i^k =$$
$$= \sum_{m=1}^{N_3} \sum_{k=1}^{N_2} C_m^j (B_k^m A_i^k) = \sum_{m=1}^{N_3} C_m^j \sum_{k=1}^{N_2} B_k^m A_i^k = \sum_{m=1}^{N_3} C_m^j (BA)_i^m = \big(C(BA)\big)_i^j.$$

Следовательно, $(CB)A = C(BA)$.

Проделаем аналогичные выкладки, используя правило суммирования Эйнштейна. Очевидно, $(CB)A$, $C(BA) \in \mathbb{R}^{N_4 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_4}$. Тогда:

$$\big((CB)A\big)_i^j = (CB)_k^j A_i^k = (C_m^j B_k^m) A_i^k = C_m^j (B_k^m A_i^k) = C_m^j (BA)_i^m = \big(C(BA)\big)_i^j.$$

Следовательно, $(CB)A = C(BA)$.

2. Очевидно, AI_1, $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$(AI_1)_i^j = A_k^j (I_1)_i^k = A_k^j \delta_i^k = A_i^j.$$

Следовательно, $AI_1 = A$.

Очевидно, $I_2 A$, $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$(I_2 A)_i^j = (I_2)_k^j A_i^k = \delta_k^j A_i^k = A_i^j.$$

Следовательно, $I_2 A = A$.

3. Очевидно, $(B_1 + B_2)A$, $B_1 A + B_2 A \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_3}$. Тогда:

$$\big((B_1 + B_2)A\big)_i^j = (B_1 + B_2)_k^j A_i^k = \big((B_1)_k^j + (B_2)_k^j\big) A_i^k = (B_1)_k^j A_i^k + (B_2)_k^j A_i^k = \\ = (B_1 A)_i^j + (B_2 A)_i^j = (B_1 A + B_2 A)_i^j.$$

Следовательно, $(B_1 + B_2)A = B_1 A + B_2 A$.

4. Очевидно, $(\lambda B)A$, $\lambda(BA) \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_3}$. Тогда:

$$\big((\lambda B)A\big)_i^j = (\lambda B)_k^j A_i^k = (\lambda B_k^j) A_i^k = \lambda (B_k^j A_i^k) = \lambda (BA)_i^j = \big(\lambda(BA)\big)_i^j.$$

Следовательно, $(\lambda B)A = \lambda(BA)$.

5. Очевидно, $B(A_1 + A_2)$, $BA_1 + BA_2 \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_3}$. Тогда:

$$\big(B(A_1 + A_2)\big)_i^j = B_k^j (A_1 + A_2)_i^k = B_k^j \big((A_1)_i^k + (A_2)_i^k\big) = B_k^j (A_1)_i^k + B_k^j (A_2)_i^k = \\ = (BA_1)_i^j + (BA_2)_i^j = (BA_1 + BA_2)_i^j.$$

Следовательно, $B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2$.

6. Очевидно, $B(\lambda A)$, $\lambda(BA) \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_3}$. Тогда:

$$\big(B(\lambda A)\big)_i^j = B_k^j (\lambda A)_i^k = B_k^j (\lambda A_i^k) = \lambda (B_k^j A_i^k) = \lambda (BA)_i^j = \big(\lambda(BA)\big)_i^j.$$

Следовательно, $B(\lambda A) = \lambda(BA)$. □

Замечание.

1. Пусть N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$. Пусть: $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $B \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$. Будем говорить, что матрицы B, A коммутируют, если $BA = AB$.

Пусть: $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $B \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$, матрицы B, A коммутируют. Тогда $N_2 = N_1$.

2. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Пусть A, $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Обозначим, $[B, A] = BA - AB$. Будем говорить, что $[B, A]$ — коммутатор матриц B, A.

Пусть A, $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Матрицы B, A коммутируют тогда и только тогда, когда $[B, A] = \Theta$.

3. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; A, B_1, $B_2 \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Тогда $[B_1 + B_2, A] = [B_1, A] + [B_2, A]$.
4. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; $\lambda \in \mathbb{R}$, A, $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Тогда $[\lambda B, A] = \lambda [B, A]$.
5. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; A_1, A_2, $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Тогда $[B, A_1 + A_2] = [B, A_1] + [B, A_2]$.
6. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; $\lambda \in \mathbb{R}$, A, $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Тогда $[B, \lambda A] = \lambda [B, A]$.
7. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; A, $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Тогда $[A, B] = -[B, A]$.
8. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; A, B, $C \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Тогда $\big[C, [B, A]\big] + \big[A, [C, B]\big] + \big[B, [A, C]\big] = \Theta$.

3.4. Транспонирование матрицы

Определение. Пусть: N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Обозначим:

$$(A^T)_i^j = A_j^i, \quad i = \overline{1, N_2},\ j = \overline{1, N_1}.$$

Очевидно, $A^T \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$. Будем говорить, что A^T — результат транспонирования матрицы A.

Утверждение.

1. *Пусть:* N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; A, $B \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. *Тогда* $(A+B)^T = A^T + B^T$.
2. *Пусть:* N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. *Тогда* $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
3. *Пусть:* N_1, N_2, $N_3 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$, $B \in \mathbb{R}^{N_3 \times N_2}$. *Тогда* $(BA)^T = A^T B^T$.
4. *Пусть:* N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. *Тогда* $(A^T)^T = A$.

Доказательство.

1. Очевидно, $(A+B)^T$, $A^T + B^T \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$. Пусть: $i = \overline{1, N_2}$, $j = \overline{1, N_1}$. Тогда:

$$\big((A+B)^T\big)_i^j = (A+B)_j^i = A_j^i + B_j^i = (A^T)_i^j + (B^T)_i^j = (A^T + B^T)_i^j.$$

Следовательно, $(A+B)^T = A^T + B^T$.

2. Очевидно, $(\lambda A)^T$, $\lambda A^T \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}$. Пусть: $i = \overline{1, N_2}$, $j = \overline{1, N_1}$. Тогда:

$$\big((\lambda A)^T\big)_i^j = (\lambda A)_j^i = \lambda A_j^i = \lambda (A^T)_i^j = (\lambda A^T)_i^j.$$

Следовательно, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

3. Очевидно, $(BA)^T$, $A^T B^T \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_3}$. Пусть: $i = \overline{1, N_3}$, $j = \overline{1, N_1}$. Тогда:

$$\big((BA)^T\big)_i^j = (BA)_j^i = B_k^i A_j^k = (B^T)_i^k (A^T)_k^j = (A^T)_k^j (B^T)_i^k = (A^T B^T)_i^j.$$

Следовательно, $(BA)^T = A^T B^T$.

4. Очевидно, $(A^T)^T$, $A \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$\big((A^T)^T\big)_i^j = (A^T)_j^i = A_i^j.$$

Следовательно, $(A^T)^T = A$. □

3.5. След матрицы

Определение. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Обозначим, $\operatorname{tr}(A) = A_k^k$. Очевидно, $\operatorname{tr}(A) \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что $\operatorname{tr}(A)$ — след матрицы A.

Утверждение. *Пусть* $N \in \mathbb{N}$.

1. *Пусть* A, $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$. *Тогда* $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.
2. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$. *Тогда* $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A)$.
3. *Пусть* A, $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$. *Тогда* $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.
4. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$. *Тогда* $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A)$.

Доказательство.

1. Очевидно:

$$\operatorname{tr}(A+B) = \sum_{k=1}^{N} (A+B)_k^k = \sum_{k=1}^{N} (A_k^k + B_k^k) = \sum_{k=1}^{N} A_k^k + \sum_{k=1}^{N} B_k^k = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B).$$

2. Очевидно:

$$\operatorname{tr}(\lambda A) = \sum_{k=1}^{N} (\lambda A)_k^k = \sum_{k=1}^{N} \lambda A_k^k = \lambda \sum_{k=1}^{N} A_k^k = \lambda \operatorname{tr}(A).$$

3. Очевидно:

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{k=1}^{N} (AB)_k^k = \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} A_m^k B_k^m = \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} B_k^m A_m^k = \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} B_k^m A_m^k = \sum_{m=1}^{N} (BA)_m^m = \\ = \operatorname{tr}(BA).$$

4. Очевидно:

$$\operatorname{tr}(A^T) = \sum_{k=1}^{N} (A^T)_k^k = \sum_{k=1}^{N} A_k^k = \operatorname{tr}(A). \quad \square$$

3.6. Определители порядков 1, 2, 3

Определение. Пусть $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$. Обозначим, $\det_1(A) = A_1^1$. Очевидно, $\det_1\colon \mathbb{R}^{1\times 1} \implies \mathbb{R}$. Будем говорить, что $\det_1$ — определитель в пространстве $\mathbb{R}^{1\times 1}$.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Обозначим, $\det_2(A) = A_1^1 A_2^2 - A_1^2 A_2^1$. Очевидно, $\det_2\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \implies \mathbb{R}$. Будем говорить, что $\det_2$ — определитель в пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Обозначим, $\det_3(A) = A_1^1 A_2^2 A_3^3 + A_1^3 A_2^1 A_3^2 + A_1^2 A_2^3 A_3^1 - A_1^3 A_2^2 A_3^1 - A_1^1 A_2^3 A_3^2 - A_1^2 A_2^1 A_3^3$. Очевидно, $\det_3\colon \mathbb{R}^{3\times 3} \implies \mathbb{R}$. Будем говорить, что $\det_3$ — определитель в пространстве $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

Далее часто будем писать $\det$ вместо $\det_N$.

Утверждение (доказывается прямой проверкой)**.** *Пусть* $N = \overline{1,3}$.

1. *Пусть:* $k = \overline{1,N}$, $A_1, \ldots, A_{k-1}$, $A_{k+1}, \ldots, A_N$, X, $Y \in \mathbb{R}^N$. *Тогда:*

$$\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, X + Y, A_{k+1}, \ldots, A_N) = \\ = \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, X, A_{k+1}, \ldots, A_N) + \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, Y, A_{k+1}, \ldots, A_N).$$

2. *Пусть:* $k = \overline{1,N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{R}^N$. *Тогда:*

$$\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, \lambda A_k, A_{k+1}, \ldots, A_N) = \lambda \det(A_1, \ldots, A_N).$$

3. *Пусть:* k, $m = \overline{1,N}$, $k < m$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{R}^N$, $A_k = A_m$. *Тогда:*

$$\det(A_1, \ldots, A_N) = 0.$$

4. *Справедливо утверждение:*

$$\det(I) = 1.$$

Утверждение. *Пусть* $N = \overline{1,3}$.

1. *Пусть:* k, $m = \overline{1,N}$, $k < m$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{R}^N$. *Тогда:*

$$\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \ldots, A_N) = -\det(A_1, \ldots, A_N).$$

2. *Пусть:* $k = \overline{1, N}$, $A_1, \ldots, A_{k-1}$, $A_{k+1}, \ldots, A_N \in \mathbb{R}^N$. *Тогда:*

$$\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, \tilde{\theta}, A_{k+1}, \ldots, A_N) = 0.$$

3. *Пусть:* $N \geqslant 2$, $k = \overline{1, N}$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{R}^N$, $A_k \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_N)$. *Тогда:*

$$\det(A_1, \ldots, A_N) = 0.$$

4. *Пусть:* $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{R}^N$, $A_1, \ldots, A_N$ *— линейно зависимые столбцы. Тогда:*

$$\det(A_1, \ldots, A_N) = 0.$$

5. *Пусть:* $N \geqslant 2$, $k = \overline{1, N}$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{R}^N$, $X \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_N)$. *Тогда:*

$$\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + X, A_{k+1}, \ldots, A_N) = \det(A_1, \ldots, A_N).$$

6. *Пусть:* $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $k_1, \ldots, k_N = \overline{1, N}$. *Тогда:*

$$\det(A_{k_1}, \ldots, A_{k_N}) = \det(A) \det(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N}).$$

7. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$. *Тогда:*

$$\det(A) = \det(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N}) A_1^{k_1} \cdots A_N^{k_N}.$$

8. *Пусть* A, $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$. *Тогда:*

$$\det(BA) = \det(B) \det(A).$$

9. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$. *Тогда:*

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Доказательство.

1. Очевидно:

$$\begin{gathered}
\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k + A_m, A_{m+1}, \ldots, A_N) = 0, \\
\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \ldots, A_N) + \\
+ \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_m, A_{m+1}, \ldots, A_N) + \\
+ \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \ldots, A_N) + \\
+ \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_m, A_{m+1}, \ldots, A_N) = 0, \\
\det(A_1, \ldots, A_N) + \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \ldots, A_N) = 0, \\
\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \ldots, A_N) = -\det(A_1, \ldots, A_N).
\end{gathered}$$

2. Очевидно:

$$\begin{gathered}
\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, \tilde{\theta}, A_{k+1}, \ldots, A_N) = \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, 0\tilde{\theta}, A_{k+1}, \ldots, A_N) = \\
= 0 \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, \tilde{\theta}, A_{k+1}, \ldots, A_N) = 0.
\end{gathered}$$

3. Так как $A_k \in L(A_1, \dots, A_{k-1}, A_{k+1}, \dots, A_N)$, то существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^{k-1}, \lambda^{k+1}, \dots, \lambda^N \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию $A_k = \sum\limits_{m=\overline{1,N},\, m\neq k} \lambda^m A_m$. Тогда:

$$\det(A_1, \dots, A_N) = \det\Big(A_1, \dots, A_{k-1}, \sum_{m=\overline{1,N},\, m\neq k} \lambda^m A_m, A_{k+1}, \dots, A_N\Big) =$$
$$= \sum_{m=\overline{1,N},\, m\neq k} \lambda^m \det(A_1, \dots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \dots, A_N) = 0.$$

4. Пусть $N = 1$. Так как A_1 — линейно зависимый столбец, то $A_1 = \tilde{\theta}$. Тогда: $\det(A_1) = \det(\tilde{\theta}) = 0$.

Пусть $N \geqslant 2$. Так как $A_1, \dots, A_N$ — линейно зависимые столбцы, то существует номер $k = \overline{1,N}$, удовлетворяющий условию $A_k \in L(A_1, \dots, A_{k-1}, A_{k+1}, \dots, A_N)$. Тогда $\det(A_1, \dots, A_N) = 0$.

5. Очевидно:

$$\det(A_1, \dots, A_{k-1}, A_k + X, A_{k+1}, \dots, A_N) =$$
$$= \det(A_1, \dots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \dots, A_N) + \det(A_1, \dots, A_{k-1}, X, A_{k+1}, \dots, A_N) =$$
$$= \det(A_1, \dots, A_N).$$

6. Пусть числа $k_1, \dots, k_N$ не являются различными. Тогда: $\det(A_{k_1}, \dots, A_{k_N}) = 0$, $\det(A)\det(I_{k_1}, \dots, I_{k_N}) = 0$. Следовательно, $\det(A_{k_1}, \dots, A_{k_N}) = \det(A)\det(I_{k_1}, \dots, I_{k_N})$.

Пусть $k_1, \dots, k_N$ — различные числа. Очевидно, $\{k_1, \dots, k_N\} = \{1, \dots, N\}$. Тогда:

$$\det(A) = \det(A)\det(I),$$
$$\det(A_1, \dots, A_N) = \det(A)\det(I_1, \dots, I_N),$$
$$\det(A_{k_1}, \dots, A_{k_N}) = \det(A)\det(I_{k_1}, \dots, I_{k_N}).$$

7. Очевидно:

$$\det(A) = \det(A_1, \dots, A_N) = \det(I_{k_1}A_1^{k_1}, \dots, I_{k_N}A_N^{k_N}) = \det(I_{k_1}, \dots, I_{k_N})A_1^{k_1} \cdots A_N^{k_N}.$$

8. Очевидно:

$$\det(BA) = \det\big((BA)_1, \dots, (BA)_N\big) = \det(B_{k_1}A_1^{k_1}, \dots, B_{k_N}A_N^{k_N}) =$$
$$= \det(B_{k_1}, \dots, B_{k_N})A_1^{k_1} \cdots A_N^{k_N} = \det(B)\det(I_{k_1}, \dots, I_{k_N})A_1^{k_1} \cdots A_N^{k_N} = \det(B)\det(A).$$

9. Утверждение доказывается прямой проверкой. □

Замечание. Пусть $N = \overline{1,3}$. Обозначим: $\tilde{\varepsilon}_{k_1,\dots,k_N} = \det(I_{k_1}, \dots, I_{k_N})$ при $k_1, \dots, k_N = \overline{1,N}$. Пусть $k_1, \dots, k_N = \overline{1,N}$. Пусть числа $k_1, \dots, k_N$ не являются различными. Тогда $\tilde{\varepsilon}_{k_1,\dots,k_N} = 0$. Пусть $k_1, \dots, k_N$ — различные числа. Очевидно, $\{k_1, \dots, k_N\} = \{1, \dots, N\}$. Тогда: $|\tilde{\varepsilon}_{k_1,\dots,k_N}| = |\tilde{\varepsilon}_{1,\dots,N}| = 1$.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Тогда $\det(A) = \tilde{\varepsilon}_{k_1,\dots,k_N}A_1^{k_1} \cdots A_N^{k_N}$.

Определение. Пусть: $N = 2, 3$; $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $i, j = \overline{1,N}$. Обозначим через $\overline{\Delta}_i^j(A)$ определитель матрицы, которая получается из матрицы A вычёркиванием столбца A_i и строки A^j. Будем говорить, что $\overline{\Delta}_i^j(A)$ — минор матрицы A, дополнительный к элементу A_i^j. Будем говорить, что $(-1)^{j+i}\overline{\Delta}_i^j(A)$ — алгебраическое дополнение элемента A_i^j в матрице A.

Утверждение (доказывается прямой проверкой). *Пусть:* $N = 2, 3$*;* $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $i_0 = \overline{1, N}$*.* *Тогда:*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+i_0} \overline{\Delta}_{i_0}^{j}(A) A_{i_0}^{j}.$$

Лекция 4. Скалярное, векторное, смешанное произведения

4.1. Скалярное произведение

Определение. Пусть $N = \overline{1, 3}$.

Пусть x, $y \in \vec{E}^N$. Будем говорить, что x, y — сонаправленные векторы, если $\exists \lambda \in (0, +\infty)(y = \lambda x)$. Будем говорить, что x, y — противоположно направленные векторы, если $\exists \lambda \in (-\infty, 0)(y = \lambda x)$.

Пусть $x \in \vec{E}^N$. Пусть: A, $B \in E^N$, $x = \overrightarrow{AB}$. Обозначим, $\|x\| = \rho(A, B)$ ($|x| = \rho(A, B)$). Будем говорить, что $\|x\|$ — норма вектора x (модуль вектора x, длина вектора x).

Определение. Пусть $N = 2$, 3.

Пусть x, $y \in \vec{E}^N$. Пусть $x = \theta \vee y = \theta$. Обозначим, $\varphi(x, y) = 0$. Пусть x, $y \neq \theta$. Пусть: A, B, $C \in E^N$, $x = \overrightarrow{AB}$, $y = \overrightarrow{AC}$. Обозначим, $\varphi(x, y) = \widehat{BAC}$. Будем говорить, что $\varphi(x, y)$ — угол между векторами x, y.

Пусть x, $y \in \vec{E}^N$. Обозначим, $(x, y) = \|x\| \cdot \|y\| \cos\bigl(\varphi(x, y)\bigr)$. Будем говорить, что (x, y) — скалярное произведение векторов x, y.

Утверждение. *Пусть $N = 2$, 3.*

*1. Справедливо утверждение $\|\theta\| = 0$ (**непосредственно следует из определения нормы вектора**).*

*2. Пусть: $x \in \vec{E}^N$, $x \neq \theta$. Тогда $\|x\| > 0$ (**непосредственно следует из определения нормы вектора**).*

*3. Пусть x, $y \in \vec{E}^N$. Тогда $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ (**непосредственно следует из определения угла между векторами**).*

*4. Пусть: x, $y \in \vec{E}^N$, x, $y \neq \theta$, x, y — сонаправленные векторы. Тогда $\varphi(x, y) = 0$ (**нетрудно доказать, используя определение угла между векторами**).*

*5. Пусть: x, $y \in \vec{E}^N$, x, $y \neq \theta$, x, y — противоположно направленные векторы. Тогда $\varphi(x, y) = \pi$ (**нетрудно доказать, используя определение угла между векторами**).*

*6. Пусть: x, $y \in \vec{E}^N$, x, y — линейно независимые векторы. Тогда $\varphi(x, y) \in (0, \pi)$ (**нетрудно доказать, используя определение угла между векторами**).*

*7. Пусть $x \in \vec{E}^N$. Тогда $(\theta, x) = 0$ (**непосредственно следует из определения скалярного произведения**).*

*8. Пусть $x \in \vec{E}^N$. Тогда $(x, \theta) = 0$ (**непосредственно следует из определения скалярного произведения**).*

*9. Пусть: O, $A \in E^N$, $x = \overrightarrow{OA}$, $x \neq \theta$, $y \in \vec{E}^N$; $I_1 \in l_+(O, A)$, $I_2, \ldots, I_N \in E^N$, $\rho(O, I_1), \ldots, \rho(O, I_N) = 1$, $l_*(O, I_1), \ldots, l_*(O, I_N)$ — попарно перпендикулярные прямые; h — аффинная координатная карта в пространстве E^N, соответствующая точкам O, $I_1, \ldots, I_N$. Тогда $(x, y) = \|x\| \cdot [y]^1(h)$ (**нетрудно доказать, используя средства элементарной геометрии**).*

Утверждение. *Пусть $N = 2$, 3.*

1. Пусть x, $y \in \vec{E}^N$. Тогда $(x, y) = (y, x)$.

2. Пусть x, y_1, $y_2 \in \vec{E}^N$. Тогда $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$.

3. Пусть: $\lambda \in \mathbb{R}$, x, $y \in \vec{E}^N$. Тогда $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$.

4. Пусть: $x \in \vec{E}^N$, $x \neq \theta$. Тогда $(x, x) > 0$.

Доказательство.

1. Очевидно:

$$(x, y) = \|x\| \cdot \|y\| \cos\bigl(\varphi(x, y)\bigr) = \|y\| \cdot \|x\| \cos\bigl(\varphi(y, x)\bigr) = (y, x).$$

2. Пусть $x = \theta$. Тогда: $(x, y_1 + y_2) = 0$, $(x, y_1) + (x, y_2) = 0$. Следовательно, $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_1)$.

Пусть $x \neq \theta$. Очевидно, существуют точки O, A, $I_1, \ldots, I_N$, удовлетворяющие условиям: O, $A \in E^N$, $x = \overrightarrow{OA}$, $I_1 \in l_+(O, A)$, $I_2, \ldots, I_N \in E^N$, $\rho(O, I_1), \ldots, \rho(O, I_N) = 1$, $l_*(O, I_1), \ldots, l_*(O, I_N)$ — попарно перпендикулярные прямые. Пусть h — аффинная координатная карта в пространстве E^N, соответствующая точкам O, $I_1, \ldots, I_N$. Тогда:

$$(x, y_1 + y_2) = \|x\| \cdot [y_1 + y_2]^1(h) = \|x\| \bigl([y_1](h) + [y_2](h)\bigr)^1 = \|x\| \bigl([y_1]^1(h) + [y_2]^1(h)\bigr) = \\ = \|x\| \cdot [y_1]^1(h) + \|x\| \cdot [y_2]^1(h) = (x, y_1) + (x, y_2).$$

3. Пусть $x = \theta$. Тогда: $(x, \lambda y) = 0$, $\lambda(x, y) = 0$. Следовательно, $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$.

Пусть $x \neq \theta$. Очевидно, существуют точки O, A, $I_1, \ldots, I_N$, удовлетворяющие условиям: O, $A \in E^N$, $x = \overrightarrow{OA}$, $I_1 \in l_+(O, A)$, $I_2, \ldots, I_N \in E^N$, $\rho(O, I_1), \ldots, \rho(O, I_N) = 1$, $l_*(O, I_1), \ldots, l_*(O, I_N)$ — попарно перпендикулярные прямые. Пусть h — аффинная координатная карта в пространстве E^N, соответствующая точкам O, $I_1, \ldots, I_N$. Тогда:

$$(x, \lambda y) = \|x\| \cdot [\lambda y]^1(h) = \|x\| \bigl(\lambda [y](h)\bigr)^1 = \|x\| \bigl(\lambda [y]^1(h)\bigr) = \lambda\bigl(\|x\| \cdot [y]^1(h)\bigr) = \lambda(x, y).$$

4. Очевидно:

$$(x, x) = \|x\| \cdot \|x\| \cos\bigl(\varphi(x, x)\bigr) = \|x\| \cdot \|x\| > 0. \quad \square$$

Замечание. Пусть $N = 2$, 3.

Пусть $x \in \vec{E}^N$. Так как $\|x\| \geqslant 0$, то:

$$\sqrt{(x, x)} = \sqrt{\|x\| \cdot \|x\| \cos\bigl(\varphi(x, x)\bigr)} = \sqrt{\|x\|^2} = \|x\|.$$

Пусть: x, $y \in \vec{E}^N$, x, $y \neq \theta$. Так как $\varphi(x, y) \in [0, \pi]$, то:

$$\arccos\left(\frac{(x, y)}{\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}}\right) = \arccos\left(\frac{\|x\| \cdot \|y\| \cos\bigl(\varphi(x, x)\bigr)}{\|x\| \cdot \|y\|}\right) = \arccos\Bigl(\cos\bigl(\varphi(x, x)\bigr)\Bigr) = \\ = \varphi(x, y).$$

Пусть x, $y \in \vec{E}^N$. Так как $\|x\|$, $\|y\| \geqslant 0$, то:

$$\bigl|(x, y)\bigr| = \Bigl|\|x\| \cdot \|y\| \cos\bigl(\varphi(x, y)\bigr)\Bigr| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| = \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}.$$

(Неравенство Коши—Буняковского.)

Утверждение. *Пусть $N = 2$, 3.*

1. *Справедливо утверждение $\|\theta\| = 0$. Пусть: $x \in \vec{E}^N$, $x \neq \theta$. Тогда $\|x\| > 0$.*
2. *Пусть x, $y \in \vec{E}^N$. Тогда $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.*
3. *Пусть: $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \vec{E}^N$. Тогда $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.*

Доказательство.

1. Утверждения обсуждались выше.

2. Очевидно, существуют точки A, B, C, удовлетворяющие условиям: A, B, $C \in E^N$, $x = \overrightarrow{AB}$, $y = \overrightarrow{BC}$. Тогда:

$$\|x + y\| = \|\overrightarrow{AC}\| = \rho(A, C) \leqslant \rho(A, B) + \rho(B, C) = \|x\| + \|y\|\,.$$

3. Очевидно:

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x, x)} = |\lambda| \cdot \|x\|\,.$$

Замечание. Пусть $N = 2$, 3.

Пусть x, $y \in \vec{E}^N$. Будем писать $x \perp y$ если $(x, y) = 0$. Утверждение $x \perp y$ читается: «вектор x ортогонален вектору y» или «вектор x перпендикулярен вектору y».

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in \vec{E}^N$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — ортогональная последовательность векторов, если: $x_k \perp x_m$ при: k, $m = \overline{1, r}$, $k \neq m$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in \vec{E}^N$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — ортонормированная последовательность векторов, если: $x_k \perp x_m$ при: k, $m = \overline{1, r}$, $k \neq m$; $\|x_k\| = 1$ при $k = \overline{1, r}$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in \vec{E}^N$, $x_1, \ldots, x_r$ — ортогональная последовательность векторов, $x_1, \ldots, x_r \neq \theta$. Докажем, что $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы.

Пусть: $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{m=1}^{r} \lambda^m x_m = \theta$. Пусть $k = \overline{1, r}$. Так как $x_k \neq \theta$, то:

$$\sum_{m=1}^{r} \lambda^m x_m = \theta,$$
$$\Bigl(x_k, \sum_{m=1}^{r} \lambda^m x_m\Bigr) = (x_k, \theta),$$
$$\sum_{m=1}^{r} \lambda^m (x_k, x_m) = (x_k, \theta),$$
$$\lambda^k (x_k, x_k) = 0,$$
$$\lambda^k = 0.$$

Итак, $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_{r+1} \in \vec{E}^N$, $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы, $x_{r+1} \perp x_k$ при $k = \overline{1, r}$; $x_{r+1} \neq \theta$. Докажем, что $x_1, \ldots, x_{r+1}$ — линейно независимые векторы.

Пусть: $\lambda^1, \ldots, \lambda^{r+1} \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{m=1}^{r+1} \lambda^m x_m = \theta$. Так как $x_{r+1} \neq \theta$, то:

$$\sum_{m=1}^{r+1} \lambda^m x_m = \theta,$$
$$\Bigl(x_{r+1}, \sum_{m=1}^{r+1} \lambda^m x_m\Bigr) = (x_{r+1}, \theta),$$
$$\sum_{m=1}^{r+1} \lambda^m (x_{r+1}, x_m) = (x_{r+1}, \theta),$$
$$\lambda^{r+1} (x_{r+1}, x_{r+1}) = 0,$$

$$\lambda^{r+1} = 0.$$

Тогда $\sum\limits_{m=1}^{r} \lambda^m x_m = \theta$. Так как $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы, то $\lambda^1, \ldots, \lambda^r = 0$. Итак, $x_1, \ldots, x_{r+1}$ — линейно независимые векторы.

Пусть: $x \in \vec{E}^N$, $Q \subseteq \vec{E}^N$. Будем писать $x \perp Q$ если $\forall u \in Q (x \perp u)$. Утверждение $x \perp Q$ читается: «вектор x ортогонален множеству Q» или «вектор x перпендикулярен множеству Q».

Пусть Q_1, $Q_2 \subseteq \vec{E}^N$. Будем писать $Q_1 \perp Q_2$ если $\forall x_1 \in Q_1 \forall x_2 \in Q_2 (x_1 \perp x_2)$. Утверждение $Q_1 \perp Q_2$ читается: «множество Q_1 ортогонально множеству Q_2» или «множество Q_1 перпендикулярно множеству Q_2».

Замечание. Пусть: $N = 2,\ 3$; e — базис пространства $\vec{E}^N$.

Матрица $g(e)$. Обозначим: $g_{k,m}(e) = (e_k, e_m)$ при $k,\ m = \overline{1, N}$. Очевидно: $g(e) \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $g(e)^T = g(e)$.

Пусть e — ортогональный базис (ОБ). Тогда $g(e)$ — диагональная матрица ($g_{k,m}(e) = 0$ при: $k,\ m = \overline{1, N}$, $k \neq m$).

Пусть $g(e)$ — диагональная матрица. Тогда e — ортогональный базис.

Пусть e — ортонормированный базис (ОНБ). Тогда $g(e) = I$.

Пусть $g(e) = I$. Тогда e — ортонормированный базис.

Выражение для скалярного произведения в произвольном базисе. Пусть: x, $y \in \vec{E}^N$, $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$. Тогда:

$$(x, y) = (\tilde{x}^k e_k, \tilde{y}^m e_m) = (e_k, e_m)\tilde{x}^k \tilde{y}^m = g_{k,m}(e)\tilde{x}^k \tilde{y}^m.$$

Пусть: $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $(x, y) = A_{k,m}[x]^k(e)[y]^m(e)$ при $x,\ y \in \vec{E}^N$. Докажем, что $g(e) = A$.

Пусть $k,\ m = \overline{1, N}$. Тогда:

$$g_{k,m}(e) = (e_k, e_m) = A_{i,j}[e_k]^i(e)[e_m]^j(e) = A_{i,j}\delta^i_k \delta^j_m = A_{k,m}.$$

Следовательно, $g(e) = A$.

Выражение для скалярного произведения в ортогональном базисе. Пусть: x, $y \in \vec{E}^N$, $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$, e — ортогональный базис. Тогда:

$$(x, y) = g_{k,m}(e)\tilde{x}^k \tilde{y}^m = g_{k,k}(e)\tilde{x}^k \tilde{y}^k.$$

Выражение для скалярного произведения в ортонормированном базисе. Пусть: $x,\ y \in \vec{E}^N$, $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$, e — ортонормированный базис. Тогда:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{N} g_{k,k}(e)\tilde{x}^k \tilde{y}^k = \sum_{k=1}^{N} \tilde{x}^k \tilde{y}^k.$$

Выражение для координат вектора в ортогональном базисе. Пусть: $x \in \vec{E}^N$, $\tilde{x} = [x](e)$, e — ортогональный базис. Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(e_k, x) = \left(e_k, \sum_{m=1}^{N} \tilde{x}^m e_m\right) = \sum_{m=1}^{N} (e_k, e_m)\tilde{x}^m = (e_k, e_k)\tilde{x}^k;$$

$$\tilde{x}^k = \frac{(e_k, x)}{(e_k, e_k)}.$$

Следовательно:

$$x = \sum_{k=1}^{N} \tilde{x}^k e_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{(e_k, x)}{(e_k, e_k)} e_k.$$

Выражение для координат вектора в ортонормированном базисе. Пусть: $x \in \vec{E}^N$, $\tilde{x} = [x](e)$, e — ортонормированный базис. Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\tilde{x}^k = \frac{(e_k, x)}{(e_k, e_k)} = (e_k, x).$$

Следовательно:

$$x = \sum_{k=1}^{N} \frac{(e_k, x)}{(e_k, e_k)} e_k = \sum_{k=1}^{N} (e_k, x) e_k.$$

Замечание. Пусть: $N = 2$, 3; $e_1 \in \vec{E}^N$, $e_1 \neq \theta$.

Пусть $x \in \vec{E}^N$. Будем говорить, что x_1 — ортогональная проекция вектора x на множество $L(e_1)$, если: $x_1 \in L(e_1)$, $x - x_1 \perp L(e_1)$.

Пусть: $x \in \vec{E}^N$, x_1', x_1'' — ортогональные проекции вектора x на множество $L(e_1)$. Докажем, что $x_1' = x_1''$.

Так как: x_1', $x_1'' \in L(e_1)$, $x - x_1'$, $x - x_1'' \perp L(e_1)$, то:

$$\begin{aligned}(x_1' - x_1'', x_1' - x_1'') &= \big((x - x_1'') - (x - x_1'), x_1' - x_1''\big) = \\ &= (x - x_1'', x_1') - (x - x_1'', x_1'') - (x - x_1', x_1') + (x - x_1', x_1'') = 0.\end{aligned}$$

Тогда $x_1' - x_1'' = \theta$. Следовательно, $x_1' = x_1''$.

Пусть $x \in \vec{E}^N$. Обозначим, $x_1 = \frac{(e_1, x)}{(e_1, e_1)} e_1$. Докажем, что x_1 — ортогональная проекция вектора x на множество $L(e_1)$.

Очевидно, $x_1 \in L(e_1)$. Пусть $u \in L(e_1)$. Тогда существует число $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее условию $u = \lambda e_1$. Следовательно:

$$(x - x_1, u) = \Big(x - \frac{(e_1, x)}{(e_1, e_1)} e_1, \lambda e_1\Big) = \lambda\Big((x, e_1) - \frac{(e_1, x)}{(e_1, e_1)} (e_1, e_1)\Big) = 0.$$

Тогда $x - x_1 \perp L(e_1)$.

Пусть $x \in \vec{E}^N$. Пусть x_1 — ортогональная проекция вектора x на множество $L(e_1)$. Обозначим, $P_{L(e_1)}(x) = x_1$. Будем говорить, что $P_{L(e_1)}$ — оператор ортогонального проектирования на множество $L(e_1)$.

Пусть $x \in \vec{E}^N$. Очевидно, $P_{L(e_1)}(x) = \frac{(e_1, x)}{(e_1, e_1)} e_1$.

4.2. Правые и левые базисы пространства $\vec{E}^N$

Определение (матрица перехода). Пусть: $N = \overline{1, 3}$; e, e' — базисы пространства $\vec{E}^N$. Обозначим: $\alpha^i_{i'}(e, e') = [e'_{i'}]^i(e)$ при i, $i' = \overline{1, N}$. Очевидно, $\alpha(e, e') \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Будем говорить, что $\alpha(e, e')$ — матрица перехода от базиса e к базису e'.

Утверждение (без доказательства)**.** *Пусть $N = \overline{1, 3}$.*

1. *Пусть e — базис пространства $\vec{E}^N$. Тогда $\alpha(e, e) = I$.*

2. *Пусть e, e', e'' — базисы пространства $\vec{E}^N$. Тогда $\alpha(e,e')\alpha(e',e'') = \alpha(e,e'')$.*
3. *Пусть e, e' — базисы пространства $\vec{E}^N$. Тогда $\alpha(e,e')\alpha(e',e) = I$.*

Доказательство.
1. Пусть i, $j = \overline{1,N}$. Тогда: $\alpha_i^j(e,e) = [e_i]^j(e) = \delta_i^j$. Следовательно, $\alpha(e,e) = I$.
2. Пусть $i'' = \overline{1,N}$. Очевидно:

$$e''_{i''} = \alpha_{i''}^{i'}(e',e'')e'_{i'} = \alpha_{i''}^{i'}(e',e'')\big(\alpha_{i'}^{i}(e,e')e_i\big) = \big(\alpha_{i'}^{i}(e,e')\alpha_{i''}^{i'}(e',e'')\big)e_i = \big(\alpha(e,e')\alpha(e',e'')\big)_{i''}^{i}e_i.$$

С другой стороны, $e''_{i''} = \alpha_{i''}^{i}(e,e'')e_i$. Тогда: $\big(\alpha(e,e')\alpha(e',e'')\big)_{i''}^{i} = \alpha_{i''}^{i}(e,e'')$ при $i = \overline{1,N}$. Следовательно, $\alpha(e,e')\alpha(e',e'') = \alpha(e,e'')$.

3. Очевидно: $\alpha(e,e')\alpha(e',e) = \alpha(e,e) = I$. □

Замечание (одинаково ориентированные базисы, противоположно ориентированные базисы). Пусть $N = \overline{1,3}$.

Пусть e, e' — базисы пространства $\vec{E}^N$. Будем говорить, что e, e' — одинаково ориентированные базисы, если $\det\big(\alpha(e,e')\big) > 0$. Будем говорить, что e, e' — противоположно ориентированные базисы, если $\det\big(\alpha(e,e')\big) < 0$.

Пусть e, e' — базисы пространства $\vec{E}^N$. Базисы e, e' являются противоположно ориентированными тогда и только тогда, когда базисы e, e' не являются одинаково ориентированными.

Пусть e — базис пространства $\vec{E}^N$. Тогда e, e — одинаково ориентированные базисы.

Пусть: e, e' — базисы пространства $\vec{E}^N$; e, e' — одинаково ориентированные базисы. Тогда e', e — одинаково ориентированные базисы.

Пусть: e, e', e'' — базисы пространства $\vec{E}^N$; e, e' — одинаково ориентированные базисы, e', e'' — одинаково ориентированные базисы. Тогда e, e'' — одинаково ориентированные базисы.

Пусть: e, e', e'' — базисы пространства $\vec{E}^N$; e, e' — противоположно ориентированные базисы, e', e'' — противоположно ориентированные базисы. Тогда e, e'' — одинаково ориентированные базисы.

Замечание (правые и левые базисы, знак базиса). Пусть: $N = \overline{1,3}$; e_0 — базис пространства $\vec{E}^N$.

Пусть e — базис пространства $\vec{E}^N$. Будем говорить, что e — правый базис, если e, e_0 — одинаково ориентированные базисы. Будем говорить, что e — левый базис, если e, e_0 — противоположно ориентированные базисы.

Очевидно, e_0 — правый базис.

Пусть e — базис пространства $\vec{E}^N$. Базис e является левым тогда и только тогда, когда базис e не является правым.

Пусть e, e' — базисы пространства $\vec{E}^N$. Пусть e, e' — правые базисы. Тогда e, e' — одинаково ориентированные базисы. Пусть e, e' — левые базисы. Тогда e, e' — одинаково ориентированные базисы. Пусть: e — правый базис, e' — левый базис. Тогда e, e' — противоположно ориентированные базисы.

Пусть e — базис пространства $\vec{E}^N$. Пусть e — правый базис. Обозначим, $\operatorname{sgn}(e) = 1$. Пусть e — левый базис. Обозначим, $\operatorname{sgn}(e) = -1$. Будем говорить, что $\operatorname{sgn}(e)$ — знак базиса e.

4.3. Векторное и смешанное произведения

Замечание. Пусть: x, y, $z \in \vec{E}^3$, x, y — линейно независимые векторы, $\|z\| = \|x\| \cdot \|y\| \sin\big(\varphi(x, y)\big)$, $z \perp x$, y. Докажем, что x, y, z — базис пространства $\vec{E}^3$.

Так как x, y — линейно независимые векторы, то $x, y \neq \theta$. Тогда $\|x\|, \|y\| \neq 0$. Так как x, y — линейно независимые векторы, то $\varphi(x, y) \in (0, \pi)$. Тогда: $\|z\| = \|x\| \cdot \|y\| \sin\big(\varphi(x, y)\big) \neq 0$. Следовательно, $z \neq \theta$. Так как: x, y — линейно независимые векторы, $z \perp x$, y, то x, y, z — линейно независимые векторы. Тогда x, y, z — базис пространства $\vec{E}^3$.

Определение (векторное и смешанное произведения). Пусть x, $y \in \vec{E}^3$. Пусть x, y — линейно зависимые векторы. Обозначим, $[x, y] = \theta$. Пусть x, y — линейно независимые векторы. Обозначим через $[x, y]$ вектор, удовлетворяющий условиям: $[x, y] \in \vec{E}^3$, $\big\|[x, y]\big\| = \|x\| \cdot \|y\| \sin\big(\varphi(x, y)\big)$, $[x, y] \perp x$, y; x, y, $[x, y]$ — правый базис. Будем говорить, что $[x, y]$ — векторное произведение векторов x, y.

Пусть x, y, $z \in \vec{E}^3$. Обозначим, $(x, y, z) = \big([x, y], z\big)$. Будем говорить, что (x, y, z) — смешанное произведение векторов x, y, z.

Замечание («векторное» и «смешанное» произведения). Пусть e — ортонормированный базис пространства E^3.

Пусть x, $y \in \vec{E}^3$. Обозначим, $[x, y]_e = \sum\limits_{k_1, k_2, k_3 = \overline{1,3}} \operatorname{sgn}(e) \tilde{\varepsilon}_{k_1, k_2, k_3} [x]^{k_1}(e) [y]^{k_2}(e) e_{k_3}$. Будем говорить, что $[x, y]_e$ — «векторное» произведение векторов x, y.

Обозначим: $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$. Тогда:

$$[x, y]_e = \sum_{k_1, k_2, k_3 = \overline{1,3}} \operatorname{sgn}(e) \tilde{\varepsilon}_{k_1, k_2, k_3} \tilde{x}^{k_1} \tilde{y}^{k_2} e_{k_3} = \operatorname{sgn}(e) \begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 & e_1 \\ \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 & e_2 \\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3 & e_3 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(e) \begin{vmatrix} e_1 & \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 \\ e_2 & \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 \\ e_3 & \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3 \end{vmatrix} =$$
$$= \operatorname{sgn}(e) \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \tilde{x}^1 & \tilde{x}^2 & \tilde{x}^3 \\ \tilde{y}^1 & \tilde{y}^2 & \tilde{y}^3 \end{vmatrix}.$$

Пусть x, y, $z \in \vec{E}^3$. Обозначим, $(x, y, z)_e = \operatorname{sgn}(e) \tilde{\varepsilon}_{k_1, k_2, k_3} [x]^{k_1}(e) [y]^{k_2}(e) [z]^{k_3}(e)$. Будем говорить, что $(x, y, z)_e$ — «смешанное» произведение векторов x, y, z.

Обозначим: $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$, $\tilde{z} = [z](e)$. Тогда:

$$(x, y, z)_e = \operatorname{sgn}(e) \tilde{\varepsilon}_{k_1, k_2, k_3} \tilde{x}^{k_1} \tilde{y}^{k_2} \tilde{z}^{k_3} = \operatorname{sgn}(e) \begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 & \tilde{z}^1 \\ \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 & \tilde{z}^2 \\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3 & \tilde{z}^3 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(e) \begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{x}^2 & \tilde{x}^3 \\ \tilde{y}^1 & \tilde{y}^2 & \tilde{y}^3 \\ \tilde{z}^1 & \tilde{z}^2 & \tilde{z}^3 \end{vmatrix}.$$

Утверждение. *Пусть e — ортонормированный базис пространства $\vec{E}^3$.*

1. *«Смешанное» произведение линейно по каждому аргументу.*
2. *«Смешанное» произведение антисимметрично.*
3. *Пусть: x, y, $z \in \vec{E}^3$, x, y, z — линейно зависимые векторы. Тогда $(x, y, z)_e = 0$.*
4. *Пусть: x, y, $z \in \vec{E}^3$, x, y, z — линейно независимые векторы, $(x, y, z)_e > 0$. Тогда x, y, z — правый базис пространства $\vec{E}^3$.*
5. *Пусть: x, y, $z \in \vec{E}^3$, x, y, z — линейно независимые векторы, $(x, y, z)_e < 0$. Тогда x, y, z — левый базис пространства $\vec{E}^3$.*
6. *Пусть x, y, $z \in \vec{E}^3$. Тогда $(x, y, z)_e = \big([x, y]_e, z\big)$.*
7. *Пусть x, y, $z \in \vec{E}^3$. Тогда $(x, y, z)_e = \big(x, [y, z]_e\big)$.*
8. *«Векторное» произведение линейно по каждому аргументу.*

9. «Векторное» произведение антисимметрично.

10. Пусть a, b, $c \in \vec{E}^3$. Тогда $\big[a, [b,c]_e\big]_e = b(a,c) - c(a,b)$.

11. Пусть x, $y \in \vec{E}^3$. Тогда $\big\|[x,y]_e\big\| = \|x\| \cdot \|y\| \sin\big(\varphi(x,y)\big)$.

12. Пусть: x, $y \in \vec{E}^3$, x, y — линейно зависимые векторы. Тогда $[x,y]_e = \theta$.

13. Пусть x, $y \in \vec{E}^3$. Тогда $[x,y]_e \perp x$, y.

14. Пусть: x, $y \in \vec{E}^3$, x, y — линейно независимые векторы. Тогда x, y, $[x,y]_e$ — правый базис пространства $\vec{E}^3$.

15. Пусть x, $y \in \vec{E}^3$. Тогда $[x,y] = [x,y]_e$.

16. Пусть x, y, $z \in \vec{E}^3$. Тогда $(x,y,z) = (x,y,z)_e$.

Доказательство.

1. Утверждение непосредственно следует из определения «смешанного» произведения.
2. Утверждение непосредственно следует из определения «смешанного» произведения.
3. Обозначим: $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$, $\tilde{z} = [z](e)$. Так как x, y, z — линейно зависимые векторы, то $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ — линейно зависимые столбцы. Тогда:

$$(x,y,z)_e = \operatorname{sgn}(e) \begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 & \tilde{z}^1 \\ \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 & \tilde{z}^2 \\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3 & \tilde{z}^3 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Так как x, y, z — линейно независимые векторы, то x, y, z — базис пространства $\vec{E}^3$.
Обозначим: $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$, $\tilde{z} = [z](e)$. Тогда:

$$\det\big(\alpha(e_1,e_2,e_3,x,y,z)\big) = \begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 & \tilde{z}^1 \\ \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 & \tilde{z}^2 \\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3 & \tilde{z}^3 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(e)\operatorname{sgn}(e) \begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 & \tilde{z}^1 \\ \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 & \tilde{z}^2 \\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3 & \tilde{z}^3 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(e)(x,y,z)_e.$$

Пусть e — правый базис. Тогда:

$$\det\big(\alpha(e_1,e_2,e_3,x,y,z)\big) = \operatorname{sgn}(e)(x,y,z)_e > 0.$$

Следовательно, e_1, e_2, e_3 и x, y, z — одинаково ориентированные базисы. Так как e — правый базис, то x, y, z — правый базис.

Пусть e — левый базис. Тогда:

$$\det\big(\alpha(e_1,e_2,e_3,x,y,z)\big) = \operatorname{sgn}(e)(x,y,z)_e < 0.$$

Следовательно, e_1, e_2, e_3 и x, y, z — противоположно ориентированные базисы. Так как e — левый базис, то x, y, z — правый базис.

5. Так как x, y, z — линейно независимые векторы, то x, y, z — базис пространства $\vec{E}^3$.
Обозначим: $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$, $\tilde{z} = [z](e)$. Тогда:

$$\det\big(\alpha(e_1,e_2,e_3,x,y,z)\big) = \begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 & \tilde{z}^1 \\ \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 & \tilde{z}^2 \\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3 & \tilde{z}^3 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(e)\operatorname{sgn}(e) \begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 & \tilde{z}^1 \\ \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 & \tilde{z}^2 \\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3 & \tilde{z}^3 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(e)(x,y,z)_e.$$

Пусть e — правый базис. Тогда:

$$\det\big(\alpha(e_1,e_2,e_3,x,y,z)\big) = \operatorname{sgn}(e)(x,y,z)_e < 0.$$

Следовательно, e_1, e_2, e_3 и x, y, z — противоположно ориентированные базисы. Так как e — правый базис, то x, y, z — левый базис.

Пусть e — левый базис. Тогда:

$$\det\bigl(\alpha(e_1, e_2, e_3, x, y, z)\bigr) = \operatorname{sgn}(e)(x, y, z)_e > 0.$$

Следовательно, e_1, e_2, e_3 и x, y, z — одинаково ориентированные базисы. Так как e — левый базис, то x, y, z — левый базис.

6. Обозначим: $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$, $\tilde{z} = [z](e)$. Тогда:

$$\bigl([x,y]_e, z\bigr) = \sum_{j=\overline{1,3}} \bigl[[x,y]_e\bigr]^j(e)\tilde{z}^j = \sum_{j=\overline{1,3}} \Biggl(\sum_{k_1,k_2=\overline{1,3}} \operatorname{sgn}(e)\tilde{\varepsilon}_{k_1,k_2,j}\tilde{x}^{k_1}\tilde{y}^{k_2}\Biggr)\tilde{z}^j =$$
$$= \sum_{k_1,k_2,j=\overline{1,3}} \operatorname{sgn}(e)\tilde{\varepsilon}_{k_1,k_2,j}\tilde{x}^{k_1}\tilde{y}^{k_2}\tilde{z}^j = (x, y, z)_e.$$

7. Очевидно: $(x, y, z)_e = (y, z, x)_e = \bigl([y, z]_e, x\bigr) = \bigl(x, [y, z]_e\bigr)$.
8. Утверждение непосредственно следует из определения «векторного» произведения.
9. Утверждение непосредственно следует из определения «векторного» произведения.
10. Обозначим: $\tilde{a} = [a](e)$, $\tilde{b} = [b](e)$, $\tilde{c} = [c](e)$. Пусть $j = \overline{1,3}$. Тогда:

$$\Bigl[\bigl[a, [b,c]_e\bigr]_e\Bigr]^j(e) = \sum_{k_1,k_2=\overline{1,3}} \operatorname{sgn}(e)\tilde{\varepsilon}_{k_1,k_2,j}\tilde{a}^{k_1}\bigl[[b,c]_e\bigr]^{k_2}(e) =$$
$$= \sum_{k_1,k_2=\overline{1,3}} \operatorname{sgn}(e)\tilde{\varepsilon}_{k_1,k_2,j}\tilde{a}^{k_1} \sum_{m_1,m_2=\overline{1,3}} \operatorname{sgn}(e)\tilde{\varepsilon}_{m_1,m_2,k_2}\tilde{b}^{m_1}\tilde{c}^{m_2} =$$
$$= \sum_{k_1,k_2=\overline{1,3}} \sum_{m_1,m_2=\overline{1,3}} \tilde{\varepsilon}_{k_1,k_2,j}\tilde{\varepsilon}_{m_1,m_2,k_2}\tilde{a}^{k_1}\tilde{b}^{m_1}\tilde{c}^{m_2} =$$
$$= \sum_{\substack{k_1,k_2=\overline{1,3},\\ k_1,\,k_2,\,j\text{ — различные числа}}} \sum_{\substack{m_1,m_2=\overline{1,3},\\ m_1,\,m_2,\,k_2\text{ — различные числа}}} \tilde{\varepsilon}_{k_1,k_2,j}\tilde{\varepsilon}_{m_1,m_2,k_2}\tilde{a}^{k_1}\tilde{b}^{m_1}\tilde{c}^{m_2} =$$
$$= \Bigl[m_1 = k_1,\ m_2 = j \text{ либо } m_1 = j,\ m_2 = k_1\Bigr] =$$
$$= \sum_{\substack{k_1,k_2=\overline{1,3},\\ k_1,\,k_2,\,j\text{ — различные числа}}} \Bigl(\tilde{\varepsilon}_{k_1,k_2,j}\tilde{\varepsilon}_{k_1,j,k_2}\tilde{a}^{k_1}\tilde{b}^{k_1}\tilde{c}^j + \tilde{\varepsilon}_{k_1,k_2,j}\tilde{\varepsilon}_{j,k_1,k_2}\tilde{a}^{k_1}\tilde{b}^j\tilde{c}^{k_1}\Bigr) =$$
$$= \sum_{\substack{k_1,k_2=\overline{1,3},\\ k_1,\,k_2,\,j\text{ — различные числа}}} \Bigl(\tilde{b}^j\tilde{a}^{k_1}\tilde{c}^{k_1} - \tilde{c}^j\tilde{a}^{k_1}\tilde{b}^{k_1}\Bigr) = \sum_{\substack{k_1=\overline{1,3},\\ k_1\neq j}} \sum_{\substack{k_2=\overline{1,3},\\ k_2\neq k_1,j}} \Bigl(\tilde{b}^j\tilde{a}^{k_1}\tilde{c}^{k_1} - \tilde{c}^j\tilde{a}^{k_1}\tilde{b}^{k_1}\Bigr) =$$
$$= \sum_{\substack{k_1=\overline{1,3},\\ k_1\neq j}} \Bigl(\tilde{b}^j\tilde{a}^{k_1}\tilde{c}^{k_1} - \tilde{c}^j\tilde{a}^{k_1}\tilde{b}^{k_1}\Bigr) = \sum_{k_1=\overline{1,3}} \Bigl(\tilde{b}^j\tilde{a}^{k_1}\tilde{c}^{k_1} - \tilde{c}^j\tilde{a}^{k_1}\tilde{b}^{k_1}\Bigr) = \tilde{b}^j(a,c) - \tilde{c}^j(a,b) =$$
$$= \bigl[b(a,c) - c(a,b)\bigr]^j(e).$$

Следовательно, $\bigl[a, [b,c]_e\bigr]_e = b(a,c) - c(a,b)$.

11. Так как: $\|x\|$, $\|y\| \geqslant 0$, $\varphi(x,y) \in [0, \pi]$, то:

$$\bigl\|[x,y]_e\bigr\| = \sqrt{\bigl([x,y]_e, [x,y]_e\bigr)} = \sqrt{\Bigl(x, \bigl[y, [x,y]_e\bigr]_e\Bigr)} = \sqrt{\bigl(x, x(y,y) - y(y,x)\bigr)} =$$

$$= \sqrt{(x,x)(y,y) - (x,y)^2} = \sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 - \Big(\|x\| \cdot \|y\| \cos\big(\varphi(x,y)\big)\Big)^2} =$$
$$= \sqrt{\|x\|^2 \|y\|^2 \Big(\sin\big(\varphi(x,y)\big)\Big)^2} = \|x\| \cdot \|y\| \sin\big(\varphi(x,y)\big).$$

12. Пусть $x = \theta \vee y = \theta$. Тогда $\|x\| = 0 \vee \|y\| = 0$. Следовательно: $\big\|[x,y]_e\big\| = \|x\| \cdot \|y\| \sin\big(\varphi(x,y)\big) = 0$. Тогда $[x,y]_e = \theta$.

Пусть $x,\, y \neq \theta$. Так как $x,\, y$ — линейно зависимые векторы, то $\varphi(x,y) = 0 \vee \varphi(x,y) = \pi$. Тогда: $\big\|[x,y]_e\big\| = \|x\| \cdot \|y\| \sin\big(\varphi(x,y)\big) = 0$. Следовательно, $[x,y]_e = \theta$.

13. Так как x, y, x — линейно зависимые векторы, то: $\big([x,y]_e, x\big) = (x,y,x)_e = 0$. Тогда $[x,y]_e \perp x$. Так как x, y, y — линейно зависимые векторы, то: $\big([x,y]_e, y\big) = (x,y,y)_e = 0$. Тогда $[x,y]_e \perp y$.

14. Так как: x, y — линейно независимые векторы, $\big\|[x,y]_e\big\| = \|x\| \cdot \|y\| \sin\big(\varphi(x,y)\big)$, $[x,y]_e \perp x, y$, то x, y, $[x,y]_e$ — базис пространства $\vec{E}^3$. Так как $[x,y]_e \neq \theta$, то: $\big(x, y, [x,y]_e\big)_e = \big([x,y]_e, [x,y]_e\big) > 0$. Так как x, y, $[x,y]_e$ — линейно независимые векторы, то x, y, $[x,y]_e$ — правый базис пространства E^3.

15. Пусть x, y — линейно зависимые векторы. Тогда: $[x,y] = \theta$, $[x,y]_e = \theta$. Следовательно, $[x,y] = [x,y]_e$.

Пусть x, y — линейно независимые векторы. Так как: $[x,y]_e \in \vec{E}^3$, $\big\|[x,y]_e\big\| = \|x\| \cdot \|y\| \sin\big(\varphi(x,y)\big)$, $[x,y]_e \perp x, y$; x, y, $[x,y]_e$ — правый базис, то $[x,y] = [x,y]_e$.

16. Очевидно: $(x,y,z) = \big([x,y], z\big) = \big([x,y]_e, z\big) = (x,y,z)_e$. □

Утверждение.

1. Пусть: A, B, $C \in E^3$, S — площадь параллелограмма со сторонами $[A,B]$, $[A,C]$. Тогда $\big\|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\big\| = S$.

2. Пусть: A, B, C, $D \in E^3$, V — объём параллелепипеда со сторонами $[A,B]$, $[A,C]$, $[A,D]$. Тогда $\big|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\big| = V$.

3. Пусть x, y, $z \in \vec{E}^3$. Векторы x, y, z являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда $(x,y,z) = 0$.

4. Пусть: x, y, $z \in \vec{E}^3$, $(x,y,z) > 0$. Тогда x, y, z — правый базис пространства $\vec{E}^3$.

5. Пусть: x, y, $z \in \vec{E}^3$, $(x,y,z) < 0$. Тогда x, y, z — левый базис пространства $\vec{E}^3$.

6. Пусть x, y, $z \in \vec{E}^3$. Тогда $\big[x, [y,z]\big] + \big[z, [x,y]\big] + \big[y, [z,x]\big] = \theta$ (равенство Якоби).

Доказательство.

1. Пусть A, B, C — аффинно зависимые точки. Тогда $S = 0$. Так как A, B, C — аффинно зависимые точки, то $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ — линейно зависимые векторы. Тогда $\big\|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\big\| = 0$. Следовательно, $S = \big\|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\big\|$.

Пусть A, B, C — аффинно независимые точки. Обозначим через l прямую, удовлетворяющую условиям: l — прямая в пространстве E^3, $l \subseteq \pi_*(A,B,C)$, $C \in l$, $l \perp l_*(A,B)$. Обозначим через C_1 точку, удовлетворяющую условиям: $C_1 \in l$, $C_1 \in l_*(A,B)$. Пусть: $C_1 \in l_+(A,B)$, $C_1 \neq A$. Тогда:

$$S = \rho(A,B)\rho(C_1,C) = \rho(A,B)\rho(A,C)\sin(\widehat{C_1AC}) = \rho(A,B)\rho(A,C)\sin(\widehat{BAC}) =$$
$$= \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \sin\big(\varphi(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\big) = \big\|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\big\|.$$

Пусть $C_1 = A$. Тогда:

$$S = \rho(A,B)\rho(C_1,C) = \rho(A,B)\rho(A,C)\sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \rho(A,B)\rho(A,C)\sin(\widehat{BAC}) =$$

$$= \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \sin\bigl(\varphi(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\bigr) = \bigl\|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\bigr\|.$$

Пусть $C_1 \notin l_+(A, B)$. Тогда:

$$S = \rho(A,B)\rho(C_1,C) = \rho(A,B)\rho(A,C)\sin(\widehat{C_1AC}) = \rho(A,B)\rho(A,C)\sin(\pi - \widehat{BAC}) =$$
$$= \rho(A,B)\rho(A,C)\sin(\widehat{BAC}) = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \sin\bigl(\varphi(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\bigr) = \bigl\|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\bigr\|.$$

2. Пусть A, B, C, D — аффинно зависимые точки. Тогда $V = 0$. Так как A, B, C, D — аффинно зависимые точки, то $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ — линейно зависимые векторы. Тогда $\bigl|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\bigr| = 0$. Следовательно, $V = \bigl|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\bigr|$.

Пусть A, B, C, D — аффинно независимые точки. Обозначим через S площадь параллелограмма со сторонами $[A,B]$, $[A,C]$. Обозначим через l прямую, удовлетворяющую условиям: l — прямая в пространстве E^3, $D \in l$, $l \perp \pi_*(A,B,C)$. Обозначим через D_1 точку, удовлетворяющую условиям: $D_1 \in l$, $D_1 \in \pi_*(A,B,C)$. Тогда:

$$V = S\rho(D_1, D) = S\rho(A,D)\cos(\widehat{D_1DA}) = \bigl\|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]\bigr\| \cdot \|\overrightarrow{AD}\| \cdot \left|\cos\Bigl(\varphi\bigl([\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}], \overrightarrow{AD}\bigr)\Bigr)\right| =$$
$$= \left|\bigl([\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}], \overrightarrow{AD}\bigr)\right| = \bigl|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\bigr|.$$

3. Пусть x, y, z — линейно зависимые векторы. Тогда $(x,y,z) = 0$.

Пусть $(x,y,z) = 0$. Очевидно, существуют точки A, B, C, D, удовлетворяющие условиям: A, B, C, $D \in E^3$, $x = \overrightarrow{AB}$, $y = \overrightarrow{AC}$, $z = \overrightarrow{AD}$. Обозначим через V объём параллелепипеда со сторонами $[A,B]$, $[A,C]$, $[A,D]$. Тогда: $V = \bigl|(x,y,z)\bigr| = 0$. Следовательно, A, B, C, D — аффинно зависимые точки. Тогда x, y, z — линейно зависимые векторы.

4. Так как $(x,y,z) \neq 0$, то x, y, z — линейно независимые векторы. Так как $(x,y,z) > 0$, то x, y, z — правый базис пространства $\vec{E}^3$.

5. Так как $(x,y,z) \neq 0$, то x, y, z — линейно независимые векторы. Так как $(x,y,z) < 0$, то x, y, z — левый базис пространства $\vec{E}^3$.

6. Очевидно:

$$\bigl[x,[y,z]\bigr] + \bigl[z,[x,y]\bigr] + \bigl[y,[z,x]\bigr] =$$
$$= y(x,z) - z(x,y) + x(z,y) - y(z,x) + z(y,x) - x(y,z) = \theta. \quad \square$$

Утверждение. *Пусть $\tilde{x}$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^3$. Столбцы $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда:*

$$\begin{vmatrix} \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 \\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 \\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 \\ \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство. Пусть $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ — линейно зависимые столбцы. Тогда: $(\tilde{x}^2, \tilde{x}^3)^T$, $(\tilde{y}^2, \tilde{y}^3)^T$ — линейно зависимые столбцы, $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^3)^T$, $(\tilde{y}^1, \tilde{y}^3)^T$ — линейно зависимые столбцы, $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2)^T$, $(\tilde{y}^1, \tilde{y}^2)^T$ — линейно зависимые столбцы. Следовательно:

$$\begin{vmatrix} \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 \\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 \\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 \\ \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Пусть:

$$\begin{vmatrix} \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 \\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 \\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 \\ \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Пусть e — ортонормированный базис пространства E^3. Обозначим: $x = \tilde{x}^k e_k$, $y = \tilde{y}^k e_k$. Тогда:

$$[x, y] = \operatorname{sgn}(e) \begin{vmatrix} \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 \\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3 \end{vmatrix} e_1 - \operatorname{sgn}(e) \begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 \\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3 \end{vmatrix} e_2 + \operatorname{sgn}(e) \begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 \\ \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 \end{vmatrix} e_3 = \theta.$$

Следовательно, x, y — линейно зависимые векторы. Тогда $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ — линейно зависимые столбцы. □

Утверждение. *Пусть $\tilde{x}$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^2$. Столбцы $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда* $\det(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$.

Доказательство. Пусть $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ — линейно зависимые столбцы. Тогда $\det(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$.

Пусть $\det(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$. Пусть e — ортонормированный базис пространства E^3. Обозначим: $x = \tilde{x}^1 e_1 + \tilde{x}^2 e_2$, $y = \tilde{y}^1 e_1 + \tilde{y}^2 e_2$. Тогда:

$$[x, y] = \operatorname{sgn}(e) \begin{vmatrix} \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} e_1 - \operatorname{sgn}(e) \begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} e_2 + \operatorname{sgn}(e) \begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 \\ \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 \end{vmatrix} e_3 = \theta.$$

Следовательно, x, y — линейно зависимые векторы. Тогда $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, 0)^T$, $(\tilde{y}^1, \tilde{y}^2, 0)^T$ — линейно зависимые столбцы. Следовательно, $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ — линейно зависимые столбцы. □

Утверждение. *Пусть $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z} \in \mathbb{R}^3$. Столбцы $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда* $\det(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 0$.

Доказательство. Пусть $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ — линейно зависимые столбцы. Тогда $\det(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 0$.

Пусть $\det(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 0$. Пусть e — ортонормированный базис пространства E^3. Обозначим: $x = \tilde{x}^k e_k$, $y = \tilde{y}^k e_k$, $z = \tilde{z}^k e_k$. Тогда: $(x, y, z) = \operatorname{sgn}(e) \det(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 0$. Следовательно, x, y, z — линейно зависимые векторы. Тогда $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ — линейно зависимые столбцы. □

Лекция 5. Прямые в пространстве E^2. Прямые и плоскости в пространстве E^3

5.1. Прямые в пространстве E^2

Утверждение. *Пусть: l — прямая в пространстве E^2; $A_0 \in l$, O, I_1 — аффинно независимые точки прямой l, $e_1 = \overrightarrow{OI_1}$. Справедливо утверждение: $A \in l$ тогда и только тогда, когда: $A \in E^2$, $\overrightarrow{A_0A} \in L(e_1)$.*

Доказательство. Пусть $A \in l$. Тогда $A \in E^2$. Пусть $A = A_0$. Тогда: $\overrightarrow{A_0A} = \overrightarrow{A_0A_0} = \theta \in L(e_1)$.

Пусть $A \neq A_0$. Очевидно, существует точка A', удовлетворяющая условиям: $A' \in E^2$, $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{A_0A}$. Тогда: $A' \neq O$, $l_*(O, A') \parallel l_*(A_0, A)$. Так как: A_0, $A \in l$, A_0, A — аффинно независимые точки, то $l_*(A_0, A) = l$. Так как $l_*(O, A') \parallel l_*(A_0, A)$, то $l_*(O, A') \parallel l$. Так как: $O \in l_*(O, A')$, $O \in l$, то $l_*(O, A') = l$. Так как $A' \in l_*(O, A')$, то $A' \in l$. Тогда $\overrightarrow{OA'} \in L(e_1)$. Следовательно, $\overrightarrow{A_0A} \in L(e_1)$.

Пусть: $A \in E^2$, $\overrightarrow{A_0A} \in L(e_1)$. Пусть $A = A_0$. Тогда: $A = A_0 \in l$.

Пусть $A \neq A_0$. Очевидно, существует точка A', удовлетворяющая условиям: $A' \in E^2$, $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{A_0A}$. Тогда: $A' \neq O$, $l_*(O, A') \parallel l_*(A_0, A)$. Так как $\overrightarrow{A_0A} \in L(e_1)$, то $\overrightarrow{OA'} \in L(e_1)$. Тогда $A' \in l$. Так как: $O \in l$, O, A' — аффинно независимые точки, то $l_*(O, A') = l$. Так как $l_*(A_0, A) \parallel l_*(O, A')$, то $l_*(A_0, A) \parallel l$. Так как: $A_0 \in l_*(A_0, A)$, $A_0 \in l$, то $l_*(A_0, A) = l$. Так как $A \in l_*(A_0, A)$, то $A \in l$. $\square$

Определение. Пусть l — прямая в пространстве E^2.

Пусть: A, $B \in l$, A, B — аффинно независимые точки, $\tau = \overrightarrow{AB}$. Будем говорить, что τ — направляющий вектор прямой l.

Будем говорить, что N — нормаль к прямой l, если: $N \in \vec{E}^2$, $\forall A \in l \forall B \in l (N \perp \overrightarrow{AB})$.

Замечание. Пусть: l — прямая в пространстве E^2, $P_0 \in l$, τ — направляющий вектор прямой l. Очевидно, $\tau \neq \theta$.

Пусть $P \in E^2$. Запишем необходимое и достаточное условие того, что $P \in l$:

$$\overrightarrow{P_0P} \in L(\tau);$$
$$\exists t \in \mathbb{R}(\overrightarrow{P_0P} = t\tau).$$

Последнее условие обычно записывают в виде уравнения:

$$\overrightarrow{P_0P} = t\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Пусть: $O \in E^2$, e — базис пространства $\vec{E}^2$; $\tilde{x}_0 = h_{O,e}(P_0)$, $\tilde{\tau} = [\tau](e)$. Так как $\tau \neq \theta$, то $\tilde{\tau} \neq \tilde{\theta}$. Пусть: $P \in E^2$, $\tilde{x} = h_{O,e}(P)$. Очевидно, необходимое и достаточное условие того, что $P \in l$ можно записать в виде:

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = t\tau, \quad t \in \mathbb{R};$$
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\tau, \quad t \in \mathbb{R};$$
$$\tilde{x} = \tilde{x}_0 + t\tilde{\tau}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, необходимое и достаточное условие того, что $P \in l$ можно записать в виде:

$$\tilde{x} - \tilde{x}_0 \in L(\tilde{\tau}).$$

Так как $\tilde{\tau} \neq \tilde{\theta}$, то последнее условие можно переписать в виде:

$$\tilde{x} - \tilde{x}_0,\ \tilde{\tau} \text{ — линейно зависимые столбцы;}$$
$$\begin{vmatrix} \tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1 & \tilde{\tau}^1 \\ \tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2 & \tilde{\tau}^2 \end{vmatrix} = 0;$$
$$\tilde{\tau}^2(\tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1) - \tilde{\tau}^1(\tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2) = 0;$$
$$\tilde{\tau}^2(\tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1) = \tilde{\tau}^1(\tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2).$$

Последнее условие обычно записывают виде пропорции:

$$\frac{\tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1}{\tilde{\tau}^1} = \frac{\tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2}{\tilde{\tau}^2}.$$

Обозначим: $A_1 = \tilde{\tau}^2$, $A_2 = -\tilde{\tau}^1$. Так как $\tilde{\tau} \neq \tilde{\theta}$, то $A_1 \neq 0 \vee A_2 \neq 0$. Очевидно, необходимое и достаточное условие того, что $P \in l$ можно записать в виде:

$$A_1(\tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1) + A_2(\tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2) = 0.$$

Обозначим, $B = -(A_1\tilde{x}_0^1 + A_2\tilde{x}_0^2)$. Тогда последнее условие можно переписать в виде:

$$A_1\tilde{x}^1 + A_2\tilde{x}^2 + B = 0.$$

Пусть e — ортонормированный базис. Обозначим, $N = A_1e_1 + A_2e_2$. Так как $A_1 \neq 0 \vee A_2 \neq 0$, то $N \neq \theta$. Очевидно, необходимое и достаточное условие того, что $P \in l$ можно записать в виде:

$$(N, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = 0;$$
$$(N, \overrightarrow{OP}) + B = 0.$$

Рассмотрим ортогональную проекцию $P_{L(N)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})$. Обозначим через l_1 прямую, удовлетворяющую условиям: l_1 — прямая в пространстве E^2, $P \in l_1$, $l_1 \perp l$. Обозначим через P_1 точку, удовлетворяющую условиям: $P_1 \in l_1$, $P_1 \in l$. Обозначим через P_2 точку, симметричную точке P относительно прямой l. Очевидно:

$$P_{L(N)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = \frac{(N, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})}{\|N\|^2}N,$$
$$P_{L(N)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = \overrightarrow{P_1P},$$
$$\rho(P, l) = \left\|P_{L(N)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})\right\| = \frac{\left|(N, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})\right|}{\|N\|},$$
$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP} - P_{L(N)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}),$$
$$\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP} - 2P_{L(N)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}).$$

Очевидно, утверждение $P \in l$ справедливо тогда и только тогда, когда $P_{L(N)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = \theta$.

Обозначим: $n = \frac{1}{\|N\|}N$, $\delta(P, l; n) = (n, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})$. Очевидно:

$$\delta(P, l; n) = \frac{(N, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})}{\|N\|},$$
$$P_{L(N)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = \delta(P, l; n)n,$$
$$\rho(P, l) = \bigl|\delta(P, l; n)\bigr|.$$

Очевидно, утверждение $P \in l$ справедливо тогда и только тогда, когда $\delta(P, l; n) = 0$. Очевидно, точка P лежит в той (открытой) полуплоскости, в которую направлен вектор N тогда и только тогда, когда $\delta(P, l; n) > 0$. Очевидно, точка P лежит не в той (открытой) полуплоскости, в которую направлен вектор N тогда и только тогда, когда $\delta(P, l; n) < 0$.

5.2. Плоскости в пространстве E^3

Утверждение. *Пусть: π — плоскость в пространстве E^3; $A_0 \in \pi$, O, I_1, I_2 — аффинно независимые точки плоскости π, $e_1 = \overrightarrow{OI_1}$, $e_2 = \overrightarrow{OI_2}$. Справедливо утверждение: $A \in \pi$ тогда и только тогда, когда: $A \in E^3$, $\overrightarrow{A_0A} \in L(e_1, e_2)$.*

Доказательство. Пусть $A \in \pi$. Тогда $A \in E^3$. Пусть $A = A_0$. Тогда: $\overrightarrow{A_0A} = \overrightarrow{A_0A_0} = \theta \in L(e_1, e_2)$.

Пусть $A \neq A_0$. Очевидно, существует точка A', удовлетворяющая условиям: $A' \in E^3$, $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{A_0A}$. Тогда: $A' \neq O$, $l_*(O, A') \parallel l_*(A_0, A)$. Так как: A_0, $A \in l_*(A_0, A)$, A_0, $A \in \pi$, A_0, A — аффинно независимые точки, то $l_*(A_0, A) \subseteq \pi$. Так как $l_*(O, A') \parallel l_*(A_0, A)$, то $l_*(O, A') \parallel \pi$. Так как: $O \in l_*(O, A')$, $O \in \pi$, то $l_*(O, A') \subseteq \pi$. Так как $A' \in l_*(O, A')$, то $A' \in \pi$. Тогда $\overrightarrow{OA'} \in L(e_1, e_2)$. Следовательно, $\overrightarrow{A_0A} \in L(e_1, e_2)$.

Пусть: $A \in E^3$, $\overrightarrow{A_0A} \in L(e_1, e_2)$. Пусть $A = A_0$. Тогда: $A = A_0 \in \pi$.

Пусть $A \neq A_0$. Очевидно, существует точка A', удовлетворяющая условиям: $A' \in E^3$, $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{A_0A}$. Тогда: $A' \neq O$, $l_*(O, A') \parallel l_*(A_0, A)$. Так как $\overrightarrow{A_0A} \in L(e_1, e_2)$, то $\overrightarrow{OA'} \in L(e_1, e_2)$. Тогда $A' \in \pi$. Так как: O, $A' \in l_*(O, A')$, $O \in \pi$, O, A' — аффинно независимые точки, то $l_*(O, A') \subseteq \pi$. Так как $l_*(A_0, A) \parallel l_*(O, A')$, то $l_*(A_0, A) \parallel \pi$. Так как: $A_0 \in l_*(A_0, A)$, $A_0 \in \pi$, то $l_*(A_0, A) \subseteq \pi$. Так как $A \in l_*(A_0, A)$, то $A \in \pi$. □

Определение. Пусть π — плоскость в пространстве E^3.

Пусть: A, B, $C \in \pi$, A, B, C — аффинно независимые точки, $\tau_1 = \overrightarrow{AB}$, $\tau_2\overrightarrow{AC}$. Будем говорить, что τ_1, τ_2 — направляющие векторы плоскости π.

Будем говорить, что N — нормаль к плоскости π, если: $N \in \vec{E}^3$, $\forall A \in \pi \forall B \in \pi (N \perp \overrightarrow{AB})$.

Замечание. Пусть: π — плоскость в пространстве E^3, $P_0 \in \pi$, τ_1, τ_2 — направляющие векторы плоскости π. Очевидно, τ_1, τ_2 — линейно независимые векторы.

Пусть $P \in E^3$. Запишем необходимое и достаточное условие того, что $P \in \pi$:

$$\overrightarrow{P_0P} \in L(\tau_1, \tau_2);$$
$$\exists u^1 \in \mathbb{R} \exists u^2 \in \mathbb{R} (\overrightarrow{P_0P} = u^1\tau_1 + u^2\tau_2).$$

Последнее условие обычно записывают в виде уравнения:

$$\overrightarrow{P_0P} = u^1\tau_1 + u^2\tau_2, \quad u^1 \in \mathbb{R},\, u^2 \in \mathbb{R}.$$

Пусть: $O \in E^3$, e — базис пространства $\vec{E}^3$; $\tilde{x}_0 = h_{O,e}(P_0)$, $\tilde{\tau}_1 = [\tau_1](e)$, $\tilde{\tau}_2 = [\tau_2](e)$. Так как τ_1, τ_2 — линейно независимые векторы, то $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{\tau}_2$ — линейно независимые столбцы. Пусть: $P \in E^3$, $\tilde{x} = h_{O,e}(P)$. Очевидно, необходимое и достаточное условие того, что $P \in \pi$ можно записать в виде:

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = u^1\tau_1 + u^2\tau_2, \quad u^1 \in \mathbb{R},\, u^2 \in \mathbb{R};$$
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + u^1\tau_1 + u^2\tau_2, \quad u^1 \in \mathbb{R},\, u^2 \in \mathbb{R};$$
$$\tilde{x} = \tilde{x}_0 + u^1\tilde{\tau}_1 + u^2\tilde{\tau}_2, \quad u^1 \in \mathbb{R},\, u^2 \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, необходимое и достаточное условие того, что $P \in \pi$ можно записать в виде:

$$\tilde{x} - \tilde{x}_0 \in L(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2).$$

Так как $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{\tau}_2$ — линейно независимые столбцы, то последнее условие можно переписать в виде:

$$\tilde{x} - \tilde{x}_0,\ \tilde{\tau}_1,\ \tilde{\tau}_2 \text{ — линейно зависимые столбцы;}$$
$$\begin{vmatrix} \tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1 & \tilde{\tau}_1^1 & \tilde{\tau}_2^1 \\ \tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2 & \tilde{\tau}_1^2 & \tilde{\tau}_2^2 \\ \tilde{x}^3 - \tilde{x}_0^3 & \tilde{\tau}_1^3 & \tilde{\tau}_2^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Обозначим:

$$A_1 = \begin{vmatrix} \tilde{\tau}_1^2 & \tilde{\tau}_2^2 \\ \tilde{\tau}_1^3 & \tilde{\tau}_2^3 \end{vmatrix},\ A_2 = -\begin{vmatrix} \tilde{\tau}_1^1 & \tilde{\tau}_2^1 \\ \tilde{\tau}_1^3 & \tilde{\tau}_2^3 \end{vmatrix},\ A_3 = \begin{vmatrix} \tilde{\tau}_1^1 & \tilde{\tau}_2^1 \\ \tilde{\tau}_1^2 & \tilde{\tau}_2^2 \end{vmatrix}.$$

Так как $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{\tau}_2$ — линейно независимые столбцы, то $A_1 \neq 0 \vee A_2 \neq 0 \vee A_3 \neq 0$. Очевидно, необходимое и достаточное условие того, что $P \in \pi$ можно записать в виде:

$$A_1(\tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1) + A_2(\tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2) + A_3(\tilde{x}^3 - \tilde{x}_0^3) = 0.$$

Обозначим, $B = -(A_1\tilde{x}_0^1 + A_2\tilde{x}_0^2 + A_3\tilde{x}_0^3)$. Тогда последнее условие можно переписать в виде:

$$A_1\tilde{x}^1 + A_2\tilde{x}^2 + A_3\tilde{x}^3 + B = 0.$$

Пусть e — ортонормированный базис. Обозначим, $N = A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3$. Так как $A_1 \neq 0 \vee A_2 \neq 0 \vee A_3 \neq 0$, то $N \neq \theta$. Очевидно, необходимое и достаточное условие того, что $P \in \pi$ можно записать в виде:

$$(N, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = 0;$$
$$(N, \overrightarrow{OP}) + B = 0.$$

Рассмотрим ортогональную проекцию $P_{L(N)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})$. Обозначим через l_1 прямую, удовлетворяющую условиям: l_1 — прямая в пространстве E^3, $P \in l_1$, $l_1 \perp \pi$. Обозначим через P_1 точку, удовлетворяющую условиям: $P_1 \in l_1$, $P_1 \in \pi$. Обозначим через P_2 точку, симметричную точке P относительно плоскости π. Очевидно:

$$P_{L(N)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = \frac{(N, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})}{\|N\|^2} N,$$

$$P_{L(N)}(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0})=\overrightarrow{P_1P},$$
$$\rho(P,l)=\left\|P_{L(N)}(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0})\right\|=\frac{\left|(N,\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0})\right|}{\|N\|},$$
$$\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP}-P_{L(N)}(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0}),$$
$$\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{OP}-2P_{L(N)}(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0}).$$

Очевидно, утверждение $P\in\pi$ справедливо тогда и только тогда, когда $P_{L(N)}(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0})=\theta$.

Обозначим: $n=\frac{1}{\|N\|}N$, $\delta(P,\pi;n)=(n,\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0})$. Очевидно:

$$\delta(P,\pi;n)=\frac{(N,\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0})}{\|N\|},$$
$$P_{L(N)}(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0})=\delta(P,\pi;n)n,$$
$$\rho(P,l)=\left|\delta(P,\pi;n)\right|.$$

Очевидно, утверждение $P\in\pi$ справедливо тогда и только тогда, когда $\delta(P,\pi;n)=0$. Очевидно, точка P лежит в том (открытом) полупространстве, в которое направлен вектор N тогда и только тогда, когда $\delta(P,\pi;n)>0$. Очевидно, точка P лежит не в том (открытом) полупространстве, в которое направлен вектор N тогда и только тогда, когда $\delta(P,\pi;n)<0$.

5.3. Прямые в пространстве E^3

Утверждение. *Пусть: l — прямая в пространстве E^3; $A_0\in l$, O, I_1 — аффинно независимые точки прямой l, $e_1=\overrightarrow{OI_1}$. Справедливо утверждение: $A\in l$ тогда и только тогда, когда: $A\in E^3$, $\overrightarrow{A_0A}\in L(e_1)$.*

Доказательство. Пусть $A\in l$. Тогда $A\in E^3$. Пусть $A=A_0$. Тогда: $\overrightarrow{A_0A}=\overrightarrow{A_0A_0}=\theta\in L(e_1)$.

Пусть $A\neq A_0$. Очевидно, существует точка A', удовлетворяющая условиям: $A'\in E^2$, $\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{A_0A}$. Тогда: $A'\neq O$, $l_*(O,A')\parallel l_*(A_0,A)$. Так как: A_0, $A\in l$, A_0, A — аффинно независимые точки, то $l_*(A_0,A)=l$. Так как $l_*(O,A')\parallel l_*(A_0,A)$, то $l_*(O,A')\parallel l$. Так как: $O\in l_*(O,A')$, $O\in l$, то $l_*(O,A')=l$. Так как $A'\in l_*(O,A')$, то $A'\in l$. Тогда $\overrightarrow{OA'}\in L(e_1)$. Следовательно, $\overrightarrow{A_0A}\in L(e_1)$.

Пусть: $A\in E^3$, $\overrightarrow{A_0A}\in L(e_1)$. Пусть $A=A_0$. Тогда: $A=A_0\in l$.

Пусть $A\neq A_0$. Очевидно, существует точка A', удовлетворяющая условиям: $A'\in E^2$, $\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{A_0A}$. Тогда: $A'\neq O$, $l_*(O,A')\parallel l_*(A_0,A)$. Так как $\overrightarrow{A_0A}\in L(e_1)$, то $\overrightarrow{OA'}\in L(e_1)$. Тогда $A'\in l$. Так как: $O\in l$, O, A' — аффинно независимые точки, то $l_*(O,A')=l$. Так как $l_*(A_0,A)\parallel l_*(O,A')$, то $l_*(A_0,A)\parallel l$. Так как: $A_0\in l_*(A_0,A)$, $A_0\in l$, то $l_*(A_0,A)=l$. Так как $A\in l_*(A_0,A)$, то $A\in l$. □

Определение. Пусть l — прямая в пространстве E^3.

Пусть: A, $B\in l$, A, B — аффинно независимые точки, $\tau=\overrightarrow{AB}$. Будем говорить, что τ — направляющий вектор прямой l.

Будем говорить, что N — нормаль к прямой l, если: $N\in\vec{E}^2$, $\forall A\in l\forall B\in l(N\perp\overrightarrow{AB})$.

Замечание. Пусть: l — прямая в пространстве E^3, $P_0 \in l$, τ — направляющий вектор прямой l. Очевидно, $\tau \neq \theta$.

Пусть $P \in E^3$. Запишем необходимое и достаточное условие того, что $P \in l$:

$$\overrightarrow{P_0P} \in L(\tau);$$
$$\exists t \in \mathbb{R}(\overrightarrow{P_0P} = t\tau).$$

Последнее условие обычно записывают в виде уравнения:

$$\overrightarrow{P_0P} = t\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Пусть: $O \in E^3$, e — базис пространства $\vec{E}^2$; $\tilde{x}_0 = h_{O,e}(P_0)$, $\tilde{\tau} = [\tau](e)$. Так как $\tau \neq \theta$, то $\tilde{\tau} \neq \tilde{\theta}$. Пусть: $P \in E^3$, $\tilde{x} = h_{O,e}(P)$. Очевидно, необходимое и достаточное условие того, что $P \in l$ можно записать в виде:

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = t\tau, \quad t \in \mathbb{R};$$
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\tau, \quad t \in \mathbb{R};$$
$$\tilde{x} = \tilde{x}_0 + t\tilde{\tau}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, необходимое и достаточное условие того, что $P \in l$ можно записать в виде:

$$\tilde{x} - \tilde{x}_0 \in L(\tilde{\tau}).$$

Так как $\tilde{\tau} \neq \tilde{\theta}$, то последнее условие можно переписать в виде:

$$\tilde{x} - \tilde{x}_0,\ \tilde{\tau} \text{ — линейно зависимые столбцы;}$$
$$\begin{vmatrix} \tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2 & \tilde{\tau}^2 \\ \tilde{x}^3 - \tilde{x}_0^3 & \tilde{\tau}^3 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} \tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1 & \tilde{\tau}^1 \\ \tilde{x}^3 - \tilde{x}_0^3 & \tilde{\tau}^3 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} \tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1 & \tilde{\tau}^1 \\ \tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2 & \tilde{\tau}^2 \end{vmatrix} = 0;$$
$$\tilde{\tau}^3(\tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2) - \tilde{\tau}^2(\tilde{x}^3 - \tilde{x}_0^3) = 0,$$
$$\tilde{\tau}^3(\tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1) - \tilde{\tau}^1(\tilde{x}^3 - \tilde{x}_0^3) = 0,$$
$$\tilde{\tau}^2(\tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1) - \tilde{\tau}^1(\tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2) = 0;$$
$$\tilde{\tau}^3(\tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2) = \tilde{\tau}^2(\tilde{x}^3 - \tilde{x}_0^3),$$
$$\tilde{\tau}^3(\tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1) = \tilde{\tau}^1(\tilde{x}^3 - \tilde{x}_0^3),$$
$$\tilde{\tau}^2(\tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1) = \tilde{\tau}^1(\tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2).$$

Последнее условие обычно записывают виде пропорции:

$$\frac{\tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1}{\tilde{\tau}^1} = \frac{\tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2}{\tilde{\tau}^2} = \frac{\tilde{x}^3 - \tilde{x}_0^3}{\tilde{\tau}^3}.$$

Так как $\tilde{\tau} \neq \tilde{\theta}$, то нетрудно доказать, что среди строк $(0, \tilde{\tau}^3, -\tilde{\tau}^2)$, $(\tilde{\tau}^3, 0, -\tilde{\tau}^1)$, $(\tilde{\tau}^2, -\tilde{\tau}^1, 0)$ есть две линейно независимые строки. Нетрудно доказать, что $(0, \tilde{\tau}^3, -\tilde{\tau}^2)$, $(\tilde{\tau}^3, 0, -\tilde{\tau}^1)$, $(\tilde{\tau}^2, -\tilde{\tau}^1, 0)$ — линейно зависимые строки. Тогда существуют числа A_1^1, A_2^1,

A_3^1, A_1^2, A_2^2, $A_3^2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: (A_1^1, A_2^1, A_3^1), (A_1^2, A_2^2, A_3^2) — линейно независимые строки; необходимое и достаточное условие того, что $P \in l$ можно записать в виде:

$$\begin{gathered} A_1^1(\tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1) + A_2^1(\tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2) + A_3^1(\tilde{x}^3 - \tilde{x}_0^3) = 0, \\ A_1^2(\tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1) + A_2^2(\tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2) + A_3^2(\tilde{x}^3 - \tilde{x}_0^3) = 0. \end{gathered}$$

Обозначим: $B^1 = -(A_1^1\tilde{x}_0^1 + A_2^1\tilde{x}_0^2 + A_3^1\tilde{x}_0^3)$, $B^2 = -(A_1^2\tilde{x}_0^1 + A_2^2\tilde{x}_0^2 + A_3^2\tilde{x}_0^3)$. Тогда последнее условие можно переписать в виде:

$$\begin{gathered} A_1^1\tilde{x}^1 + A_2^1\tilde{x}^2 + A_3^1\tilde{x}^3 + B^1 = 0, \\ A_1^2\tilde{x}^1 + A_2^2\tilde{x}^2 + A_3^2\tilde{x}^3 + B^2 = 0. \end{gathered}$$

Пусть e — ортонормированный базис. Обозначим: $N_1 = A_1^1 e_1 + A_2^1 e_2 + A_3^1 e_3$, $N_2 = A_1^2 e_1 + A_2^2 e_2 + A_3^2 e_3$. Так как (A_1^1, A_2^1, A_3^1), (A_1^2, A_2^2, A_3^2) — линейно независимые строки, то N_1, N_2 — линейно независимые векторы. Очевидно, необходимое и достаточное условие того, что $P \in l$ можно записать в виде:

$$\begin{gathered} (N_1, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = 0, \\ (N_2, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = 0; \\ (N_1, \overrightarrow{OP}) + B^1 = 0, \\ (N_2, \overrightarrow{OP}) + B^2 = 0. \end{gathered}$$

Рассмотрим ортогональную проекцию $P_{L(\tau)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})$. Обозначим через π_1 плоскость, удовлетворяющую условиям: π_1 — плоскость в пространстве E^3, $P \in \pi_1$, $\pi_1 \perp l$. Обозначим через P_1 точку, удовлетворяющую условиям: $P_1 \in \pi_1$, $P_1 \in l$. Обозначим через P_2 точку, симметричную точке P относительно прямой l. Очевидно:

$$\begin{gathered} P_{L(\tau)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = \frac{(\tau, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})}{\|\tau\|^2}\tau, \\ P_{L(\tau)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = \overrightarrow{P_0P_1}, \\ \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_0} + P_{L(\tau)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}), \\ \overrightarrow{OP_2} = 2\big(\overrightarrow{OP_0} + P_{L(\tau)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})\big) - \overrightarrow{OP}. \end{gathered}$$

Лекция 6. Комплексные числа

6.1. Определение комплексного числа

Обозначим:

$$\mathbb{C} = \big\{(x, y)\colon x \in \mathbb{R} \land y \in \mathbb{R}\big\} = \Big\{z\colon \exists x \exists y \big(x \in \mathbb{R} \land y \in \mathbb{R} \land z = (x, y)\big)\Big\}.$$

Внимание! Очевидно: $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$**.** Будем говорить, что z — ко́мплексное число, если $z \in \mathbb{C}$. **Внимание! Иными словами, комплексное число это упорядоченная пара вещественных чисел.**

Пусть $z \in \mathbb{C}$. Выберем объекты x, y, удовлетворяющие условию $z = (x, y)$. Обозначим: $\mathrm{Re}(z) = x$, $\mathrm{Im}(z) = y$. Очевидно, $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$. Число $\mathrm{Re}(z)$ называется вещественной частью числа z. Число $\mathrm{Im}(z)$ называется мнимой частью числа z.

Пусть z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. Обозначим, $z_1 + z_2 = \big(\mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2), \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)\big)$. Очевидно, $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$. Число $z_1 + z_2$ называется суммой чисел z_1, z_2.

Обозначим, $0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$. Очевидно, $0_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}$. Число $0_{\mathbb{C}}$ называется нулём на множестве $\mathbb{C}$.

Пусть $z \in \mathbb{C}$. Обозначим, $-z = \big(-\mathrm{Re}(z), -\mathrm{Im}(z)\big)$. Очевидно, $-z \in \mathbb{C}$. Число $-z$ называется противоположным числом к числу z.

Пусть z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. Обозначим, $z_1 z_2 = \big(\mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Re}(z_2) - \mathrm{Im}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2), \mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2) + \mathrm{Im}(z_1)\,\mathrm{Re}(z_2)\big)$. Очевидно, $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$. Число $z_1 z_2$ называется произведением чисел z_1, z_2.

Обозначим, $1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$. Очевидно, $1_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}$. Число $1_{\mathbb{C}}$ называется единицей на множестве $\mathbb{C}$.

Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0_{\mathbb{C}}$. Обозначим, $z^{-1} = \Big(\frac{\mathrm{Re}(z)}{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2}, \frac{-\mathrm{Im}(z)}{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2}\Big)$. Очевидно, $z^{-1} \in \mathbb{C}$. Число z^{-1} называется обратным числом к числу z.

Обозначим, $i = (0, 1)$. Очевидно, $i \in \mathbb{C}$. Число i называется мнимой единицей на множестве $\mathbb{C}$.

Обозначим через ψ функцию, удовлетворяющую условиям: $\mathrm{D}(\psi) = \mathbb{R}$, $\psi(x) = (x, 0)$ при $x \in \mathbb{R}$. Очевидно, $\psi\colon \mathbb{R} \implies \mathbb{C}$. Функция ψ называется вложением множества $\mathbb{R}$ в множество $\mathbb{C}$.

Справедливы утверждения:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ при z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$;
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ при z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}$;
3. $z + 0_{\mathbb{C}} = z$ при $z \in \mathbb{C}$;
4. $z + (-z) = 0_{\mathbb{C}}$ при $z \in \mathbb{C}$;
5. $z_1 z_2 = z_2 z_1$ при z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$;
6. $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ при z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}$;
7. $1_{\mathbb{C}} \neq 0_{\mathbb{C}}$, $z 1_{\mathbb{C}} = z$ при $z \in \mathbb{C}$;
8. $z z^{-1} = 1_{\mathbb{C}}$ при: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0_{\mathbb{C}}$;
9. $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ при z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}$;
10. $ii = -1_{\mathbb{C}}$;
11. ψ — обратимая функция, $\psi(x_1 + x_2) = \psi(x_1) + \psi(x_2)$, $\psi(x_1 x_2) = \psi(x_1)\psi(x_2)$ при x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$;
12. $z = \psi(\mathrm{Re}\, z) + i\psi(\mathrm{Im}\, z)$ при $z \in \mathbb{C}$.

Утверждение.

1. Пусть a, $b \in \mathbb{C}$. Существует единственное число z, удовлетворяющее условиям: $z \in \mathbb{C}$, $a + z = b$.

2. Пусть: $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0_{\mathbb{C}}$. Существует единственное число z, удовлетворяющее условиям: $z \in \mathbb{C}$, $az = b$.

Доказательство.

1. Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $a + z = b$. Тогда:

$$\begin{gathered} a + z = b, \\ -a + (a + z) = -a + b, \\ (-a + a) + z = -a + b, \\ \big(a + (-a)\big) + z = -a + b, \\ 0_{\mathbb{C}} + z = -a + b, \\ z + 0_{\mathbb{C}} = -a + b, \\ z = -a + b. \end{gathered}$$

Пусть: $z_1 \in \mathbb{C}$, $a + z_1 = b$, $z_2 \in \mathbb{C}$, $a + z_2 = b$. Тогда: $z_1 = -a + b$, $z_2 = -a + b$. Следовательно, $z_1 = z_2$.

Пусть $z = -a+b$. Тогда: $z \in \mathbb{C}$, $a+z = a+(-a+b) = \big(a+(-a)\big)+b = 0_{\mathbb{C}}+b = b+0_{\mathbb{C}} = b$.

2. Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $az = b$. Тогда:

$$\begin{gathered} az = b, \\ a^{-1}(az) = a^{-1}b, \\ (a^{-1}a)z = a^{-1}b, \\ (aa^{-1})z = a^{-1}b, \\ 1_{\mathbb{C}}z = a^{-1}b, \\ z1_{\mathbb{C}} = a^{-1}b, \\ z = a^{-1}b. \end{gathered}$$

Пусть: $z_1 \in \mathbb{C}$, $az_1 = b$, $z_2 \in \mathbb{C}$, $az_2 = b$. Тогда: $z_1 = a^{-1}b$, $z_2 = a^{-1}b$. Следовательно, $z_1 = z_2$.

Пусть $z = a^{-1}b$. Тогда: $z \in \mathbb{C}$, $az = a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = 1_{\mathbb{C}}b = b1_{\mathbb{C}} = b$. □

Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Обозначим, $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$. Очевидно: $z_1 - z_2 \in \mathbb{C}$, $(z_1 - z_2) + z_2 = z_1$. Число $z_1 - z_2$ называется разностью чисел z_1, z_2.

Пусть: $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$. Обозначим, $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$. Очевидно: $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C}$, $\frac{z_1}{z_2} z_2 = z_1$. Число $\frac{z_1}{z_2}$ называется отношением чисел z_1, z_2 или частным чисел z_1, z_2.

Утверждение.

1. *Пусть $z \in \mathbb{C}$. Тогда $-(-z) = z$.*
2. *Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Тогда $-(z_1 + z_2) = -z_1 + (-z_2)$.*
3. *Пусть $z \in \mathbb{C}$. Тогда $z0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}}$.*
4. *Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Тогда $-(z_1 z_2) = z_1(-z_2)$.*
5. *Пусть $z \in \mathbb{C}$. Тогда $-z = z(-1_{\mathbb{C}})$.*
6. *Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0_{\mathbb{C}}$. Тогда: $z^{-1} \neq 0_{\mathbb{C}}$, $(z^{-1})^{-1} = z$.*
7. *Пусть: $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1, z_2 \neq 0_{\mathbb{C}}$. Тогда: $z_1 z_2 \neq 0_{\mathbb{C}}$, $(z_1 z_2)^{-1} = z_1^{-1} z_2^{-1}$.*
8. *Справедливо утверждение $\psi(0) = 0_{\mathbb{C}}$.*
9. *Пусть $x \in \mathbb{R}$. Тогда $\psi(-x) = -\psi(x)$.*
10. *Справедливо утверждение $\psi(1) = 1_{\mathbb{C}}$.*

11. *Пусть:* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. *Тогда:* $\psi(x) \neq 0_{\mathbb{C}}$, $\psi(x^{-1}) = \psi(x)^{-1}$.
12. *Пусть:* x, $y \in \mathbb{R}$, $z = \psi(x) + i\psi(y)$. *Тогда:* $\mathrm{Re}(z) = x$, $\mathrm{Im}(z) = y$.
13. *Справедливо утверждение* $z \in \mathrm{R}(\psi) \iff \big(z \in \mathbb{C} \wedge \mathrm{Im}(z) = 0\big)$.
14. *Пусть:* $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $z\psi(n) = z + \dots + z$.

Доказательство.

6. Предположим, что $z^{-1} = 0_{\mathbb{C}}$. Тогда: $1_{\mathbb{C}} = zz^{-1} = z0_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}}$ (что противоречит тому, что $1_{\mathbb{C}} \neq 0_{\mathbb{C}}$). Итак, $z^{-1} \neq 0_{\mathbb{C}}$.

Очевидно, $z^{-1}(z^{-1})^{-1} = 1_{\mathbb{C}}$. С другой стороны: $z^{-1}z = zz^{-1} = 1_{\mathbb{C}}$. Так как $z^{-1} \neq 0_{\mathbb{C}}$, то $(z^{-1})^{-1} = z$.

7. Предположим, что $z_1z_2 = 0_{\mathbb{C}}$. Очевидно, $z_10_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}}$. Так как $z_1 \neq 0_{\mathbb{C}}$, то $z_2 = 0_{\mathbb{C}}$ (что противоречит утверждению: $z_2 \neq 0_{\mathbb{C}}$). Итак, $z_1z_2 \neq 0_{\mathbb{C}}$.

Очевидно, $(z_1z_2)(z_1z_2)^{-1} = 1_{\mathbb{C}}$. С другой стороны: $(z_1z_2)(z_1^{-1}z_2^{-1}) = (z_1z_2)(z_2^{-1}z_1^{-1}) = \big(z_1(z_2z_2^{-1})\big)z_1^{-1} = (z_11_{\mathbb{C}})z_1^{-1} = z_1z_1^{-1} = 1_{\mathbb{C}}$. Так как $z_1z_2 \neq 0_{\mathbb{C}}$, то $(z_1z_2)^{-1} = z_1^{-1}z_2^{-1}$.

11. Так как $x \neq 0$, то: $\psi(x) \neq \psi(0) = 0_{\mathbb{C}}$. Очевидно: $\psi(x)\psi(x^{-1}) = \psi(xx^{-1}) = \psi(1) = 1_{\mathbb{C}}$. С другой стороны, $\psi(x)\psi(x)^{-1} = 1_{\mathbb{C}}$. Так как $\psi(x) \neq 0_{\mathbb{C}}$, то $\psi(x^{-1}) = \psi(x)^{-1}$. □

Замечание. Пусть: $\lambda \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. Тогда:

$$\psi(\lambda)z = \psi(\lambda)\big(\psi(\mathrm{Re}\, z) + i\psi(\mathrm{Im}\, z)\big) = \psi(\lambda)\psi(\mathrm{Re}\, z) + i\big(\psi(\lambda)\psi(\mathrm{Im}\, z)\big) = \\ = \psi\big(\lambda\,\mathrm{Re}(z)\big) + i\psi\big(\lambda\,\mathrm{Im}(z)\big).$$

Следовательно: $\mathrm{Re}\big(\psi(\lambda)z\big) = \lambda\,\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}\big(\psi(\lambda)z\big) = \lambda\,\mathrm{Im}(z)$.

Внимание! Далее обычно будем писать: 0, 1, x **вместо:** $0_{\mathbb{C}}$, $1_{\mathbb{C}}$, $\psi(x)$.

Пусть $z \in \mathbb{C}$. Обозначим, $\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$. Очевидно, $\overline{z} \in \mathbb{C}$. Число $\overline{z}$ называется сопряжённым числом к числу z. Справедливы утверждения:

1. $\mathrm{Re}(z) = 0 \iff \overline{z} = -z$, $\mathrm{Im}(z) = 0 \iff \overline{z} = z$ при $z \in \mathbb{C}$;
2. $\overline{\overline{z}} = z$ при $z \in \mathbb{C}$;
3. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ при z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$;
4. $\overline{-z} = -(\overline{z})$ при $z \in \mathbb{C}$;
5. $\overline{z_1z_2} = (\overline{z_1})(\overline{z_2})$ при z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$;
6. $\overline{z} \neq 0$, $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$ при: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

6.2. Модуль и аргумент комплексного числа

Скалярное произведение комплексных чисел

Пусть z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. Обозначим, $(z_1, z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Re}(z_2) + \mathrm{Im}(z_1)\,\mathrm{Im}(z_2)$. Очевидно, $(z_1, z_2) \in \mathbb{R}$. Число (z_1, z_2) называется скалярным произведением чисел z_1, z_2. Справедливы утверждения:

1. $(z_1, z_2) = (z_2, z_1)$ при z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$;
2. $(z_1, z_2 + z_3) = (z_1, z_2) + (z_1, z_3)$ при z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}$;
3. $(z_1, \lambda z_2) = \lambda(z_1, z_2)$ при: z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
4. $(z, z) > 0$ при: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

Утверждение (неравенство Коши—Буняковского). *Пусть* z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. *Тогда* $\big|(z_1, z_2)\big| \leqslant \sqrt{(z_1, z_1)}\sqrt{(z_2, z_2)}$.

Доказательство. Пусть $z_2 = 0$. Тогда: $\big|(z_1, z_2)\big| = 0 = \sqrt{(z_1, z_1)}\sqrt{(z_2, z_2)}$.

Пусть $z_2 \neq 0$. Тогда $(z_2, z_2) > 0$. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$\begin{gathered}
(z_1 + \lambda z_2, z_1 + \lambda z_2) \geqslant 0, \\
(z_1, z_1) + (z_1, \lambda z_2) + (\lambda z_2, z_1) + (\lambda z_2, \lambda z_2) \geqslant 0, \\
(z_1, z_1) + (z_1, z_2)\lambda + (z_2, z_1)\lambda + (z_2, z_2)\lambda\lambda \geqslant 0, \\
(z_1, z_1) + 2(z_1, z_2)\lambda + (z_2, z_2)\lambda^2 \geqslant 0.
\end{gathered}$$

В силу произвольности выбора $\lambda \in \mathbb{R}$ получаем, что $4(z_1, z_2)^2 - 4(z_1, z_1)(z_2, z_2) \leqslant 0$. Тогда $\big|(z_1, z_2)\big| \leqslant \sqrt{(z_1, z_1)}\sqrt{(z_2, z_2)}$. □

Модуль комплексного числа

Пусть $z \in \mathbb{C}$. Обозначим, $|z|_{\mathbb{C}} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$. Очевидно, $|z|_{\mathbb{C}} \in \mathbb{R}$. Число $|z|_{\mathbb{C}}$ называется модулем числа z.

Утверждение.
1. *Пусть $z \in \mathbb{C}$. Тогда $|z|_{\mathbb{C}} = \sqrt{(z, z)}$.*
2. *Пусть $x \in \mathbb{R}$. Тогда $|x|_{\mathbb{C}} = |x|$.*
3. *Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Тогда $|z|_{\mathbb{C}} > 0$.*
4. *Пусть z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$. Тогда $|z_1 + z_2|_{\mathbb{C}} \leqslant |z_1|_{\mathbb{C}} + |z_2|_{\mathbb{C}}$.*

Доказательство.

4. Очевидно:

$$\begin{gathered}
|z_1 + z_2|_{\mathbb{C}} = \sqrt{(z_1 + z_2, z_1 + z_2)} = \sqrt{(z_1, z_1) + (z_1, z_2) + (z_2, z_1) + (z_2, z_2)} = \\
= \sqrt{(z_1, z_1) + 2(z_1, z_2) + (z_2, z_2)} \leqslant \sqrt{(z_1, z_1) + 2\big|(z_1, z_2)\big| + (z_2, z_2)} \leqslant \\
\leqslant \sqrt{(z_1, z_1) + 2\sqrt{(z_1, z_1)}\sqrt{(z_2, z_2)} + (z_2, z_2)} = \sqrt{|z_1|_{\mathbb{C}}^2 + 2\,|z_1|_{\mathbb{C}}\,|z_2|_{\mathbb{C}} + |z_2|_{\mathbb{C}}^2} = \\
= \sqrt{\big(|z_1|_{\mathbb{C}} + |z_2|_{\mathbb{C}}\big)^2} = |z_1|_{\mathbb{C}} + |z_2|_{\mathbb{C}}. \quad \square
\end{gathered}$$

«Большой аргумент»

Пусть $z \in \mathbb{C}$. Обозначим:

$$\operatorname{Arg}(z) = \Big\{\varphi\colon \varphi \in \mathbb{R} \wedge z = |z|\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big)\Big\}.$$

Будем говорить, что φ — аргумент числа z, если $\varphi \in \operatorname{Arg}(z)$.

Замечание (выражение для $\operatorname{Arg}(z)$). Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Очевидно:

$$\begin{gathered}
\operatorname{Arg}(z) = \big\{\varphi\colon \varphi \in \mathbb{R} \wedge |z|\cos(\varphi) = \operatorname{Re}(z) \wedge |z|\sin(\varphi) = \operatorname{Im}(z)\big\} = \\
= \left\{\varphi\colon \varphi \in \mathbb{R} \wedge \cos(\varphi) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \wedge \sin(\varphi) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}\right\}.
\end{gathered}$$

Пусть: $\varphi_0 \in \operatorname{Arg}(z)$, $k \in \mathbb{Z}$. Очевидно, $\varphi_0 + 2\pi k \in \operatorname{Arg}(z)$.

Пусть φ, $\varphi_0 \in \operatorname{Arg}(z)$. Нетрудно доказать, что существует число k, удовлетворяющее условиям: $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$.

Так как $\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}\right)^2 = 1$, то существует число φ_0, удовлетворяющее условию $\varphi_0 \in \operatorname{Arg}(z)$. Тогда:

$$\operatorname{Arg}(z) = \{\varphi_0 + 2\pi k\colon k \in \mathbb{Z}\} = \bigl\{\varphi\colon \exists k(k \in \mathbb{Z} \wedge \varphi = \varphi_0 + 2\pi k)\bigr\}.$$

Пусть $z = 0$. Очевидно, $\operatorname{Arg}(z) = \mathbb{R}$.

Замечание (тригонометрическая форма записи комплексного числа). Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \operatorname{Arg}(z)$. Тогда $z = |z|\bigl(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\bigr)$.

Пусть: $\rho \in [0, +\infty)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $z = \rho\bigl(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\bigr)$. Тогда:

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{\bigl(\rho\cos(\varphi)\bigr)^2 + \bigl(\rho\sin(\varphi)\bigr)^2} = \sqrt{\rho^2} = \rho.$$

Следовательно, $z = |z|\bigl(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\bigr)$. Тогда $\varphi \in \operatorname{Arg}(z)$.

Замечание. Пусть φ_1, $\varphi_2 \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$\begin{gathered}
\bigl(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)\bigr)\bigl(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)\bigr) = \\
= \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + i\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + i\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) = \\
= \bigl(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\bigr) + i\bigl(\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2)\bigr) = \\
= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2).
\end{gathered}$$

Пусть $\varphi \in \mathbb{R}$. Очевидно, $\cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \neq 0$. Очевидно:

$$\bigl(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\bigr)\bigl(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\bigr)^{-1} = 1.$$

С другой стороны:

$$\bigl(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\bigr)\bigl(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\bigr) = \cos(0) + i\sin(0) = 1.$$

Так как $\cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \neq 0$, то $\bigl(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\bigr)^{-1} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)$.

Замечание. Пусть: z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, $\varphi_1 \in \operatorname{Arg}(z_1)$, $\varphi_2 \in \operatorname{Arg}(z_2)$. Тогда:

$$\begin{gathered}
z_1 z_2 = \Bigl(|z_1|\bigl(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)\bigr)\Bigr)\Bigl(|z_2|\bigl(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)\bigr)\Bigr) = \\
= \bigl(|z_1| \cdot |z_2|\bigr)\bigl(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\bigr).
\end{gathered}$$

Следовательно: $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\varphi_1 + \varphi_2 \in \operatorname{Arg}(z_1 z_2)$.

Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $\varphi \in \operatorname{Arg}(z)$. Тогда:

$$z^{-1} = \Bigl(|z|\bigl(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\bigr)\Bigr)^{-1} = |z|^{-1}\bigl(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\bigr).$$

Следовательно: $|z^{-1}| = |z|^{-1}$, $-\varphi \in \operatorname{Arg}(z^{-1})$.

«Малый аргумент»

Пусть: $\alpha \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Существует единственное число φ, удовлетворяющее условиям: $\varphi \in \operatorname{Arg}(z)$, $\alpha \leqslant \varphi < \alpha + 2\pi$. Обозначим, $\arg_\alpha(z) = \varphi$.

Пусть: $\alpha \in \mathbb{R}$, $z = 0$. Обозначим, $\arg_\alpha(z) = \alpha$.

Пусть: $\alpha \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Существует единственное число φ, удовлетворяющее условиям: $\varphi \in \operatorname{Arg}(z)$, $\alpha < \varphi \leqslant \alpha + 2\pi$. Обозначим, $\arg^*_\alpha(z) = \varphi$.

Пусть: $\alpha \in \mathbb{R}$, $z = 0$. Обозначим, $\arg^*_\alpha(z) = \alpha + 2\pi$.

Замечание (выражение для $\arg^*_{-\pi}(z)$). Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$. Тогда $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Пусть $\varphi = \arg^*_{-\pi}(z)$. Тогда:

$$\begin{cases} \varphi \in (-\pi, \pi], \\ \cos(\varphi) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin(\varphi) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

Пусть $x \neq 0$. Тогда: $\varphi \in \mathbb{R}$, $\cos(\varphi) \neq 0$, $\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{y}{x}$. Следовательно, существует число k, удовлетворяющее условиям: $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi k$.

1. Пусть $x > 0$. Тогда: $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $\cos(\varphi) > 0$. Следовательно, $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$.
2. Пусть: $x = 0$, $y > 0$. Тогда: $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $\cos(\varphi) = 0$, $\sin(\varphi) > 0$. Следовательно, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
3. Пусть: $x = 0$, $y < 0$. Тогда: $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $\cos(\varphi) = 0$, $\sin(\varphi) < 0$. Следовательно, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.
4. Пусть: $x < 0$, $y \geqslant 0$. Тогда: $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $\cos(\varphi) < 0$, $\sin(\varphi) \geqslant 0$. Следовательно, $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Тогда $\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$.
5. Пусть: $x < 0$, $y < 0$. Тогда: $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $\cos(\varphi) < 0$, $\sin(\varphi) < 0$. Следовательно, $\varphi \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$.

Пусть $z = 0$. Тогда: $|z| = 0$, $\arg^*_{-\pi}(z) = \pi$.

6.3. Основные функции комплексной переменной

Комплексная экспонента

Пусть $z \in \mathbb{C}$. Обозначим, $\exp_{\mathbb{C}}(z) = \exp(\mathrm{Re}\, z)\bigl(\cos(\mathrm{Im}\, z) + i \sin(\mathrm{Im}\, z)\bigr)$. Справедливы утверждения:

1. $\exp_{\mathbb{C}}(z_1) \exp_{\mathbb{C}}(z_2) = \exp_{\mathbb{C}}(z_1 + z_2)$ при z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$;
2. $\exp_{\mathbb{C}}(x) = \exp(x)$ при $x \in \mathbb{R}$;
3. $\exp_{\mathbb{C}}(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$ при $x \in \mathbb{R}$ (**формула Эйлера**).

Замечание (показательная форма записи комплексного числа). Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathrm{Arg}(z)$. Тогда: $z = |z| \bigl(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)\bigr) = |z| \exp_{\mathbb{C}}(i\varphi)$.

Пусть: $\rho \in [0, +\infty)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $z = \rho \cdot \exp_{\mathbb{C}}(i\varphi)$. Тогда: $\rho \in [0, +\infty)$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $z = \rho\bigl(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)\bigr)$. Следовательно: $\rho = |z|$, $\varphi \in \mathrm{Arg}(z)$.

Комплексный логарифм

Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Обозначим, $\mathrm{Ln}(z) = \bigl\{w \colon w \in \mathbb{C} \wedge \exp_{\mathbb{C}}(w) = z\bigr\}$.

Замечание. Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Очевидно:

$$w \in \mathrm{Ln}(z);$$
$$w \in \mathbb{C},\ \exp_{\mathbb{C}}(w) = z;$$
$$\bigl[\text{замена: } w \in \mathbb{C},\ u = \mathrm{Re}(w),\ v = \mathrm{Im}(w);\ u,\ v \in \mathbb{R},\ w = u + iv\bigr]$$
$$u,\ v \in \mathbb{R},\ \exp_{\mathbb{C}}(u + iv) = z;$$
$$u,\ v \in \mathbb{R},\ \exp(u) \exp_{\mathbb{C}}(iv) = z;$$

$$\begin{cases} u,\, v \in \mathbb{R}, \\ \exp(u) = |z|\,, \\ v \in \operatorname{Arg}(z); \end{cases}$$
$$\begin{cases} u = \ln\bigl(|z|\bigr), \\ v \in \operatorname{Arg}(z). \end{cases}$$

Комплексные тригонометрические и гиперболические тригонометрические функции

Пусть $x \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$\exp_{\mathbb{C}}(ix) = \cos(x) + i\sin(x),$$
$$\exp_{\mathbb{C}}(-ix) = \cos(x) - i\sin(x).$$

Следовательно:

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\bigl(\exp_{\mathbb{C}}(ix) + \exp_{\mathbb{C}}(-ix)\bigr),$$
$$\sin(x) = \frac{1}{2i}\bigl(\exp_{\mathbb{C}}(ix) - \exp_{\mathbb{C}}(-ix)\bigr).$$

Пусть $z \in \mathbb{C}$. Обозначим: $\cos_{\mathbb{C}}(z) = \frac{1}{2}\bigl(\exp_{\mathbb{C}}(iz) + \exp_{\mathbb{C}}(-iz)\bigr)$, $\sin_{\mathbb{C}}(z) = \frac{1}{2i}\bigl(\exp_{\mathbb{C}}(iz) - \exp_{\mathbb{C}}(-iz)\bigr)$.

Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $\cos_{\mathbb{C}}(z) \neq 0$. Обозначим, $\operatorname{tg}_{\mathbb{C}}(z) = \frac{\sin_{\mathbb{C}}(z)}{\cos_{\mathbb{C}}(z)}$.

Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $\sin_{\mathbb{C}}(z) \neq 0$. Обозначим, $\operatorname{ctg}_{\mathbb{C}}(z) = \frac{\cos_{\mathbb{C}}(z)}{\sin_{\mathbb{C}}(z)}$.

Пусть $z \in \mathbb{C}$. Обозначим: $\operatorname{ch}_{\mathbb{C}}(z) = \frac{1}{2}\bigl(\exp_{\mathbb{C}}(z) + \exp_{\mathbb{C}}(-z)\bigr)$, $\operatorname{sh}_{\mathbb{C}}(z) = \frac{1}{2}\bigl(\exp_{\mathbb{C}}(z) - \exp_{\mathbb{C}}(-z)\bigr)$.

Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{ch}_{\mathbb{C}}(z) \neq 0$. Обозначим, $\operatorname{th}_{\mathbb{C}}(z) = \frac{\operatorname{sh}_{\mathbb{C}}(z)}{\operatorname{ch}_{\mathbb{C}}(z)}$.

Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{sh}_{\mathbb{C}}(z) \neq 0$. Обозначим, $\operatorname{cth}_{\mathbb{C}}(z) = \frac{\operatorname{ch}_{\mathbb{C}}(z)}{\operatorname{sh}_{\mathbb{C}}(z)}$.

Возведение комплексного числа в целую степень

Пусть $z \in \mathbb{C}$. Обозначим: $z^0 = 1$, $z^1 = z$. Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 2$. Обозначим: $z_1, \ldots, z_n = z$, $z^n = z_1 \cdots z_n$. Справедливы утверждения:

1. $z^{n+1} = z^n z$ при: $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_+$;
2. $z^{n_1+n_2} = z^{n_1} z^{n_2}$ при: $z \in \mathbb{C}$, n_1, $n_2 \in \mathbb{Z}_+$;
3. $(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n$ при: z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \leqslant -2$. Обозначим, $z^n = (z^{-1})^{-n}$. Справедливы утверждения:

1. $z^{n+1} = z^n z$ при: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$;
2. $z^{n-1} = z^n z^{-1}$ при: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$;
3. $z^{n_1+n_2} = z^{n_1} z^{n_2}$ при: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, n_1, $n_2 \in \mathbb{Z}$;
4. $(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n$ при: z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, z_1, $z_2 \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Пусть: $\varphi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда: $\cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \neq 0$, $\bigl(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\bigr)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$ (**формула Муавра**).

Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда: $\exp_{\mathbb{C}}(z) \neq 0$, $\bigl(\exp_{\mathbb{C}}(z)\bigr)^n = \exp_{\mathbb{C}}(nz)$.

Возведение комплексного числа в рациональную степень

Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим, $\sqrt[n]{z} = \{w\colon w \in \mathbb{C} \wedge w^n = z\}$.

Замечание. Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1 \in \operatorname{Arg}(z)$. Тогда:

$$
\begin{gathered}
w \in \sqrt[n]{z};\\
w \in \mathbb{C},\ w^n = z;\\
\big[\text{замена: } w \in \mathbb{C},\ \rho_2 = |w|,\ \varphi_2 \in \operatorname{Arg}(w);\ \rho_2 \in [0, +\infty),\ \varphi_2 \in \mathbb{R},\ w = \rho_2 \exp_{\mathbb{C}}(i\varphi_2)\big]\\
\rho_2 \in [0, +\infty),\ \varphi_2 \in \mathbb{R},\ \big(\rho_2 \exp_{\mathbb{C}}(i\varphi_2)\big)^n = z;\\
\rho_2 \in [0, +\infty),\ \varphi_2 \in \mathbb{R},\ (\rho_2)^n \exp_{\mathbb{C}}(in\varphi_2) = z;\\
\begin{cases} \rho_2 \in [0, +\infty),\ \varphi_2 \in \mathbb{R},\\ (\rho_2)^n = |z|,\\ n\varphi_2 \in \operatorname{Arg}(z); \end{cases}\\
\begin{cases} \rho_2 \in [0, +\infty),\ \varphi_2 \in \mathbb{R},\\ (\rho_2)^n = |z|,\\ \exists k \in \mathbb{Z}\big(n\varphi_2 = \varphi_1 + 2\pi k\big); \end{cases}\\
\begin{cases} \rho_2 = \sqrt[n]{|z|},\\ \exists k \in \mathbb{Z}\Big(\varphi_2 = \dfrac{\varphi_1}{n} + \dfrac{2\pi k}{n}\Big). \end{cases}
\end{gathered}
$$

Пусть: $z = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$
\begin{gathered}
w \in \sqrt[n]{z};\\
w \in \mathbb{C},\ w^n = z;\\
w = 0.
\end{gathered}
$$

Пусть: $z \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, $z \neq 0 \vee \alpha \geqslant 0$. Выберем числа m, n, удовлетворяющие условиям: $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, m, n — взаимно простые числа, $\alpha = \frac{m}{n}$. Обозначим, $z^\alpha = \big(\sqrt[n]{z}\big)^m$.

Возведение комплексного числа в комплексную степень

Пусть: z, $\alpha \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Обозначим, $z^\alpha = \exp_{\mathbb{C}}\big(\alpha \operatorname{Ln}(z)\big)$.

Лекция 7. Линейное пространство

7.1. Определение линейного пространства

Замечание. Пусть M — множество.

Пусть: F — функция, $\mathrm{D}(F) = M^2$. Далее часто будем писать $x + y$ вместо $F(x, y)$.

Пусть: F — функция, $\mathrm{D}(F) = M^2$, $\forall x \in M \forall y \in M(x + y \in M)$. Тогда: F — функция, $\mathrm{D}(F) = M^2$, $\mathrm{R}(F) \subseteq M$. Следовательно, $F\colon M^2 \implies M$.

Пусть $F\colon M^2 \implies M$. Тогда: F — функция, $\mathrm{D}(F) = M^2$, $\mathrm{R}(F) \subseteq M$. Следовательно: F — функция, $\mathrm{D}(F) = M^2$, $\forall x \in M \forall y \in M(x + y \in M)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; M — множество.

Пусть: F — функция, $\mathrm{D}(F) = \mathbb{K} \times M$. Далее часто будем писать λx вместо $F(\lambda, x)$.

Пусть: F — функция, $\mathrm{D}(F) = \mathbb{K} \times M$, $\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x \in M(\lambda x \in M)$. Тогда: F — функция, $\mathrm{D}(F) = \mathbb{K} \times M$, $\mathrm{R}(F) \subseteq M$. Следовательно, $F\colon \mathbb{K} \times M \implies M$.

Пусть $F\colon \mathbb{K} \times M \implies M$. Тогда: F — функция, $\mathrm{D}(F) = \mathbb{K} \times M$, $\mathrm{R}(F) \subseteq M$. Следовательно: F — функция, $\mathrm{D}(F) = \mathbb{K} \times M$, $\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x \in M(\lambda x \in M)$.

Определение (линейное пространство). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; M — множество, $F_1\colon M^2 \implies M$, $F_2\colon \mathbb{K} \times M \implies M$.

Пусть существует объект $u \in M$, удовлетворяющий условиям:

1. $x + y = y + x$ при x, $y \in M$;
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ при x, y, $z \in M$;
3. $x + u = x$ при $x \in M$;
4. $\forall x \in M \exists y \in M(x + y = u)$;
5. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ при: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in M$;
6. $1x = x$ при $x \in M$;
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ при: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in M$;
8. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in M$.

Будем говорить, что F_1, F_2 — линейные операции на множестве M.

Будем говорить, что: (M, F_1, F_2) — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; M — носитель пространства (M, F_1, F_2); F_1 — операция сложения пространства (M, F_1, F_2); F_2 — операция умножения пространства (M, F_1, F_2); F_1, F_2 — линейные операции пространства (M, F_1, F_2). Будем говорить, что x — вектор пространства (M, F_1, F_2), если $x \in M$. Далее часто будем отождествлять пространство (M, F_1, F_2) и множество M.

Определение (нулевой вектор линейного пространства). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Будем говорить, что u — нулевой вектор пространства L, если: $u \in L$, $\forall x \in L(x + u = x)$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*. Существует единственный объект* u*, удовлетворяющий условию:* u *— нулевой вектор пространства* L*.*

Доказательство. Так как L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, то существует объект u, удовлетворяющий условию: u — нулевой вектор пространства L.

Пусть u_1, u_2 — нулевые векторы пространства L. Так как: $u_1 \in L$, u_2 — нулевой вектор пространства L, то $u_1 + u_2 = u_1$. Так как: u_1 — нулевой вектор пространства L, $u_2 \in L$, то: $u_1 + u_2 = u_2 + u_1 = u_2$. Тогда $u_1 = u_2$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Далее часто будем обозначать через θ нулевой вектор пространства L.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*. Тогда* $\forall x \in L \exists y \in L(x + y = \theta)$.

Доказательство. Так как L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, то существует объект u, удовлетворяющий условиям: u — нулевой вектор пространства L, $\forall x \in L \exists y \in L(x + y = u)$. Так как u, θ — нулевые векторы пространства L, то $u = \theta$. Тогда $\forall x \in L \exists y \in L(x + y = \theta)$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$; a, $b \in L$. *Существует единственный вектор* x*, удовлетворяющий условиям:* $x \in L$, $a + x = b$.

Доказательство. Так как $a \in L$, то существует вектор $\tilde{a}$, удовлетворяющий условиям: $\tilde{a} \in L$, $a + \tilde{a} = \theta$.

Пусть: $x \in L$, $a + x = b$. Тогда:

$$\begin{aligned} \tilde{a} + (a + x) &= \tilde{a} + b, \\ (\tilde{a} + a) + x &= \tilde{a} + b, \\ (a + \tilde{a}) + x &= \tilde{a} + b, \\ \theta + x &= \tilde{a} + b, \\ x + \theta &= \tilde{a} + b, \\ x &= \tilde{a} + b. \end{aligned}$$

Пусть: $x_1 \in L$, $a + x_1 = b$, $x_2 \in L$, $a + x_2 = b$. Тогда: $x_1 = \tilde{a} + b$, $x_2 = \tilde{a} + b$. Следовательно, $x_1 = x_2$.

Пусть $x = \tilde{a} + b$. Тогда: $x \in L$, $a + x = a + (\tilde{a} + b) = (a + \tilde{a}) + b = \theta + b = b + \theta = b$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$.

1. *Пусть* $x \in L$. *Тогда* $0x = \theta$.
2. *Пусть* $x \in L$. *Тогда* $x + (-1)x = \theta$.
3. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Тогда* $\lambda\theta = \theta$.

Доказательство.

1. Очевидно: $0x + 0x = (0 + 0)x = 0x$. С другой стороны, $0x + \theta = 0x$. Тогда $0x = \theta$.
2. Очевидно: $x + (-1)x = 1x + (-1)x = \big(1 + (-1)\big)x = 0x = \theta$.
3. Очевидно: $\lambda\theta = \lambda(0\theta) = 0(\lambda\theta) = \theta$. □

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть $x \in L$. Обозначим, $-x = (-1)x$. Очевидно: $-x \in L$, $x + (-x) = \theta$. Будем говорить, что $-x$ — противоположный вектор к вектору x.

Пусть x, $y \in L$. Обозначим, $y - x = (-1)x + y$. Очевидно: $y - x \in L$, $x + (y - x) = y$. Будем говорить, что $y - x$ — разность векторов y, x.

Замечание (основные свойства линейного пространства). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; (M, F_1, F_2) — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, θ — нулевой элемент пространства (M, F_1, F_2). Тогда: M — множество, $F_1\colon M^2 \implies M$, $F_2\colon \mathbb{K} \times M \implies M$, $\theta \in M$.

1. Пусть x, $y \in M$. Тогда $x + y = y + x$.
2. Пусть x, y, $z \in M$. Тогда $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. Пусть $x \in M$. Тогда $x + \theta = x$.
4. Пусть $x \in M$. Тогда $x + (-1)x = \theta$.
5. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in M$. Тогда $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

6. Пусть $x \in M$. Тогда $1x = x$.
7. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in M$. Тогда $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
8. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in M$. Тогда $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.
9. Пусть $x \in M$. Тогда $0x = \theta$.
10. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда $\lambda\theta = \theta$.
11. Пусть a, $b \in M$. Существует единственный вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in M$, $a + x = b$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; M — множество, $F_1\colon M^2 \implies M$, $F_2\colon \mathbb{K} \times M \implies M$, $\theta \in M$.

Пусть:
1. $x + y = y + x$ при x, $y \in M$;
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ при x, y, $z \in M$;
3. $x + \theta = x$ при $x \in M$;
4. $\forall x \in M \exists y \in M(x + y = \theta)$;
5. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ при: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in M$;
6. $1x = x$ при $x \in M$;
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ при: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in M$;
8. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in M$.

Очевидно: (M, F_1, F_2) — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, θ — нулевой вектор пространства (M, F_1, F_2).

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; M — множество, $F_1\colon M^2 \implies M$, $F_2\colon \mathbb{K} \times M \implies M$, $\theta \in M$.

Пусть:
1. $x + y = y + x$ при x, $y \in M$;
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ при x, y, $z \in M$;
3. $x + \theta = x$ при $x \in M$;
4. $x + (-1)x = \theta$ при $x \in M$;
5. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ при: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in M$;
6. $1x = x$ при $x \in M$;
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ при: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in M$;
8. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in M$.

Очевидно: (M, F_1, F_2) — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, θ — нулевой вектор пространства (M, F_1, F_2).

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество $\mathbb{K}^N$.

Пусть x, $y \in \mathbb{K}^N$. Обозначим:

$$x + y = \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ \vdots \\ x^N + y^N \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $x+y \in \mathbb{K}^N$. Будем говорить, что $\{x+y\}_{x,y \in \mathbb{K}^N}$ — стандартная операция сложения на множестве $\mathbb{K}^N$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}^N$. Обозначим:

$$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x^1 \\ \vdots \\ \lambda x^N \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\lambda x \in \mathbb{K}^N$. Будем говорить, что $\{\lambda x\}_{\lambda \in \mathbb{K},\, x \in \mathbb{K}^N}$ — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\mathbb{K}^N$.

Обозначим:

$$\tilde{\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\tilde{\theta} \in \mathbb{K}^N$. Будем говорить, что $\tilde{\theta}$ — стандартный нулевой элемент множества $\mathbb{K}^N$.

Утверждение (линейное пространство $\mathbb{K}^N$)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $N \in \mathbb{N}$*,* F_1 *— стандартная операция сложения на множестве* $\mathbb{K}^N$*,* F_2 *— стандартная внешняя операция умножения на множестве* $\mathbb{K}^N$*,* $\tilde{\theta}$ *— стандартный нулевой элемент множества* $\mathbb{K}^N$*. Тогда:* $(\mathbb{K}^N, F_1, F_2)$ *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $\tilde{\theta}$ *— нулевой вектор пространства* $(\mathbb{K}^N, F_1, F_2)$*.*

Доказательство.

1. Пусть x, $y \in \mathbb{K}^N$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(x + y)^j = x^j + y^j = y^j + x^j = (y + x)^j.$$

Следовательно, $x + y = y + x$.

2. Пусть x, y, $z \in \mathbb{K}^N$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big((x + y) + z\big)^j = (x^j + y^j) + z^j = x^j + (y^j + z^j) = \big(x + (y + z)\big)^j.$$

Следовательно, $(x + y) + z = x + (y + z)$.

3. Пусть $x \in \mathbb{K}^N$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(x + \tilde{\theta})^j = x^j + \tilde{\theta}^j = x^j + 0 = x^j.$$

Следовательно, $x + \tilde{\theta} = x$.

4. Пусть $x \in \mathbb{K}$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big(x + (-1)x\big)^j = x^j + (-1)x^j = 0 = \tilde{\theta}^j.$$

Следовательно, $x + (-1)x = \tilde{\theta}$.

5. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}^N$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big((\alpha\beta)x\big)^j = (\alpha\beta)x^j = \alpha(\beta x^j) = \big(\alpha(\beta x)\big)^j.$$

Следовательно, $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

6. Пусть $x \in \mathbb{K}^N$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(1x)^j = 1x^j = x^j.$$

Следовательно, $1x = x$.

7. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}^N$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big((\alpha + \beta)x\big)^j = (\alpha + \beta)x^j = \alpha x^j + \beta x^j = (\alpha x + \beta x)^j.$$

Следовательно, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

8. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in \mathbb{K}^N$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big(\lambda(x+y)\big)^j = \lambda(x^j + y^j) = \lambda x^j + \lambda y^j = (\lambda x + \lambda y)^j.$$

Следовательно, $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$.

Итак: $(\mathbb{K}^N, F_1, F_2)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\tilde{\theta}$ — нулевой вектор пространства $(\mathbb{K}^N, F_1, F_2)$. □

Утверждение (линейное пространство $\vec{E}^N$)**.** *Пусть: $N = \overline{1, 3}$, F_1 — стандартная операция сложения на множестве $\vec{E}^N$, F_2 — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\vec{E}^N$, θ — стандартный нулевой элемент множества $\vec{E}^N$. Тогда: $(\vec{E}^N, F_1, F_2)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, θ — нулевой вектор пространства $(\vec{E}^N, F_1, F_2)$.*

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

Пусть A, $B \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Обозначим:

$$(A+B)_i^j = A_i^j + B_i^j, \quad i = \overline{1, N_1},\ j = \overline{1, N_2}.$$

Очевидно, $A+B \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Будем говорить, что $\{A+B\}_{A,B \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}}$ — стандартная операция сложения на множестве $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Обозначим:

$$(\lambda A)_i^j = \lambda A_i^j, \quad i = \overline{1, N_1},\ j = \overline{1, N_2}.$$

Очевидно, $\lambda A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Будем говорить, что $\{\lambda A\}_{\lambda \in \mathbb{K},\, A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}}$ — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

Обозначим:

$$\Theta_i^j = 0, \quad i = \overline{1, N_1},\ j = \overline{1, N_2}.$$

Очевидно, $\Theta \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Будем говорить, что Θ — стандартный нулевой элемент множества $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

Утверждение (линейное пространство $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$)**.** *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$, F_1 — стандартная операция сложения на множестве $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, F_2 — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, Θ — стандартный нулевой элемент множества $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Тогда: $(\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}, F_1, F_2)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, Θ — нулевой вектор пространства $(\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}, F_1, F_2)$.*

Доказательство.

1. Пусть A, $B \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Пусть $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$(A+B)_i^j = A_i^j + B_i^j = B_i^j + A_i^j = (B+A)_i^j.$$

Следовательно, $A + B = B + A$.

2. Пусть A, B, $C \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Пусть $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$\big((A+B)+C\big)_i^j = (A_i^j + B_i^j) + C_i^j = A_i^j + (B_i^j + C_i^j) = \big(A + (B+C)\big)_i^j.$$

Следовательно, $(A+B)+C = A+(B+C)$.

3. Пусть $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Пусть $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$(A + \Theta)_i^j = A_i^j + \Theta_i^j = A_i^j + 0 = A_i^j.$$

Следовательно, $A + \Theta = A$.

4. Пусть $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Пусть $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$\big(A + (-1)A\big)_i^j = A_i^j + (-1)A_i^j = 0 = \Theta_i^j.$$

Следовательно, $A + (-1)A = \Theta$.

5. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Пусть $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$\big((\alpha\beta)A\big)_i^j = (\alpha\beta)A_i^j = \alpha(\beta A_i^j) = \big(\alpha(\beta A)\big)_i^j.$$

Следовательно, $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

6. Пусть $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Пусть $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$(1A)_i^j = 1A_i^j = A_i^j.$$

Следовательно, $1A = A$.

7. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Пусть $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$\big((\alpha + \beta)A\big)_i^j = (\alpha + \beta)A_i^j = \alpha A_i^j + \beta A_i^j = (\alpha A + \beta A)_i^j.$$

Следовательно, $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

8. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, A, $B \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Пусть $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$\big(\lambda(A + B)\big)_i^j = \lambda(A_i^j + B_i^j) = \lambda A_i^j + \lambda B_i^j = (\lambda A + \lambda B)_i^j.$$

Следовательно, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

Итак: $(\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}, F_1, F_2)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, Θ — нулевой элемент пространства $(\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}, F_1, F_2)$. □

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Рассмотрим множество $P(L)$ (здесь $P(L) = \{Q \colon Q \subseteq L\}$).

Пусть Q_1, $Q_2 \subseteq L$. Обозначим:

$$Q_1 + Q_2 = \{x_1 + x_2 \colon x_1 \in Q_1 \wedge x_2 \in Q_2\} = \big\{u \colon \exists x_1 \exists x_2 (x_1 \in Q_1 \wedge x_2 \in Q_2 \wedge u = x_1 + x_2)\big\}.$$

Очевидно, $Q_1 + Q_2 \subseteq L$. Будем говорить, что $\{Q_1 + Q_2\}_{Q_1, Q_2 \subseteq L}$ — стандартная операция сложения на множестве $P(L)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $Q \subseteq L$. Обозначим:

$$\lambda Q = \{\lambda x \colon x \in Q\} = \big\{u \colon \exists x (x \in Q \wedge u = \lambda x)\big\}.$$

Очевидно, $\lambda Q \subseteq L$. Будем говорить, что $\{\lambda Q\}_{\lambda \in \mathbb{K},\, Q \subseteq L}$ — стандартная внешняя операция умножения на множестве $P(L)$.

Очевидно, $\{\theta\} \subseteq L$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$.

1. *Пусть* Q_1, $Q_2 \subseteq L$. *Тогда* $Q_1 + Q_2 = Q_2 + Q_1$.
2. *Пусть* Q_1, Q_2, $Q_3 \subseteq L$. *Тогда* $(Q_1 + Q_2) + Q_3 = Q_1 + (Q_2 + Q_3)$.

3. *Пусть $Q \subseteq L$. Тогда $Q + \{\theta\} = Q$.*
4. *Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $Q \subseteq L$. Тогда $(\alpha\beta)Q = \alpha(\beta Q)$.*
5. *Пусть $Q \subseteq L$. Тогда $1Q = Q$.*
6. *Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, Q_1, $Q_2 \subseteq L$. Тогда $\lambda(Q_1 + Q_2) = \lambda Q_1 + \lambda Q_2$.*
7. *Справедливо утверждение $0\varnothing = \varnothing$. Пусть: $Q \subseteq L$, $Q \neq \varnothing$. Тогда $0Q = \{\theta\}$.*
8. *Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда $\lambda\{\theta\} = \{\theta\}$.*

Доказательство.

1. Пусть $x \in Q_1 + Q_2$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x = x_1 + x_2$. Следовательно:

$$x = x_1 + x_2 = x_2 + x_1 \in Q_2 + Q_1.$$

Пусть $x \in Q_2 + Q_1$. Тогда существуют векторы x_2, x_1, удовлетворяющие условиям: $x_2 \in Q_2$, $x_1 \in Q_1$, $x = x_2 + x_1$. Следовательно:

$$x = x_2 + x_1 = x_1 + x_2 \in Q_1 + Q_2.$$

Итак, $Q_1 + Q_2 = Q_2 + Q_1$.

2. Пусть $x \in (Q_1 + Q_2) + Q_3$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, x_3, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x_3 \in Q_3$, $x = (x_1 + x_2) + x_3$. Следовательно:

$$x = (x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3) \in Q_1 + (Q_2 + Q_3).$$

Пусть $x \in Q_1 + (Q_2 + Q_3)$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, x_3, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x_3 \in Q_3$, $x = x_1 + (x_2 + x_3)$. Следовательно:

$$x = x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3 \in (Q_1 + Q_2) + Q_3.$$

Итак, $(Q_1 + Q_2) + Q_3 = Q_1 + (Q_2 + Q_3)$.

3. Пусть $x \in Q + \{\theta\}$. Тогда существует вектор x_1, удовлетворяющий условиям: $x_1 \in Q$, $x = x_1 + \theta$. Следовательно:

$$x = x_1 + \theta = x_1 \in Q.$$

Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$x = x + \theta \in Q + \{\theta\}.$$

Итак, $Q + \{\theta\} = Q$.

4. Пусть $x \in (\alpha\beta)Q$. Тогда существует вектор x_1, удовлетворяющий условиям: $x_1 \in Q$, $x = (\alpha\beta)x_1$. Следовательно:

$$x = (\alpha\beta)x_1 = \alpha(\beta x_1) \in \alpha(\beta Q).$$

Пусть $x \in \alpha(\beta Q)$. Тогда существует вектор x_1, удовлетворяющий условиям: $x_1 \in Q$, $x = \alpha(\beta x_1)$. Следовательно:

$$x = \alpha(\beta x_1) = (\alpha\beta)x_1 \in (\alpha\beta)Q.$$

Итак, $(\alpha\beta)Q = \alpha(\beta Q)$.

5. Пусть $x \in 1Q$. Тогда существует вектор x_1, удовлетворяющий условиям: $x_1 \in Q$, $x = 1x_1$. Следовательно:

$$x = 1x_1 = x_1 \in Q.$$

Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$x = 1x \in 1Q.$$

Итак, $1Q = Q$.

6. Пусть $x \in \lambda(Q_1 + Q_2)$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x = \lambda(x_1 + x_2)$. Следовательно:

$$x = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 \in \lambda Q_1 + \lambda Q_2.$$

Пусть $x \in \lambda Q_1 + \lambda Q_2$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q$, $x_2 \in Q_2$, $x = \lambda x_1 + \lambda x_2$. Следовательно:

$$x = \lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + x_2) \in \lambda(Q_1 + Q_2).$$

Итак, $\lambda(Q_1 + Q_2) = \lambda Q_1 + \lambda Q_2$.

7. Очевидно, $0\varnothing = \varnothing$. Пусть: $Q \subseteq L$, $Q \neq \varnothing$. Пусть $x \in 0Q$. Тогда существует вектор x_1, удовлетворяющий условиям: $x_1 \in Q$, $x = 0x_1$. Следовательно:

$$x = 0x_1 = \theta \in \{\theta\}.$$

Пусть $x \in \{\theta\}$. Тогда $x = \theta$. Так как $Q \neq \varnothing$, то существует вектор x_1, удовлетворяющий условию $x_1 \in Q$. Тогда:

$$x = \theta = 0x_1 \in 0Q.$$

Итак, $0Q = \{\theta\}$.

8. Пусть $x \in \lambda\{\theta\}$. Тогда $x = \lambda\theta$. Следовательно:

$$x = \lambda\theta = \theta \in \{\theta\}.$$

Пусть $x \in \{\theta\}$. Тогда $x = \theta$. Следовательно:

$$x = \theta = \lambda\theta \in \lambda\{\theta\}. \quad \square$$

7.2. Линейная комбинация векторов, линейная зависимость векторов

Определение (линейная комбинация векторов). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, $x_1, \ldots, x_r \in L$.

Будем говорить, что $\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda^k x_k$ — линейная комбинация векторов $x_1, \ldots, x_r$ с коэффициентами $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$.

Далее часто будем писать $\lambda^k x_k$ вместо $\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda^k x_k$ (частный случай *правила суммирования Эйнштейна*).

Определение (линейная оболочка векторов, линейная зависимость векторов, линейная независимость векторов). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in L$.

Обозначим:

$$L(x_1, \ldots, x_r) = \{\lambda^k x_k \colon \lambda^1 \in \mathbb{K} \wedge \cdots \wedge \lambda^r \in \mathbb{K}\} =$$
$$= \big\{u \colon \exists \lambda^1 \cdots \exists \lambda^r (\lambda^1 \in \mathbb{K} \wedge \cdots \wedge \lambda^r \in \mathbb{K} \wedge u = \lambda^k x_k)\big\}.$$

Очевидно, $L(x_1, \ldots, x_r) \subseteq L$. Будем говорить, что $L(x_1, \ldots, x_r)$ — линейная оболочка векторов $x_1, \ldots, x_r$. Пусть $k = \overline{1, r}$. Тогда: $x_k = \delta_k^m x_m \in L(x_1, \ldots, x_r)$ (здесь: $\delta_k^m = 0$ при: k, $m = \overline{1, r}$, $k \neq m$; $\delta_k^m = 1$ при: k, $m = \overline{1, r}$, $k = m$).

Будем говорить, что по любой линейной комбинации векторов $x_1, \ldots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты, если для любых чисел $\alpha^1, \ldots, \alpha^r$, $\beta^1, \ldots, \beta^r$, удовлетворяющих условиям: $\alpha^1, \ldots, \alpha^r$, $\beta^1, \ldots, \beta^r \in \mathbb{K}$, $\alpha^k x_k = \beta^k x_k$, справедливо утверждение $\forall k = \overline{1, r} (\alpha^k = \beta^k)$.

Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы, если существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, $\lambda^k x_k = \theta$, $\exists k = \overline{1, r} (\lambda^k \neq 0)$.

Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы, если для любых чисел $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$, удовлетворяющих условиям: $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, $\lambda^k x_k = \theta$, справедливо утверждение $\forall k = \overline{1, r} (\lambda^k = 0)$.

Утверждение (критерий линейной зависимости векторов)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

1. Пусть $x \in L$*. Вектор* x *является линейно зависимым тогда и только тогда, когда* $x = \theta$*.*

2. Пусть: $r \in \mathbb{Z}$*,* $r \geqslant 2$*,* $x_1, \ldots, x_r \in L$*. Векторы* $x_1, \ldots, x_r$ *являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда существует номер* $k_0 = \overline{1, r}$*, удовлетворяющий условию* $x_{k_0} \in L(x_1, \ldots, x_{k_0 - 1}, x_{k_0 + 1}, \ldots, x_r)$*.*

Доказательство.

1. Пусть x — линейно зависимый вектор. Тогда существует число $\lambda \in \mathbb{K}$, удовлетворяющее условиям: $\lambda x = \theta$, $\lambda \neq 0$. Следовательно, $x = \theta$.

Пусть $x = \theta$. Тогда $1x = \theta$. Так как $1 \neq 0$, то x — линейно зависимый вектор.

2. Пусть $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы. Тогда существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^N \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^k x_k = \theta$, $\exists k = \overline{1, r} (\lambda^k \neq 0)$. Выберем номер $k_0 = \overline{1, r}$, удовлетворяющий условию $\lambda^{k_0} \neq 0$. Тогда:

$$\lambda^1 x_1 + \cdots + \lambda^{k_0 - 1} x_{k_0 - 1} + \lambda^{k_0} x_{k_0} + \lambda^{k_0 + 1} x_{k_0 + 1} + \cdots + \lambda^r x_r = \theta,$$
$$x_{k_0} = \frac{-\lambda^1}{\lambda_{k_0}} x_1 + \cdots + \frac{-\lambda^{k_0 - 1}}{\lambda_{k_0}} x_{k_0 - 1} + \frac{-\lambda^{k_0 + 1}}{\lambda_{k_0}} x_{k_0 + 1} + \cdots + \frac{-\lambda^r}{\lambda_{k_0}} x_r,$$
$$x_{k_0} \in L(x_1, \ldots, x_{k_0 - 1}, x_{k_0 + 1}, \ldots, x_r).$$

Пусть существует номер $k_0 = \overline{1, r}$, удовлетворяющий условию $x_{k_0} \in L(x_1, \ldots, x_{k_0 - 1}, x_{k_0 + 1}, \ldots, x_r)$. Тогда существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^{k_0 - 1}$, $\lambda^{k_0 + 1}, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию:

$$x_{k_0} = \lambda^1 x_1 + \cdots + \lambda^{k_0 - 1} x_{k_0 - 1} + \lambda^{k_0 + 1} x_{k_0 + 1} + \cdots + \lambda^r x_r.$$

Следовательно:

$$(-\lambda^1) x_1 + \cdots + (-\lambda^{k_0 - 1}) x_{k_0 - 1} + 1 x_{k_0} + (-\lambda^{k_0 + 1}) x_{k_0 + 1} + \cdots + (-\lambda^r) x_r = \theta.$$

Так как $1 \neq 0$, то $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы. □

Утверждение (критерий линейной независимости векторов)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r \in L$*. Векторы* $x_1, \ldots, x_r$ *являются линейно независимыми тогда и только тогда, когда по любой линейной комбинации векторов* $x_1, \ldots, x_r$ *однозначно восстанавливаются её коэффициенты.*

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы. Пусть: $\alpha^1, \ldots, \alpha^r$, $\beta^1, \ldots, \beta^r \in \mathbb{K}$, $\alpha^k x_k = \beta^k x_k$. Тогда $(\alpha^k - \beta^k)x_k = \theta$. Так как $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы, то $\forall k = \overline{1, r}(\alpha^k - \beta^k = 0)$. Тогда $\forall k = \overline{1, r}(\alpha^k = \beta^k)$. Следовательно, по любой линейной комбинации векторов $x_1, \ldots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты.

Пусть по любой линейной комбинации векторов $x_1, \ldots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты. Пусть: $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, $\lambda^k x_k = \theta$. Тогда:

$$\lambda^1 x_1 + \cdots + \lambda^r x_r = 0x_1 + \cdots + 0x_r.$$

Так как по любой линейной комбинации векторов $x_1, \ldots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты, то $\forall k = \overline{1, r}(\lambda^k = 0)$. Тогда $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r$*,* $x \in L$*,* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно независимые векторы,* $x_1, \ldots, x_r$*,* x *— линейно зависимые векторы. Тогда* $x \in L(x_1, \ldots, x_r)$*.*

Доказательство. Так как $x_1, \ldots, x_r$, x — линейно зависимые векторы, то существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^{r+1} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1 x_1 + \cdots + \lambda^r x_r + \lambda^{r+1} x = \theta$, $\exists k = \overline{1, r+1}(\lambda^k \neq 0)$. Предположим, что $\lambda^{r+1} = 0$. Тогда: $\lambda^1 x_1 + \cdots + \lambda^r x_r = \theta$, $\exists k = \overline{1, r}(\lambda^k \neq 0)$ (что противоречит утверждению: $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы). Итак, $\lambda^{r+1} \neq 0$. Тогда:

$$x = \frac{-\lambda^1}{\lambda^{r+1}} x_1 + \cdots + \frac{-\lambda^r}{\lambda^{r+1}} x_r,$$
$$x \in L(x_1, \ldots, x_r). \quad \square$$

Замечание (перестановки).

1. Пусть M — некоторое множество.

Будем говорить, что σ — перестановка множества M, если: σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma) = M$, $\mathrm{R}(\sigma) = M$.

Обозначим через $S(M)$ множество всех перестановок множества M.

Пусть σ_1, $\sigma_2 \in S(M)$. Обозначим, $\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2 \circ \sigma_1$. Очевидно: $\sigma_2\sigma_1$ — обратимая функция,

$$\mathrm{D}(\sigma_2\sigma_1) = \bigl\{x \colon x \in \mathrm{D}(\sigma_1) \wedge \sigma_1(x) \in \mathrm{D}(\sigma_2)\bigr\} = \bigl\{x \colon x \in M \wedge \sigma_1(x) \in M\bigr\} = \{x \colon x \in M\} = M,$$
$$\mathrm{R}(\sigma_2\sigma_1) = (\sigma_2\sigma_1)[M] = \sigma_2\bigl[\sigma_1[M]\bigr] = \sigma_2\bigl[\mathrm{R}(\sigma_1)\bigr] = \sigma_2[M] = \mathrm{R}(\sigma_2) = M.$$

Тогда $\sigma_2\sigma_1 \in S(M)$.

Обозначим: $e(x) = x$ при $x \in M$. Очевидно, $e \in S(M)$.

Пусть $\sigma \in S(M)$. Очевидно: σ^{-1} — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma^{-1}) = \mathrm{R}(\sigma) = M$, $\mathrm{R}(\sigma^{-1}) = \mathrm{D}(\sigma) = M$. Тогда $\sigma^{-1} \in S(M)$.

Пусть σ_1, σ_2, $\sigma_3 \in S(M)$. Очевидно, $(\sigma_3\sigma_2)\sigma_1 = \sigma_3(\sigma_2\sigma_1)$.

Пусть $\sigma \in S(M)$. Очевидно: $\sigma e = \sigma$, $e\sigma = \sigma$.

Пусть $\sigma \in S(M)$. Очевидно: $\sigma\sigma^{-1} = e$, $\sigma^{-1}\sigma = e$.

2. Пусть: M — некоторое **конечное** множество, σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma) = M$, $\mathrm{R}(\sigma) \subseteq M$. Так как $\mathrm{D}(\sigma)$ — конечное множество, то $\mathrm{R}(\sigma)$ — конечное множество. Так как σ — обратимая функция, то: $\mathrm{card}\big(\mathrm{R}(\sigma)\big) = \mathrm{card}\big(\mathrm{D}(\sigma)\big) = \mathrm{card}(M)$. Так как: $\mathrm{R}(\sigma) \subseteq M$, $\mathrm{card}\big(\mathrm{R}(\sigma)\big) = \mathrm{card}(M)$, то $\mathrm{R}(\sigma) = M$. Тогда $\sigma \in S(M)$.

3. Обозначим, $S_0 = S(\varnothing)$.
Пусть $r \in \mathbb{N}$. Обозначим, $S_r = S\big(\{1, \ldots, r\}\big)$.

4. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_r = \overline{1, r}$, $k_1, \ldots, k_r$ — различные числа. Обозначим: $\sigma(1) = k_1, \ldots, \sigma(r) = k_r$. Очевидно: σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma) = \{1, \ldots, r\}$, $\mathrm{R}(\sigma) \subseteq \{1, \ldots, r\}$. Тогда $\sigma \in S_r$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r \in L$*,* $\sigma \in S_r$*,* $x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)}$ *— линейно зависимые векторы. Тогда* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно зависимые векторы.*

Доказательство. Так как $x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)}$ — линейно зависимые векторы, то существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1 x_{\sigma(1)} + \cdots + \lambda^r x_{\sigma(r)} = \theta$, $\exists m = \overline{1, r}(\lambda^m \neq 0)$. Тогда:

$$\lambda^{\sigma^{-1}(1)} x_1 + \cdots + \lambda^{\sigma^{-1}(r)} x_r = \theta, \quad \exists k = \overline{1, r}(\lambda^{\sigma^{-1}(k)} \neq 0).$$

Следовательно, $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r \in L$*,* $r_0 \in \mathbb{N}$*,* $k_1, \ldots, k_{r_0} = \overline{1, r}$*,* $k_1 < \cdots < k_{r_0}$*,* $x_{k_1}, \ldots, x_{k_{r_0}}$ *— линейно зависимые векторы. Тогда* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно зависимые векторы.*

Доказательство. Так как $x_{k_1}, \ldots, x_{k_{r_0}}$ — линейно зависимые векторы, то существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{r_0} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условиям: $\alpha^1 x_{k_1} + \cdots + \alpha^{r_0} x_{k_{r_0}} = \theta$, $\exists m = \overline{1, r_0}(\alpha^m \neq 0)$. Обозначим: $\beta^{k_1} = \alpha^1, \ldots, \beta^{k_{r_0}} = \alpha^{r_0}$, $\beta^k = 0$ при: $k = \overline{1, r}$, $k \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$. Тогда:

$$\beta^{k_1} x_{k_1} + \cdots + \beta^{k_{r_0}} x_{k_{r_0}} = \theta, \quad \exists m = \overline{1, r_0}(\beta^{k_m} \neq 0);$$
$$\beta^1 x_1 + \cdots + \beta^r x_r = \theta, \quad \exists k = \overline{1, r}(\beta^k \neq 0).$$

Следовательно, $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы. □

7.3. Подпространство линейного пространства

Определение (ядро векторной функции). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; F — функция, $\mathrm{R}(F) \subseteq L$. Обозначим:

$$\ker(F) = \big\{x \colon x \in \mathrm{D}(F) \wedge F(x) = \theta\big\}.$$

Множество $\ker(F)$ называется ядром функции F или множеством нулей функции F или множеством корней функции F. Очевидно:

$$\ker(F) = \big\{x \colon x \in \mathrm{D}(F) \wedge F(x) = \theta\big\} = \big\{x \colon x \in \mathrm{D}(F) \wedge F(x) \in \{\theta\}\big\} = \mathrm{D}\big(F, \{\theta\}\big).$$

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; Q — множество, L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Рассмотрим множество $\mathrm{Fun}(Q, L)$.

Пусть φ_1, $\varphi_2\colon Q \implies L$. Обозначим:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \quad x \in Q.$$

Очевидно, $\varphi_1 + \varphi_2\colon Q \implies L$. Будем говорить, что $\{\varphi_1 + \varphi_2\}_{\varphi_1, \varphi_2\colon Q \implies L}$ — стандартная операция сложения на множестве $\mathrm{Fun}(Q, L)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\varphi\colon Q \implies L$. Обозначим:

$$(\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x), \quad x \in Q.$$

Очевидно, $\lambda\varphi\colon Q \implies L$. Будем говорить, что $\{\lambda\varphi\}_{\lambda \in \mathbb{K},\, \varphi\colon Q \implies L}$ — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\mathrm{Fun}(Q, L)$.

Обозначим:

$$\Theta(x) = \theta, \quad x \in Q.$$

Очевидно, $\Theta\colon Q \implies L$. Будем говорить, что Θ — стандартный нулевой элемент множества $\mathrm{Fun}(Q, L)$.

Утверждение (линейное пространство векторных функций)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* Q *— множество,* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* F_1 *— стандартная операция сложения на множестве* $\mathrm{Fun}(Q, L)$*,* F_2 *— стандартная внешняя операция умножения на множестве* $\mathrm{Fun}(Q, L)$*,* Θ *— стандартный нулевой элемент множества* $\mathrm{Fun}(Q, L)$*. Тогда:* $\big(\mathrm{Fun}(Q, L), F_1, F_2\big)$ *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* Θ *— нулевой вектор пространства* $\big(\mathrm{Fun}(Q, L), F_1, F_2\big)$*.*

Доказательство.

1. Пусть φ_1, $\varphi_2\colon Q \implies L$. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = \varphi_2(x) + \varphi_1(x) = (\varphi_2 + \varphi_1)(x).$$

Следовательно, $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_2 + \varphi_1$.

2. Пусть φ_1, φ_2, $\varphi_3\colon Q \implies L$. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$\big((\varphi_1 + \varphi_2) + \varphi_3\big)(x) = \big(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\big) + \varphi_3(x) = \varphi_1(x) + \big(\varphi_2(x) + \varphi_3(x)\big) = \\ = \big(\varphi_1 + (\varphi_2 + \varphi_3)\big)(x).$$

Следовательно, $(\varphi_1 + \varphi_2) + \varphi_3 = \varphi_1 + (\varphi_2 + \varphi_3)$.

3. Пусть $\varphi\colon Q \implies L$. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$(\varphi + \Theta)(x) = \varphi(x) + \Theta(x) = \varphi(x) + \theta = \varphi(x).$$

Следовательно, $\varphi + \Theta = \varphi$.

4. Пусть $\varphi\colon Q \implies L$. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$\big(\varphi + (-1)\varphi\big)(x) = \varphi(x) + (-1)\varphi(x) = \theta = \Theta(x).$$

Следовательно, $\varphi + (-1)\varphi = \Theta$.

5. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $\varphi\colon Q \implies L$. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$\big((\alpha\beta)\varphi\big)(x) = (\alpha\beta)\varphi(x) = \alpha\big(\beta\varphi(x)\big) = \big(\alpha(\beta\varphi)\big)(x).$$

Следовательно, $(\alpha\beta)\varphi = \alpha(\beta\varphi)$.

6. Пусть $\varphi\colon Q \implies L$. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$\big(1\varphi\big)(x) = 1\varphi(x) = \varphi(x).$$

Следовательно, $1\varphi = \varphi$.

7. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $\varphi\colon Q \implies L$. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$\big((\alpha+\beta)\varphi\big)(x) = (\alpha+\beta)\varphi(x) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(x) = \big(\alpha\varphi + \beta\varphi\big)(x).$$

Следовательно, $(\alpha+\beta)\varphi = \alpha\varphi + \beta\varphi$.

8. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, φ_1, $\varphi_2\colon Q \implies L$. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$\big(\lambda(\varphi_1+\varphi_2)\big)(x) = \lambda\big(\varphi_1(x)+\varphi_2(x)\big) = \lambda\varphi_1(x) + \lambda\varphi_2(x) = \big(\lambda\varphi_1 + \lambda\varphi_2\big)(x).$$

Следовательно, $\lambda(\varphi_1+\varphi_2) = \lambda\varphi_1 + \lambda\varphi_2$.

Итак: $\big(\mathrm{Fun}(Q,L), F_1, F_2\big)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, Θ — нулевой вектор пространства $\big(\mathrm{Fun}(Q,L), F_1, F_2\big)$. □

Замечание. Пусть: M — множество, F — функция, $\mathrm{D}(F) = M^2$.

Пусть: $Q \subseteq M$, $\tilde{F}$ — ограничение функции F на множество Q^2. Тогда: $\tilde{F}$ — функция, $\mathrm{D}(\tilde{F}) = Q^2$, $\tilde{F}(x,y) = F(x,y)$ при x, $y \in Q$. Далее часто будем писать: $x+y$ вместо $F(x,y)$; $x \oplus y$ вместо $\tilde{F}(x,y)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; M — множество, F — функция, $\mathrm{D}(F) = \mathbb{K}\times M$.

Пусть: $\mathbb{K}_0 \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$, $\mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}$; $Q \subseteq M$, $\tilde{F}$ — ограничение функции F на множество $\mathbb{K}_0 \times Q$. Тогда: $\tilde{F}$ — функция, $\mathrm{D}(\tilde{F}) = \mathbb{K}_0\times Q$, $\tilde{F}(\lambda,x) = F(\lambda,x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}_0$, $x \in Q$. Далее часто будем писать: λx вместо $F(\lambda,x)$; $\lambda \otimes x$ вместо $\tilde{F}(\lambda,x)$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* (M,F_1,F_2) *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* θ *— нулевой вектор пространства* (M,F_1,F_2)*.*

Пусть: $\mathbb{K}_0 \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*,* $\mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}$*;* $\tilde{F}_2$ *— ограничение функции* F_2 *на множество* $\mathbb{K}_0 \times M$*. Тогда:* $(M,F_1,\tilde{F}_2)$ *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}_0$*,* θ *— нулевой вектор пространства* $(M,F_1,\tilde{F}_2)$*.*

Доказательство. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}_0$, $x \in M$. Тогда: $\lambda \otimes x = \lambda x \in M$.

1. Пусть x, $y \in M$. Тогда $x+y = y+x$.
2. Пусть x, y, $z \in M$. Тогда $(x+y)+z = x+(y+z)$.
3. Пусть $x \in M$. Тогда $x+\theta = x$.
4. Пусть $x \in M$. Тогда существует объект $y \in M$, удовлетворяющий условию $x+y=\theta$.
5. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}_0$, $x \in M$. Тогда:

$$(\alpha\beta)\otimes x = (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) = \alpha\otimes(\beta\otimes x).$$

6. Пусть $x \in M$. Тогда:

$$1\otimes x = 1x = x.$$

7. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}_0$, $x \in M$. Тогда:

$$(\alpha+\beta)\otimes x = (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x = \alpha\otimes x + \beta\otimes x.$$

8. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}_0$, x, $y \in M$. Тогда:

$$\lambda \otimes (x+y) = \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y = \lambda \otimes x + \lambda \otimes y.$$

Итак: $(M, F_1, \tilde{F}_2)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}_0$, θ — нулевой вектор пространства $(M, F_1, \tilde{F}_2)$. □

Замечание (линейное пространство $\mathbb{K}^N(\mathbb{K}_0)$). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$, F_1 — стандартная операция сложения на множестве $\mathbb{K}^N$, F_2 — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\mathbb{K}^N$, $\tilde{\theta}$ — стандартный нулевой элемент множества $\mathbb{K}^N$.

Пусть: $\mathbb{K}_0 \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}$; $\tilde{F}_2$ — ограничение функции F_2 на множество $\mathbb{K}_0 \times M$. Тогда: $(\mathbb{K}^N, F_1, \tilde{F}_2)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}_0$, $\tilde{\theta}$ — нулевой вектор пространства $(\mathbb{K}^N, F_1, \tilde{F}_2)$. Обозначим, $\mathbb{K}^N(\mathbb{K}_0) = (\mathbb{K}^N, F_1, \tilde{F}_2)$.

Замечание (линейное пространство $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}(\mathbb{K}_0)$). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$, F_1 — стандартная операция сложения на множестве $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, F_2 — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, Θ — стандартный нулевой элемент множества $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

Пусть: $\mathbb{K}_0 \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}$; $\tilde{F}_2$ — ограничение функции F_2 на множество $\mathbb{K}_0 \times M$. Тогда: $(\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}, F_1, \tilde{F}_2)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}_0$, Θ — нулевой вектор пространства $(\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}, F_1, \tilde{F}_2)$. Обозначим, $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}(\mathbb{K}_0) = (\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}, F_1, \tilde{F}_2)$.

Определение (подпространство линейного пространства). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Будем говорить, что Q — подпространство пространства L, если:

1. $Q \subseteq L$;
2. $Q \neq \varnothing$;
3. $\forall x \in Q \forall y \in Q (x + y \in Q)$;
4. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x \in Q (\lambda x \in Q)$.

Замечание (простейшие подпространства). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Очевидно, $\{\theta\}$, L — подпространства пространства L.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in L$. Тогда $L(x_1, \ldots, x_r)$ — подпространство пространства L.*

Доказательство. Очевидно: $L(x_1, \ldots, x_r) \subseteq L$, $0x_1 + \cdots + 0x_r \in L(x_1, \ldots, x_r)$.

Пусть u, $v \in L(x_1, \ldots, x_r)$. Тогда существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^r$, $\beta^1, \ldots, \beta^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условиям: $u = \alpha^k x_k$, $v = \beta^k x_k$. Следовательно:

$$u + v = (\alpha^k x_k) + (\beta^k x_k) = (\alpha^k + \beta^k) x_k \in L(x_1, \ldots, x_r).$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $u \in L(x_1, \ldots, x_r)$. Тогда существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $u = \alpha^k x_k$. Следовательно:

$$\lambda u = \lambda(\alpha^k x_k) = (\lambda \alpha^k) x_k \in L(x_1, \ldots, x_r).$$

Итак, $L(x_1, \ldots, x_r)$ — подпространство пространства L. □

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — подпространство пространства L. Тогда $\theta \in Q$.*

Доказательство. Так как Q — подпространство пространства L, то существует вектор x, удовлетворяющий условию $x \in Q$. Так как Q — подпространство пространства L, то: $\theta = 0x \in Q$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; (M, F_1, F_2) *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, θ *— нулевой вектор пространства* (M, F_1, F_2).

Пусть: Q *— подпространство пространства* (M, F_1, F_2), $\tilde{F}_1$ *— ограничение функции* F_1 *на множество* Q^2, $\tilde{F}_2$ *— ограничение функции* F_2 *на множество* $\mathbb{K} \times Q$. *Тогда:* $(Q, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$ *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, θ *— нулевой вектор пространства* $(Q, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$.

Доказательство. Пусть x, $y \in Q$. Так как Q — подпространство пространства (M, F_1, F_2), то: $x \oplus y = x + y \in Q$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q$. Так как Q — подпространство пространства (M, F_1, F_2), то: $\lambda \otimes x = \lambda x \in Q$.

Так как Q — подпространство пространства (M, F_1, F_2), то $\theta \in Q$.

1. Пусть x, $y \in Q$. Тогда:

$$x \oplus y = x + y = y + x = y \oplus x.$$

2. Пусть x, y, $z \in Q$. Тогда:

$$(x \oplus y) \oplus z = (x + y) + z = x + (y + z) = x \oplus (y \oplus z).$$

3. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$x \oplus \theta = x + \theta = x.$$

4. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$x \oplus (-1) \otimes x = x + (-1)x = \theta.$$

5. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in Q$. Тогда:

$$(\alpha\beta) \otimes x = (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) = \alpha \otimes (\beta \otimes x).$$

6. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$1 \otimes x = 1x = x.$$

7. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in Q$. Тогда:

$$(\alpha + \beta) \otimes x = (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x = \alpha \otimes x \oplus \beta \otimes x.$$

8. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in Q$. Тогда:

$$\lambda \otimes (x \oplus y) = \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y = \lambda \otimes x \oplus \lambda \otimes y.$$

Итак: $(Q, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, θ — нулевой вектор пространства $(Q, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* (M, F_1, F_2) *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

Пусть: $Q \subseteq M$*,* $\tilde{F}_1$ *— ограничение функции* F_1 *на множество* Q^2*,* $\tilde{F}_2$ *— ограничение функции* F_2 *на множество* $\mathbb{K} \times Q$*,* $(Q, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$ *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*. Тогда* Q *— подпространство пространства* (M, F_1, F_2)*.*

Доказательство. По условию, $Q \subseteq M$. Так как $(Q, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, то $Q \neq \varnothing$.

Пусть x, $y \in Q$. Тогда: $x + y = x \oplus y \in Q$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q$. Тогда: $\lambda x = \lambda \otimes x \in Q$.

Итак, Q — подпространство пространства (M, F_1, F_2). □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* (M, F_1, F_2) *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

Пусть: Q_1 *— подпространство пространства* (M, F_1, F_2)*,* $\tilde{F}_1$ *— ограничение функции* F_1 *на множество* Q_1^2*,* $\tilde{F}_2$ *— ограничение функции* F_2 *на множество* $\mathbb{K} \times Q_1$*.*

Пусть Q_2 *— подпространство пространства* $(Q_1, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$*. Тогда:* $Q_2 \subseteq Q_1$*,* Q_2 *— подпространство пространства* (M, F_1, F_2)*.*

Доказательство. Так как Q_1 — подпространство пространства (M, F_1, F_2), то $Q_1 \subseteq M$. Так как Q_2 — подпространство пространства $(Q_1, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$, то: $Q_2 \subseteq Q_1$, $Q_2 \neq \varnothing$. Так как: $Q_1 \subseteq M$, $Q_2 \subseteq Q_1$, то $Q_2 \subseteq M$.

Пусть x, $y \in Q_2$. Так как Q_2 — подпространство пространства $(Q_1, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$, то: $x + y = x \oplus y \in Q_2$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q_2$. Так как Q_2 — подпространство пространства $(Q_1, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$, то: $\lambda x = \lambda \otimes x \in Q_2$.

Итак: $Q_2 \subseteq Q_1$, Q_2 — подпространство пространства (M, F_1, F_2). □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* (M, F_1, F_2) *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

Пусть: Q_1 *— подпространство пространства* (M, F_1, F_2)*,* $\tilde{F}_1$ *— ограничение функции* F_1 *на множество* Q_1^2*,* $\tilde{F}_2$ *— ограничение функции* F_2 *на множество* $\mathbb{K} \times Q_1$*.*

Пусть: $Q_2 \subseteq Q_1$*,* Q_2 *— подпространство пространства* (M, F_1, F_2)*. Тогда* Q_2 *— подпространство пространства* $(Q_1, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$*.*

Доказательство. По условию, $Q_2 \subseteq Q_1$. Так как Q_2 — подпространство пространства (M, F_1, F_2), то $Q_2 \neq \varnothing$.

Пусть x, $y \in Q_2$. Так как Q_2 — подпространство пространства (M, F_1, F_2), то: $x \oplus y = x + y \in Q_2$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q_2$. Так как Q_2 — подпространство пространства (M, F_1, F_2), то: $\lambda \otimes x = \lambda x \in Q_2$.

Итак, Q_2 — подпространство пространства $(Q_1, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q_1*,* Q_2 *— подпространства пространства* L*. Тогда* $Q_1 \cap Q_2$ *— подпространство пространства* L*.*

Доказательство. Так как $Q_1 \subseteq L$, то $Q_1 \cap Q_2 \subseteq L$. Так как: $\theta \in Q_1$, $\theta \in Q_2$, то $\theta \in Q_1 \cap Q_2$.

Пусть x_1, $x_2 \in Q_1 \cap Q_2$. Тогда: x_1, $x_2 \in Q_1$, x_1, $x_2 \in Q_2$. Следовательно: $x_1 + x_2 \in Q_1$, $x_1 + x_2 \in Q_2$. Тогда $x_1 + x_2 \in Q_1 \cap Q_2$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q_1 \cap Q_2$. Тогда: $x \in Q_1$, $x \in Q_2$. Следовательно: $\lambda x \in Q_1$, $\lambda x \in Q_2$. Тогда $\lambda x \in Q_1 \cap Q_2$.

Итак, $Q_1 \cap Q_2$ — подпространство пространства L. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$; I *— множество,* $I \neq \varnothing$, Q_α *— подпространство пространства* L *при* $\alpha \in I$. *Тогда* $\bigcap\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha$ *— подпространство пространства* L.

Доказательство. Так как $I \neq \varnothing$, то существует объект α_0, удовлетворяющий условию $\alpha_0 \in I$. Так как $Q_{\alpha_0} \subseteq L$, то $\bigcap\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha \subseteq L$. Так как $\forall \alpha \in I (\theta \in Q_\alpha)$, то $\theta \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha$.

Пусть x_1, $x_2 \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha$. Тогда: x_1, $x_2 \in Q_\alpha$ при $\alpha \in I$. Следовательно: $x_1 + x_2 \in Q_\alpha$ при $\alpha \in I$. Тогда $x_1 + x_2 \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha$. Тогда: $x \in Q_\alpha$ при $\alpha \in I$. Следовательно: $\lambda x \in Q_\alpha$ при $\alpha \in I$. Тогда $\lambda x \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha$.

Итак, $\bigcap\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha$ — подпространство пространства L. □

7.4. Аффинное пространство

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; M — множество, L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть: F — функция, $\mathrm{D}(F) = M^2$. Далее часто будем писать $\overrightarrow{p_1 p_2}$ вместо $F(p_1, p_2)$.

Пусть: F — функция, $\mathrm{D}(F) = M^2$, $\forall p_1 \in M \forall p_2 \in M (\overrightarrow{p_1 p_2} \in L)$. Тогда: F — функция, $\mathrm{D}(F) = M^2$, $\mathrm{R}(F) \subseteq L$. Следовательно, $F \colon M^2 \implies L$.

Пусть $F \colon M^2 \implies L$. Тогда: F — функция, $\mathrm{D}(F) = M^2$, $\mathrm{R}(F) \subseteq L$. Следовательно: F — функция, $\mathrm{D}(F) = M^2$, $\forall p_1 \in M \forall p_2 \in M (\overrightarrow{p_1 p_2} \in L)$.

Определение (аффинное пространство). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; M — множество, L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $F \colon M^2 \implies L$.

Пусть:

1. $\exists p (p \in M)$;
2. $\overrightarrow{p_1 p_2} + \overrightarrow{p_2 p_3} = \overrightarrow{p_1 p_3}$ при p_1, p_2, $p_3 \in M$;
3. $\forall p_0 \in M \forall x \in L \exists! p \in M (\overrightarrow{p_0 p} = x)$.

Будем говорить, что F — операция векторизации на множестве M.

Будем говорить, что: (M, L, F) — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$; M — носитель пространства (M, L, F); L — линейное пространство, присоединённое к аффинному пространству (M, L, F); F — операция векторизации пространства (M, L, F). Будем говорить, что p — точка пространства (M, L, F), если $p \in M$. Будем говорить, что x — вектор пространства (M, L, F), если $x \in L$. Далее обычно будем отождествлять пространство (M, L, F) и множество M.

Пусть $Q = (M, L, F)$. Обозначим, $\vec{Q} = L$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; Q *— аффинное пространство над полем* $\mathbb{K}$.

1. *Пусть* $p \in Q$. *Тогда* $\overrightarrow{pp} = \theta$.
2. *Пусть:* p_1, $p_2 \in Q$, $\overrightarrow{p_1 p_2} = \theta$. *Тогда* $p_1 = p_2$.
3. *Пусть* p_1, $p_2 \in Q$. *Тогда* $(-1)\overrightarrow{p_1 p_2} = \overrightarrow{p_2 p_1}$.

Доказательство.

1. Очевидно: $\overrightarrow{pp} + \overrightarrow{pp} = \overrightarrow{pp}$. С другой стороны, $\overrightarrow{pp} + \theta = \overrightarrow{pp}$. Тогда $\overrightarrow{pp} = \theta$.
2. Очевидно, $\overrightarrow{p_1p_1} = \theta$. С другой стороны, $\overrightarrow{p_1p_2} = \theta$. Тогда $p_1 = p_2$.
3. Очевидно, $\overrightarrow{p_1p_2} + (-1)\overrightarrow{p_1p_2} = \theta$. С другой стороны: $\overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_2p_1} = \overrightarrow{p_1p_1} = \theta$. Тогда $(-1)\overrightarrow{p_1p_2} = \overrightarrow{p_2p_1}$. □

Замечание (операция откладывания вектора от точки). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть: $p_0 \in Q$, $x \in \vec{Q}$. Тогда существует единственная точка p, удовлетворяющая условиям: $p \in Q$, $\overrightarrow{p_0p} = x$. Обозначим, $p_0 \oplus x = p$. Далее часто будем писать $p_0 + x$ вместо $p_0 \oplus x$.

Пусть $p_0 \in Q$. Обозначим: $\varphi_{p_0}(p) = \overrightarrow{p_0p}$ при $p \in Q$. Очевидно, $\varphi_{p_0} \colon Q \implies \vec{Q}$. Так как $\forall x \in \vec{Q} \exists! p \in Q (\overrightarrow{p_0p} = x)$, то: φ_{p_0} — обратимая функция, $\mathrm{D}(\varphi_{p_0}) = Q$, $\mathrm{R}(\varphi_{p_0}) = \vec{Q}$.

Пусть: $p_0 \in Q$, $x \in \vec{Q}$. Тогда: $\overrightarrow{p_0\varphi_{p_0}^{-1}(x)} = \varphi_{p_0}\big(\varphi_{p_0}^{-1}(x)\big) = x$. С другой стороны, $\overrightarrow{p_0(p_0 \oplus x)} = x$. Тогда $\varphi_{p_0}^{-1}(x) = p_0 \oplus x$.

Пусть p_0, $p \in Q$. Тогда: $p_0 \oplus \overrightarrow{p_0p} = \varphi_{p_0}^{-1}\big(\varphi_{p_0}(p)\big) = p$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* Q *— аффинное пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

1. *Пусть:* $p \in Q$, x, $y \in \vec{Q}$*. Тогда* $(p \oplus x) \oplus y = p \oplus (x + y)$*.*
2. *Пусть* $p \in Q$*. Тогда* $p \oplus \theta = p$*.*

Доказательство.

1. Обозначим, $p_1 = p \oplus x$. Тогда: $x = \overrightarrow{p(p \oplus x)} = \overrightarrow{pp_1}$. Обозначим, $p_2 = (p \oplus x) \oplus y$. Тогда $p_2 = p_1 \oplus y$. Следовательно: $y = \overrightarrow{p_1(p_1 \oplus y)} = \overrightarrow{p_1p_2}$. Тогда: $p \oplus (x + y) = p \oplus (\overrightarrow{pp_1} + \overrightarrow{p_1p_2}) = p \oplus \overrightarrow{pp_2} = p_2 = (p \oplus x) \oplus y$.
2. Очевидно: $p \oplus \theta = p \oplus \overrightarrow{pp} = p$. □

Утверждение (аффинное пространство E^N)**.** *Пусть:* $N = \overline{1,3}$, F *— стандартная операция векторизации на множестве* E^N*. Тогда* $(E^N, \vec{E}^N, F)$ *— аффинное пространство над полем* $\mathbb{R}$*.*

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Рассмотрим множество L. Рассмотрим линейное пространство L.

Пусть p_1, $p_2 \in L$. Обозначим, $\overrightarrow{p_1p_2} = p_2 - p_1$. Очевидно, $\overrightarrow{p_1p_2} \in L$. Будем говорить, что $\{\overrightarrow{p_1p_2}\}_{p_1, p_2 \in L}$ — стандартная операция векторизации на множестве L.

Утверждение (пример аффинного пространства)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, F *— стандартная операция векторизации на множестве* L*. Тогда:* (L, L, F) *— аффинное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $p_0 \oplus x = p_0 + x$ *при* p_0, $x \in L$*.*

Доказательство.

1. Так как L — линейное пространство, то $\exists p (p \in L)$.
2. Пусть p_1, p_2, $p_3 \in L$. Тогда:

$$\overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_2p_3} = (p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) = p_3 - p_1 = \overrightarrow{p_1p_3}.$$

3. Пусть p_0, $x \in L$. Докажем, что существует единственный объект p, удовлетворяющий условиям: $p \in L$, $\overrightarrow{p_0p} = x$.

Пусть: $p \in L$, $\overrightarrow{p_0 p} = x$. Тогда:

$$\overrightarrow{p_0 p} = x,$$
$$p - p_0 = x,$$
$$p = p_0 + x.$$

Пусть: $p_1 \in L$, $\overrightarrow{p_0 p_1} = x$, $p_2 \in L$, $\overrightarrow{p_0 p_2} = x$. Тогда: $p_1 = p_0 + x$, $p_2 = p_0 + x$. Следовательно, $p_1 = p_2$.

Пусть $p = p_0 + x$. Тогда: $p \in L$, $\overrightarrow{p_0 p} = p - p_0 = (p_0 + x) - p_0 = x$.

Итак, (L, L, F) — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$. Пусть p_0, $x \in L$. Тогда: $p_0 + x \in L$, $\overrightarrow{p_0 (p_0 + x)} = x$. Следовательно, $p_0 \oplus x = p_0 + x$. □

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть: $p_0 \in Q$, H — подпространство пространства $\vec{Q}$, $\sigma = \{p \colon p \in Q \wedge \overrightarrow{p_0 p} \in H\}$. Будем говорить, что: σ — аффинное подпространство пространства Q; p_0 — опорная точка аффинного подпространства σ; H — направляющее подпространство аффинного подпространства σ.

Очевидно, $\sigma \subseteq Q$. Очевидно: $p_0 \in Q$, $\overrightarrow{p_0 p_0} = \theta \in H$. Тогда $p_0 \in \sigma$.

Лекция 8. Базис линейного пространства

8.1. Базис линейного пространства

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $Q \subseteq L$.

Будем говорить, что e — базис множества Q длины r, если: $r \in \mathbb{N}$, $e \in Q^r$, $e_1, \ldots, e_r$ — линейно независимые векторы, $Q \subseteq L(e_1, \ldots, e_r)$.

Будем говорить, что e — базис множества Q, если существует число r, удовлетворяющее условию: e — базис множества Q длины r.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — подпространство пространства L, e — базис подпространства Q длины r. Тогда $Q = L(e_1, \ldots, e_r)$.*

Доказательство. Так как e — базис подпространства Q длины r, то: $r \in \mathbb{N}$, $e \in Q^r$, $e_1, \ldots, e_r$ — линейно независимые векторы, $Q \subseteq L(e_1, \ldots, e_r)$.

Пусть $x \in L(e_1, \ldots, e_r)$. Тогда существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $x = \lambda^k e_k$. Так как: Q — подпространство пространства L, $e_1, \ldots, e_r \in Q$, то: $x = \lambda^k e_k \in Q$. Тогда $L(e_1, \ldots, e_r) \subseteq Q$. Так как: $Q \subseteq L(e_1, \ldots, e_r)$, $L(e_1, \ldots, e_r) \subseteq Q$, то $Q = L(e_1, \ldots, e_r)$. □

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in L$.*

1. Пусть e — базис множества $\{x_1, \ldots, x_r\}$ длины r_0. Тогда e — базис подпространства $L(x_1, \ldots, x_r)$ длины r_0.

2. Пусть: e — базис подпространства $L(x_1, \ldots, x_r)$ длины r_0; $e_1, \ldots, e_{r_0} \in \{x_1, \ldots, x_r\}$. Тогда e — базис множества $\{x_1, \ldots, x_r\}$ длины r_0.

Доказательство.

1. Так как e — базис множества $\{x_1, \ldots, x_r\}$ длины r_0, то: $r_0 \in \mathbb{N}$, $e \in \{x_1, \ldots, x_r\}^{r_0}$, $e_1, \ldots, e_{r_0}$ — линейно независимые векторы, $\{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq L(e_1, \ldots, e_{r_0})$.

Очевидно: $e_1, \ldots, e_{r_0} \in \{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq L(x_1, \ldots, x_r)$. Пусть $x \in L(x_1, \ldots, x_r)$. Тогда существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $x = \alpha^k x_k$. Пусть $k = \overline{1, r}$. Тогда существуют числа $\beta_k^1, \ldots, \beta_k^{r_0} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $x_k = \beta_k^m e_m$. Следовательно:

$$x = \alpha^k x_k = \alpha^k(\beta_k^m e_m) = (\alpha^k \beta_k^m) e_m.$$

Итак, e — базис подпространства $L(x_1, \ldots, x_r)$ длины r_0.

2. Так как e — базис подпространства $L(x_1, \ldots, x_r)$ длины r_0, то: $r_0 \in \mathbb{N}$, $e \in L(x_1, \ldots, x_r)^{r_0}$, $e_1, \ldots, e_{r_0}$ — линейно независимые векторы, $L(x_1, \ldots, x_r) \subseteq L(e_1, \ldots, e_{r_0})$.

По условию, $e_1, \ldots, e_{r_0} \in \{x_1, \ldots, x_r\}$. Очевидно: $\{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq L(x_1, \ldots, x_r) \subseteq L(e_1, \ldots, e_{r_0})$. Итак, e — базис множества $\{x_1, \ldots, x_r\}$ длины r_0. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $Q \subseteq L$, e — базис множества Q длины r.

Пусть $x \in Q$. Будем говорить, что $\tilde{x}$ — столбец координат вектора x в базисе e, если: $\tilde{x} \in \mathbb{K}^r$, $x = \tilde{x}^k e_k$.

Пусть $x \in Q$. Очевидно, существует единственный столбец $\tilde{x}$, удовлетворяющий условию: $\tilde{x}$ — столбец координат вектора x в базисе e.

Пусть $x \in Q$. Обозначим через $[x](e)$ столбец координат вектора x в базисе e.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $Q \subseteq L$*,* e *— базис множества* Q *длины* r*.*

1. *Пусть:* $x,\ y \in Q$*,* $x + y \in Q$*. Тогда* $[x + y](e) = [x](e) + [y](e)$*.*
2. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$*,* $x \in Q$*,* $\lambda x \in Q$*. Тогда* $[\lambda x](e) = \lambda[x](e)$*.*
3. *Пусть* $\theta \in Q$*. Тогда* $[\theta](e) = \tilde{\theta}$ *(здесь* $\tilde{\theta}$ *— нулевой вектор пространства* $\mathbb{K}^r$*).*
4. *Справедливо утверждение:* $[e_k]^m(e) = \delta_k^m$ *при* $k,\ m = \overline{1, r}$*.*

Доказательство.

1. Очевидно:

$$[x](e) + [y](e) \in \mathbb{K}^r,$$
$$x + y = [x]^k(e)e_k + [y]^k(e)e_k = \big([x]^k(e) + [y]^k(e)\big)e_k = \big([x](e) + [y](e)\big)^k e_k.$$

Тогда $[x + y](e) = [x](e) + [y](e)$.

2. Очевидно:

$$\lambda[x](e) \in \mathbb{K}^r,$$
$$\lambda x = \lambda\big([x]^k(e)e_k\big) = \big(\lambda[x]^k(e)\big)e_k = \big(\lambda[x](e)\big)^k e_k.$$

Тогда $[\lambda x](e) = \lambda[x](e)$.

3. Очевидно, $\tilde{\theta} \in \mathbb{K}^r$. Так как: $\tilde{\theta}^k = 0$ при $k = \overline{1, r}$, то $\theta = \tilde{\theta}^k e_k$. Тогда $[\theta](e) = \tilde{\theta}$.

4. Пусть $k = \overline{1, r}$. Очевидно, $e_k = [e_k]^m(e)e_m$. С другой стороны, $e_k = \delta_k^m e_m$. Тогда: $[e_k]^m(e) = \delta_k^m$ при $m = \overline{1, r}$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r \in L$*,* e *— базис пространства* L *длины* N*. Векторы* $x_1, \ldots, x_r$ *являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда столбцы* $[x_1](e), \ldots, [x_r](e)$ *являются линейно зависимыми.*

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы. Тогда существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^k x_k = \theta$, $\exists k = \overline{1, r}(\lambda^k \neq 0)$. Следовательно:

$$\lambda^k[x_k](e) = [\lambda^k x_k](e) = [\theta](e) = \tilde{\theta}.$$

Так как $\exists k = \overline{1, r}(\lambda^k \neq 0)$, то $[x_1](e), \ldots, [x_r](e)$ — линейно зависимые столбцы.

Пусть $[x_1](e), \ldots, [x_r](e)$ — линейно зависимые столбцы. Тогда существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^k[x_k](e) = \tilde{\theta}$, $\exists k = \overline{1, r}(\lambda^k \neq 0)$. Следовательно:

$$\lambda^k x_k = \big([\lambda^k x_k](e)\big)^m e_m = \big(\lambda^k[x_k](e)\big)^m e_m = \tilde{\theta}^m e_m = \theta.$$

Так как $\exists k = \overline{1, r}(\lambda^k \neq 0)$, то $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы. □

Замечание (линейная система координат в линейном пространстве). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; e — базис пространства L длины r.

Обозначим: $h_e(x) = [x](e)$ при $x \in L$. Очевидно: h_e — обратимая функция, $\mathrm{D}(h_e) = L$, $\mathrm{R}(h_e) = \mathbb{K}^r$; $h_e^{-1}(\tilde{x}) = \tilde{x}^k e_k$ при $\tilde{x} \in \mathbb{K}^r$. Будем говорить, что h_e — линейная координатная карта (линейная система координат) в пространстве L, соответствующая базису e. Пусть $x \in L$. Будем говорить, что $h_e(x)$ — столбец координат вектора x в координатной карте h_e.

Утверждение. *Пусть:* $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r$ *— различные объекты,* $Q = \{x_1, \ldots, x_r\}$; $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$. *Фиксируем номер* $k = \overline{1, r}$. *Обозначим:* $e_k(x_k) = 1$, $e_k(x) = 0$ *при:* $x \in Q$, $x \neq x_k$.

1. *Справедливо утверждение:* $e_1, \ldots, e_r$ *— базис пространства* $\mathrm{Fun}(Q, \mathbb{K})$ *длины* r.
2. *Пусть* $\varphi\colon Q \implies \mathbb{K}$. *Тогда:* $[\varphi]^k(e) = \varphi(x_k)$ *при* $k = \overline{1, r}$.

Доказательство.

1. Очевидно: $r \in \mathbb{N}$, $e_1, \ldots, e_r \colon Q \implies \mathbb{K}$. Так как $x_1, \ldots, x_r$ — различные объекты, то: $e_k(x_m) = \delta_k^m$ при k, $m = \overline{1, r}$. Пусть $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$. Пусть $m = \overline{1, r}$. Тогда:

$$(\lambda^k e_k)(x_m) = \lambda^k e_k(x_m) = \lambda^k \delta_k^m = \lambda^m.$$

Пусть: $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, $\lambda^k e_k = \Theta$ (здесь Θ — нулевой вектор пространства $\mathrm{Fun}(Q, \mathbb{K})$). Пусть $m = \overline{1, r}$. Тогда:

$$(\lambda^k e_k)(x_m) = \Theta(x_m),$$
$$\lambda^m = 0.$$

Следовательно, $e_1, \ldots, e_r$ — линейно независимые функции.

Пусть $\varphi\colon Q \implies \mathbb{K}$. Пусть $x \in Q$. Тогда существует номер $m = \overline{1, r}$, удовлетворяющий условию $x = x_m$. Следовательно:

$$\Big(\sum_{k=1}^{r} \varphi(x_k) e_k\Big)(x) = \Big(\sum_{k=1}^{r} \varphi(x_k) e_k\Big)(x_m) = \varphi(x_m) = \varphi(x).$$

Тогда $\sum\limits_{k=1}^{r} \varphi(x_k) e_k = \varphi$. Итак, $e_1, \ldots, e_r$ — базис пространства $\mathrm{Fun}(Q, \mathbb{K})$ длины r.

2. Очевидно, $\varphi = [\varphi]^k(e) e_k$. С другой стороны, $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{r} \varphi(x_k) e_k$. Тогда: $[\varphi]^k(e) = \varphi(x_k)$ при $k = \overline{1, r}$. □

Замечание (простейший базис пространства $\mathbb{K}^N$). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$. Обозначим: $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T, \ldots, e_N = (0, \ldots, 0, 1)^T$. Тогда $e_1, \ldots, e_N$ — базис пространства $\mathbb{K}^N$ длины N. Будем говорить, что e — простейший базис пространства $\mathbb{K}^N$.

Пусть $x \in \mathbb{K}^N$. Тогда: $[x]^k(e) = x^k$ при $k = \overline{1, r}$. Следовательно, $[x](e) = x$.

Замечание (простейший базис пространства $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$. Обозначим:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\ldots$$

$$e_{N_2N_1-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_{N_2N_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда e — базис пространства $\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$ длины N_2N_1. Будем говорить, что e — простейший базис пространства $\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$.

Пусть $A \in \mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Тогда: $[A]^1(e) = A^1_1$, $[A]^2(e) = A^1_2, \ldots, [A]^{N_2N_1-1}(e) = A^{N_2}_{N_1-1}$, $[A]^{N_2N_1}(e) = A^{N_2}_{N_1}$.

Замечание. Пусть: $N = \overline{1,3}$; O, $I_1, \ldots, I_N$ — аффинно независимые точки пространства E^N, h — соответствующая аффинная координатная карта, $e_k = \overrightarrow{OI_k}$ при $k = \overline{1,N}$. Тогда $e_1, \ldots, e_N$ — базис пространства $\vec{E}^N$ длины N.

Замечание (аффинная система координат в аффинном пространстве). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$; $O \in Q$, e — базис пространства Q длины r.

Обозначим: $h_{O,e}(p) = [\overrightarrow{Op}](e)$ при $p \in Q$. Очевидно: $h_{O,e}$ — обратимая функция, $\mathrm{D}(h_{O,e}) = Q$, $\mathrm{R}(h_{O,e}) = \mathbb{K}^r$; $h^{-1}_{O,e}(x) = O + x^k e_k$ при $x \in \mathbb{K}^r$. Будем говорить, что: $h_{O,e}$ — аффинная координатная карта (аффинная система координат) в пространстве Q, соответствующая точке O и базису e. Пусть $p \in Q$. Будем говорить, что $h_{O,e}(p)$ — столбец координат точки p в координатной карте $h_{O,e}$. Очевидно: $h^m_{O,e}(O) = [\overrightarrow{OO}]^m(e) = [\theta]^m(e) = 0$ при $m = \overline{1,r}$; $h^m_{O,e}(O + e_k) = \big[\overrightarrow{O(O + e_k)}\big]^m(e) = [e_k]^m(e) = \delta^m_k$ при k, $m = \overline{1,r}$.

8.2. Размерность линейного пространства

Определение (ранг множества векторов). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $Q \subseteq L$.

Обозначим через $\mu_*(Q)$ множество всех номеров k, удовлетворяющих условиям: $k \in \mathbb{N}$, существуют векторы $x_1, \ldots, x_k \in Q$, удовлетворяющие условию: $x_1, \ldots, x_k$ — линейно независимые векторы.

Пусть $\mu_*(Q) = \varnothing$. Обозначим, $\operatorname{rank}(Q) = 0$.

Пусть: $\mu_*(Q) \neq \varnothing$, $\exists r \in \mathbb{N} \forall k \in \mu_*(Q)(k \leqslant r)$. Обозначим, $\operatorname{rank}(Q) = \max\big(\mu_*(Q)\big)$.

Пусть $\forall r \in \mathbb{N} \exists k \in \mu_*(Q)(k \geqslant r + 1)$. Обозначим, $\operatorname{rank}(Q) = +\infty$.

Будем говорить, что $\operatorname{rank}(Q)$ — ранг множества Q.

Определение (размерность подпространства). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — подпространство пространства L. Обозначим, $\dim(Q) = \operatorname{rank}(Q)$. Будем говорить, что $\dim(Q)$ — размерность подпространства Q.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $Q \subseteq L$.

Пусть $r \in \mu_*(Q)$. Тогда $\forall k = \overline{1,r}\big(k \in \mu_*(Q)\big)$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $r \notin \mu_*(Q)$. Тогда $\forall k[k \in \mathbb{Z} \wedge k \geqslant r]\big(k \notin \mu_*(Q)\big)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $Q \subseteq L$.

1. Пусть $\operatorname{rank}(Q) = 0$. Тогда для любого номера $k \in \mathbb{N}$, для любых векторов $x_1, \ldots, x_k \in Q$ справедливо утверждение: $x_1, \ldots, x_k$ — линейно зависимые векторы.

   Пусть для любого вектора $x \in Q$ справедливо утверждение: x — линейно зависимый вектор. Тогда $\operatorname{rank}(Q) = 0$.

2. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $\operatorname{rank}(Q) = r$. Тогда: для любого номера $k = \overline{1, r}$ существуют векторы $x_1, \ldots, x_k \in Q$, удовлетворяющие условию: $x_1, \ldots, x_k$ — линейно независимые векторы; для любого номера k, удовлетворяющего условиям: $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant r + 1$, для любых векторов $x_1, \ldots, x_k \in Q$ справедливо утверждение: $x_1, \ldots, x_k$ — линейно зависимые векторы.

   Пусть: $r \in \mathbb{N}$; существуют векторы $x_1, \ldots, x_r \in Q$, удовлетворяющие условию: $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы; для любых векторов $x_1, \ldots, x_{r+1} \in Q$ справедливо утверждение: $x_1, \ldots, x_{r+1}$ — линейно зависимые векторы. Тогда $\operatorname{rank}(Q) = r$.

3. Пусть $\operatorname{rank}(Q) = +\infty$. Тогда для любого номера $k \in \mathbb{N}$ существуют векторы $x_1, \ldots, x_k \in Q$, удовлетворяющие условию: $x_1, \ldots, x_k$ — линейно независимые векторы.

   Пусть для любого номера $r \in \mathbb{N}$ существует номер k, удовлетворяющий условиям: $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant r+1$, такой, что существуют векторы $x_1, \ldots, x_k \in Q$, удовлетворяющие условию: $x_1, \ldots, x_k$ — линейно независимые векторы. Тогда $\operatorname{rank}(Q) = +\infty$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть: $Q \subseteq L$, $\operatorname{rank}(Q) = 0$. Тогда: Q — множество, $\forall x \in Q (x = \theta)$.
   Пусть: Q — множество, $\forall x \in Q (x = \theta)$. Тогда: $Q \subseteq L$, $\operatorname{rank}(Q) = 0$.
2. Пусть: $Q \subseteq L$, $\operatorname{rank}(Q) = 0$. Тогда $Q = \varnothing \vee Q = \{\theta\}$.
   Пусть $Q = \varnothing \vee Q = \{\theta\}$. Тогда: $Q \subseteq L$, $\operatorname{rank}(Q) = 0$.
3. Пусть: $Q \subseteq L$, Q — конечное множество. Тогда $\operatorname{rank}(Q) \leqslant \operatorname{card}(Q)$.
4. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in L$, $Q = \{x_1, \ldots, x_r\}$. Тогда: $Q \subseteq L$, Q — конечное множество, $\operatorname{card}(Q) \leqslant r$. Следовательно $\operatorname{rank}(Q) \leqslant r$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $Q_2 \subseteq L$, $Q_1 \subseteq Q_2$*. Тогда* $\operatorname{rank}(Q_1) \leqslant \operatorname{rank}(Q_2)$.

Доказательство. Обозначим: $r_1 = \operatorname{rank}(Q_1)$, $r_2 = \operatorname{rank}(Q_2)$. Тогда r_1, $r_2 \in \overline{\mathbb{Z}}_+$. Предположим, что $r_2 < r_1$. Тогда: $r_1 \in \overline{\mathbb{N}}$, $r_2 \in \mathbb{Z}_+$. Так как: $\operatorname{rank}(Q_1) = r_1$, $r_2 + 1 \leqslant r_1$, то существуют векторы $x_1, \ldots, x_{r_2+1}$, удовлетворяющие условиям: $x_1, \ldots, x_{r_2+1} \in Q_1$, $x_1, \ldots, x_{r_2+1}$ — линейно независимые векторы. Так как: $x_1, \ldots, x_{r_2+1} \in Q_1$, $Q_1 \subseteq Q_2$, то $x_1, \ldots, x_{r_2+1} \in Q_2$. Так как $\operatorname{rank}(Q_2) = r_2$, то $x_1, \ldots, x_{r_2+1}$ — линейно зависимые векторы (что противоречит утверждению: $x_1, \ldots, x_{r_2+1}$ — линейно независимые векторы). Итак, $r_1 \leqslant r_2$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $Q \subseteq L$, $r \in \mathbb{N}$, $\operatorname{rank}(Q) = r$, $e_1, \ldots, e_r \in Q$, $e_1, \ldots, e_r$ *— линейно независимые векторы. Тогда* $e_1, \ldots, e_r$ *— базис множества* Q *длины* r.

Доказательство. По условию: $r \in \mathbb{N}$, $e_1, \ldots, e_r \in Q$, $e_1, \ldots, e_r$ — линейно независимые векторы.

Пусть $x \in Q$. Так как: $\operatorname{rank}(Q) = r$, $e_1, \ldots, e_r \in Q$, то $e_1, \ldots, e_r, x$ — линейно зависимые векторы. Так как $e_1, \ldots, e_r$ — линейно независимые векторы, то $x \in L(e_1, \ldots, e_r)$. Итак, e — базис множества Q длины r. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $Q \subseteq L$, $r \in \mathbb{N}$, $\operatorname{rank}(Q) = r$*. Тогда существуют векторы* $e_1, \ldots, e_r$*, удовлетворяющие условию:* $e_1, \ldots, e_r$ *— базис множества* Q *длины* r.

Доказательство. Так как $\operatorname{rank}(Q) = r$, то существуют векторы $e_1, \dots, e_r$, удовлетворяющие условиям: $e_1, \dots, e_r \in Q$, $e_1, \dots, e_r$ — линейно независимые векторы. Так как $\operatorname{rank}(Q) = r$, то $e_1, \dots, e_r$ — базис множества Q длины r. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \dots, x_r \in L$*.*

Пусть: $r_0 \in \mathbb{N}$*,* $e \in \{x_1, \dots, x_r\}^{r_0}$*,* $\{x_1, \dots, x_r\} \subseteq L(e_1, \dots, e_{r_0})$*,* $r_0 < r$*. Тогда* $x_1, \dots, x_r$ *— линейно зависимые векторы.*

Доказательство. Так как $e_1, \dots, e_{r_0} \in \{x_1, \dots, x_r\}$, то существуют числа $k_1, \dots, k_{r_0} = \overline{1, r}$, удовлетворяющие условиям: $e_1 = x_{k_1}, \dots, e_{r_0} = x_{k_{r_0}}$. Так как $r_0 < r$, то существует число $k = \overline{1, r}$, удовлетворяющее условию $k \notin \{k_1, \dots, k_{r_0}\}$. Тогда $k_1, \dots, k_{r_0} \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, r\}$. Так как $x_k \in \{x_1, \dots, x_r\}$, то: $x_k \in L(e_1, \dots, e_{r_0}) = L(x_{k_1}, \dots, x_{k_{r_0}})$. Так как $k_1, \dots, k_{r_0} \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, r\}$, то $x_k \in L(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_r)$. Тогда $x_1, \dots, x_r$ — линейно зависимые векторы. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q_1*,* Q_2 *— подпространства пространства* L*,* $Q_1 \subseteq Q_2$*,* $\dim(Q_1) = \dim(Q_2)$*,* $\dim(Q_2) \neq +\infty$*. Тогда* $Q_1 = Q_2$*.*

Доказательство. Обозначим, $N = \dim(Q_2)$. Тогда: $N \in \mathbb{Z}_+$, $\dim(Q_1)$, $\dim(Q_2) = N$.

Пусть $N = 0$. Так как $\dim(Q_1)$, $\dim(Q_2) = N$, то Q_1, $Q_2 = \{\theta\}$. Тогда $Q_1 = Q_2$.

Пусть $N \neq 0$. Тогда $N \in \mathbb{N}$. Так как $\dim(Q_1) = N$, то существуют векторы $e_1, \dots, e_N$, удовлетворяющие условиям: $e_1, \dots, e_N \in Q_1$, $e_1, \dots, e_N$ — линейно независимые векторы. Так как $\dim(Q_1) = N$, то $e_1, \dots, e_N$ — базис подпространства Q_1 длины N. Так как: $e_1, \dots, e_N \in Q_1$, $Q_1 \subseteq Q_2$, то $e_1, \dots, e_N \in Q_2$. Так как: $e_1, \dots, e_N$ — линейно независимые векторы, $\dim(Q_2) = N$, то $e_1, \dots, e_N$ — базис подпространства Q_2 длины N. Тогда: $Q_1 = L(e_1, \dots, e_N) = Q_2$. □

Лекция 9. Определитель матрицы

9.1. Определение определителя. Теория перестановок

Определение (определитель в пространстве $\mathbb{K}^{N\times N}$). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$; $F\colon \mathbb{K}^{N\times N} \implies \mathbb{K}$.

Пусть справедливы утверждения.

1. Пусть: $k = \overline{1, N}$, X, Y, $A_1, \ldots, A_{k-1}$, $A_{k+1}, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$. Тогда:

$$F(A_1, \ldots, A_{k-1}, X + Y, A_{k+1}, \ldots, A_N) = \\ = F(A_1, \ldots, A_{k-1}, X, A_{k+1}, \ldots, A_N) + F(A_1, \ldots, A_{k-1}, Y, A_{k+1}, \ldots, A_N).$$

2. Пусть: $k = \overline{1, N}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$. Тогда:

$$F(A_1, \ldots, A_{k-1}, \lambda A_k, A_{k+1}, \ldots, A_N) = \lambda F(A_1, \ldots, A_N).$$

3. Пусть: k, $m = \overline{1, N}$, $k < m$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$, $A_k = A_m$. Тогда $F(A_1, \ldots, A_N) = 0$.
4. $F(I) = 1$.

Будем говорить, что F — определитель в пространстве $\mathbb{K}^{N\times N}$.

Замечание. Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$.

Пусть $A \in \mathbb{K}^{1\times 1}$. Обозначим, $F(A) = A^1_1$. Очевидно, F — определитель в пространстве $\mathbb{K}^{1\times 1}$.

Пусть $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$. Обозначим, $F(A) = A^1_1 A^2_2 - A^2_1 A^1_2$. Очевидно, F — определитель в пространстве $\mathbb{K}^{2\times 2}$.

Пусть $A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$. Обозначим, $F(A) = A^1_1 A^2_2 A^3_3 + A^3_1 A^1_2 A^2_3 + A^2_1 A^3_2 A^1_3 - A^3_1 A^2_2 A^1_3 - A^1_1 A^3_2 A^2_3 - A^2_1 A^1_2 A^3_3$. Очевидно, F — определитель в пространстве $\mathbb{K}^{3\times 3}$.

Замечание (перестановки).

1. Пусть M — некоторое множество.

   Будем говорить, что σ — перестановка множества M, если: σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma) = M$, $\mathrm{R}(\sigma) = M$.

   Обозначим через $S(M)$ множество всех перестановок множества M.

   Пусть σ_1, $\sigma_2 \in S(M)$. Обозначим, $\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2 \circ \sigma_1$. Очевидно: $\sigma_2\sigma_1$ — обратимая функция,

$$\mathrm{D}(\sigma_2\sigma_1) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(\sigma_1) \wedge \sigma_1(x) \in \mathrm{D}(\sigma_2)\big\} = \big\{x\colon x \in M \wedge \sigma_1(x) \in M\big\} = \{x\colon x \in M\} = M,$$
$$\mathrm{R}(\sigma_2\sigma_1) = (\sigma_2\sigma_1)[M] = \sigma_2\big[\sigma_1[M]\big] = \sigma_2\big[\mathrm{R}(\sigma_1)\big] = \sigma_2[M] = \mathrm{R}(\sigma_2) = M.$$

Тогда $\sigma_2\sigma_1 \in S(M)$.

   Обозначим: $e(x) = x$ при $x \in M$. Очевидно, $e \in S(M)$.

   Пусть $\sigma \in S(M)$. Очевидно: σ^{-1} — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma^{-1}) = \mathrm{R}(\sigma) = M$, $\mathrm{R}(\sigma^{-1}) = \mathrm{D}(\sigma) = M$. Тогда $\sigma^{-1} \in S(M)$.

   Пусть σ_1, σ_2, $\sigma_3 \in S(M)$. Очевидно, $(\sigma_3\sigma_2)\sigma_1 = \sigma_3(\sigma_2\sigma_1)$.

   Пусть $\sigma \in S(M)$. Очевидно: $\sigma e = \sigma$, $e\sigma = \sigma$.

   Пусть $\sigma \in S(M)$. Очевидно: $\sigma\sigma^{-1} = e$, $\sigma^{-1}\sigma = e$.

2. Пусть: M — некоторое **конечное** множество; σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma) = M$, $\mathrm{R}(\sigma) \subseteq M$. Так как $\mathrm{D}(\sigma)$ — конечное множество, то $\mathrm{R}(\sigma)$ — конечное множество. Так как σ — обратимая функция, то: $\mathrm{card}\big(\mathrm{R}(\sigma)\big) = \mathrm{card}\big(\mathrm{D}(\sigma)\big) = \mathrm{card}(M)$. Так как: $\mathrm{R}(\sigma) \subseteq M$, $\mathrm{card}\big(\mathrm{R}(\sigma)\big) = \mathrm{card}(M)$, то $\mathrm{R}(\sigma) = M$. Тогда $\sigma \in S(M)$.

3. Обозначим, $S_0 = S(\varnothing)$.
Пусть $N \in \mathbb{N}$. Обозначим, $S_N = S\big(\{1, \ldots, N\}\big)$.
4. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; $k_1, \ldots, k_N = \overline{1, N}$, $k_1, \ldots, k_N$ — различные числа. Обозначим: $\sigma(1) = k_1, \ldots, \sigma(N) = k_N$. Очевидно: σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma) = \{1, \ldots, N\}$, $\mathrm{R}(\sigma) \subseteq \{1, \ldots, N\}$. Тогда $\sigma \in S_N$.

Замечание (простые и элементарные перестановки). Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$.

Пусть $\sigma \in S_N$. Будем говорить, что σ — простая перестановка, если существуют числа $k, m = \overline{1, N}$, удовлетворяющие условиям: $k < m$, $\sigma(k) = m$, $\sigma(m) = k$, $\sigma(i) = i$ при: $i = \overline{1, N}$, $i \neq k$, $i \neq m$.

Пусть $\sigma \in S_N$. Будем говорить, что σ раскладывается в произведение простых перестановок, если существует число $r \in \mathbb{N}$, существуют перестановки $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in S_N$, удовлетворяющие условиям: $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ — простые перестановки, $\sigma = \sigma_r \cdots \sigma_1$.

Пусть $\sigma \in S_N$. Будем говорить, что σ — элементарная перестановка, если существует число $k = \overline{1, N-1}$, удовлетворяющее условиям: $\sigma(k) = k+1$, $\sigma(k+1) = k$, $\sigma(i) = i$ при: $i = \overline{1, N}$, $i \neq k$, $i \neq k+1$.

Пусть $\sigma \in S_N$. Будем говорить, что σ раскладывается в произведение элементарных перестановок, если существует число $r \in \mathbb{N}$, существуют перестановки $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in S_N$, удовлетворяющие условиям: $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ — элементарные перестановки, $\sigma = \sigma_r \cdots \sigma_1$.

Очевидно, e раскладывается в произведение элементарных перестановок.

Утверждение. *Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$; $\sigma \in S_N$. Тогда σ раскладывается в произведение элементарных перестановок.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого числа $\tilde{N} = \overline{1, N}$ существует перестановка $\tilde{\sigma} \in S_N$, удовлетворяющая условиям: $\tilde{\sigma}$ раскладывается в произведение элементарных перестановок, $\tilde{\sigma}(i) = \sigma(i)$ при $i = \overline{1, \tilde{N}}$.

Так как $\sigma(1) = \overline{1, N}$, то существует число $k = \overline{1, N}$, удовлетворяющее условию $e(k) = \sigma(1)$. Пусть $k = 1$. Тогда: $e \in S_N$, e раскладывается в произведение элементарных перестановок, $e(1) = \sigma(1)$. Пусть $k \geqslant 2$. Тогда существует число $r \in \mathbb{N}$, существуют перестановки $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in S_N$, удовлетворяющие условиям: $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ — элементарные перестановки, $(e\sigma_r \cdots \sigma_1)(1) = \sigma(1)$. Следовательно: $e\sigma_r \cdots \sigma_1 \in S_N$, $e\sigma_r \cdots \sigma_1$ раскладывается в произведение элементарных перестановок, $(e\sigma_r \cdots \sigma_1)(1) = \sigma(1)$.

Пусть: $\tilde{N} = \overline{1, N-1}$, $\tilde{\sigma} \in S_N$, $\tilde{\sigma}$ раскладывается в произведение элементарных перестановок, $\tilde{\sigma}(i) = \sigma(i)$ при $i = \overline{1, \tilde{N}}$. Так как $\sigma(\tilde{N}+1) = \overline{1, N}$, то существует число $k = \overline{1, N}$, удовлетворяющее условию $\tilde{\sigma}(k) = \sigma(\tilde{N}+1)$. Предположим, что $k \leqslant \tilde{N}$. Тогда: $\sigma(\tilde{N}+1) = \tilde{\sigma}(k) = \sigma(k)$. Так как σ — обратимая функция, то $\tilde{N}+1 = k$ (что противоречит утверждению: $k \leqslant \tilde{N}$). Итак, $k \geqslant \tilde{N}+1$. Пусть $k = \tilde{N}+1$. Тогда: $\tilde{\sigma} \in S_N$, $\tilde{\sigma}$ раскладывается в произведение элементарных перестановок, $\tilde{\sigma}(i) = \sigma(i)$ при $i = \overline{1, \tilde{N}+1}$. Пусть $k \geqslant \tilde{N}+2$. Тогда существует число $r \in \mathbb{N}$, существуют перестановки $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in S_N$, удовлетворяющие условиям: $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ — элементарные перестановки, $(\tilde{\sigma}\sigma_r \cdots \sigma_1)(i) = \sigma(i)$ при $i = \overline{1, \tilde{N}+1}$. Следовательно: $\tilde{\sigma}\sigma_r \cdots \sigma_1 \in S_N$, $\tilde{\sigma}\sigma_r \cdots \sigma_1$ раскладывается в произведение элементарных перестановок, $(\tilde{\sigma}\sigma_r \cdots \sigma_1)(i) = \sigma(i)$ при $i = \overline{1, \tilde{N}+1}$. $\square$

Определение. Обозначим: $h(x) = 0$ при $x \in (-\infty, 0)$; $h(x) = 1$ при $x \in [0, +\infty)$. Очевидно, $h \colon \mathbb{R} \implies \mathbb{R}$. Будем говорить, что h — функция Хевисайда.

Определение. Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$.

Пусть $\sigma \in S_N$. Обозначим:

$$P(\sigma) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} h\bigl(\sigma(i) - \sigma(j)\bigr).$$

Очевидно, $P(\sigma) \in \mathbb{Z}_+$. Будем говорить, что $P(\sigma)$ — число беспорядков в перестановке σ.

Пусть $\sigma \in S_N$. Обозначим, $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{P(\sigma)}$. Очевидно, $\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}$. Будем говорить, что $\operatorname{sgn}(\sigma)$ — знак перестановки σ.

Очевидно: $P(e) = 0$, $\operatorname{sgn}(e) = 1$.

Определение. Пусть $N = 0$, 1.

Пусть $\sigma \in S_N$. Обозначим, $P(\sigma) = 0$. Будем говорить, что $P(\sigma)$ — число беспорядков в перестановке σ.

Пусть $\sigma \in S_N$. Обозначим, $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$. Будем говорить, что $\operatorname{sgn}(\sigma)$ — знак перестановки σ.

Пусть $\sigma \in S_N$. Очевидно, $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{P(\sigma)}$.

Замечание. Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$; $\sigma \in S_N$, $i_0 = \overline{1, N-1}$. Тогда:

$$\begin{gathered} P(\sigma) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} h\bigl(\sigma(i) - \sigma(j)\bigr) = \\ = \sum_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant N, \\ i, j \neq i_0,\, i_0+1}} h\bigl(\sigma(i) - \sigma(j)\bigr) + h\bigl(\sigma(i_0) - \sigma(i_0+1)\bigr) + \\ + \sum_{j=i_0+2}^{N} h\bigl(\sigma(i_0) - \sigma(j)\bigr) + \sum_{j=i_0+2}^{N} h\bigl(\sigma(i_0+1) - \sigma(j)\bigr) + \\ + \sum_{i=1}^{i_0-1} h\bigl(\sigma(i) - \sigma(i_0)\bigr) + \sum_{i=1}^{i_0-1} h\bigl(\sigma(i) - \sigma(i_0+1)\bigr). \end{gathered}$$

Утверждение. *Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$; σ_1, $\sigma_2 \in S_N$, σ_1 — элементарная перестановка. Тогда: $\bigl|P(\sigma_2\sigma_1) - P(\sigma_2)\bigr| = 1$, $\operatorname{sgn}(\sigma_2\sigma_1) = -\operatorname{sgn}(\sigma_2)$.*

Доказательство. Так как σ_1 — элементарная перестановка, то существует число $i_0 = \overline{1, N-1}$, удовлетворяющее условиям: $\sigma_1(i_0) = i_0 + 1$, $\sigma_1(i_0+1) = i_0$, $\sigma_1(i) = i$ при: $i = \overline{1, N}$, $i \neq i_0$, $i \neq i_0 + 1$. Тогда:

$$\begin{gathered} P(\sigma_2) = \sum_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant N, \\ i, j \neq i_0,\, i_0+1}} h\bigl(\sigma_2(i) - \sigma_2(j)\bigr) + h\bigl(\sigma_2(i_0) - \sigma_2(i_0+1)\bigr) + \\ + \sum_{j=i_0+2}^{N} h\bigl(\sigma_2(i_0) - \sigma_2(j)\bigr) + \sum_{j=i_0+2}^{N} h\bigl(\sigma_2(i_0+1) - \sigma_2(j)\bigr) + \\ + \sum_{i=1}^{i_0-1} h\bigl(\sigma_2(i) - \sigma_2(i_0)\bigr) + \sum_{i=1}^{i_0-1} h\bigl(\sigma_2(i) - \sigma_2(i_0+1)\bigr); \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} P(\sigma_2\sigma_1) = \sum_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant N, \\ i, j \neq i_0,\, i_0+1}} h\bigl((\sigma_2\sigma_1)(i) - (\sigma_2\sigma_1)(j)\bigr) + h\bigl((\sigma_2\sigma_1)(i_0) - (\sigma_2\sigma_1)(i_0+1)\bigr) + \\ + \sum_{j=i_0+2}^{N} h\bigl((\sigma_2\sigma_1)(i_0) - (\sigma_2\sigma_1)(j)\bigr) + \sum_{j=i_0+2}^{N} h\bigl((\sigma_2\sigma_1)(i_0+1) - (\sigma_2\sigma_1)(j)\bigr) + \end{gathered}$$

$$+\sum_{i=1}^{i_0-1} h\bigl((\sigma_2\sigma_1)(i)-(\sigma_2\sigma_1)(i_0)\bigr)+\sum_{i=1}^{i_0-1} h\bigl((\sigma_2\sigma_1)(i)-(\sigma_2\sigma_1)(i_0+1)\bigr)=$$

$$=\sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant N,\\ i,\,j\neq i_0,\,i_0+1}} h\bigl(\sigma_2(i)-\sigma_2(j)\bigr)+h\bigl(\sigma_2(i_0+1)-\sigma_2(i_0)\bigr)+$$

$$+\sum_{j=i_0+2}^{N} h\bigl(\sigma_2(i_0+1)-\sigma_2(j)\bigr)+\sum_{j=i_0+2}^{N} h\bigl(\sigma_2(i_0)-\sigma_2(j)\bigr)+$$

$$+\sum_{i=1}^{i_0-1} h\bigl(\sigma_2(i)-\sigma_2(i_0+1)\bigr)+\sum_{i=1}^{i_0-1} h\bigl(\sigma_2(i)-\sigma_2(i_0)\bigr).$$

Следовательно:

$$P(\sigma_2\sigma_1)-P(\sigma_2)=h\bigl(\sigma_2(i_0+1)-\sigma_2(i_0)\bigr)-h\bigl(\sigma_2(i_0)-\sigma_2(i_0+1)\bigr).$$

Так как σ_2 — обратимая функция, то $\sigma_2(i_0)\neq\sigma_2(i_0+1)$. Пусть $\sigma_2(i_0)<\sigma_2(i_0+1)$. Тогда $P(\sigma_2\sigma_1)-P(\sigma_2)=1$. Следовательно: $\bigl|P(\sigma_2\sigma_1)-P(\sigma_2)\bigr|=1$, $\operatorname{sgn}(\sigma_2\sigma_1)=-\operatorname{sgn}(\sigma_2)$. Пусть $\sigma_2(i_0)>\sigma_2(i_0+1)$. Тогда $P(\sigma_2\sigma_1)-P(\sigma_2)=-1$. Следовательно: $\bigl|P(\sigma_2\sigma_1)-P(\sigma_2)\bigr|=1$, $\operatorname{sgn}(\sigma_2\sigma_1)=-\operatorname{sgn}(\sigma_2)$. □

Утверждение.

1. Пусть: $N\in\mathbb{Z}$, $N\geqslant 2$; $r\in\mathbb{N}$, $\sigma_1,\dots,\sigma_r\in S_N$, $\sigma_1,\dots,\sigma_r$ — элементарные перестановки. Тогда $\operatorname{sgn}(\sigma_r\cdots\sigma_1)=(-1)^r$.

2. Пусть: $N\in\mathbb{N}$, $N\geqslant 2$; $\sigma\in S_N$, σ — элементарная перестановка. Тогда $\operatorname{sgn}(\sigma)=-1$.

3. Пусть: $N\in\mathbb{Z}_+$; σ_1, $\sigma_2\in S_N$. Тогда $\operatorname{sgn}(\sigma_2\sigma_1)=\operatorname{sgn}(\sigma_2)\operatorname{sgn}(\sigma_1)$.

4. Пусть: $N\in\mathbb{Z}_+$; $\sigma\in S_N$. Тогда $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})=\operatorname{sgn}(\sigma)$.

5. Пусть: $N\in\mathbb{Z}$, $N\geqslant 2$; $\sigma\in S_N$, σ — простая перестановка. Тогда $\operatorname{sgn}(\sigma)=-1$.

6. Пусть: $N\in\mathbb{Z}$, $N\geqslant 2$; $r\in\mathbb{N}$, $\sigma_1,\dots,\sigma_r\in S_N$, $\sigma_1,\dots,\sigma_r$ — простые перестановки. Тогда $\operatorname{sgn}(\sigma_r\cdots\sigma_1)=(-1)^r$.

Доказательство.

1. Очевидно:

$$\operatorname{sgn}(\sigma_r\cdots\sigma_1)=\operatorname{sgn}(e\sigma_r\cdots\sigma_1)=(-1)^r\operatorname{sgn}(e)=(-1)^r.$$

2. Очевидно: $\operatorname{sgn}(\sigma)=(-1)^1=-1$.

3. Пусть $N\geqslant 2$. Тогда существует число $r\in\mathbb{N}$, существуют перестановки $\sigma_{1,1},\dots,\sigma_{1,r}\in S_N$, удовлетворяющие условиям: $\sigma_{1,1},\dots,\sigma_{1,r}$ — элементарные перестановки, $\sigma_1=\sigma_{1,r}\cdots\sigma_{1,1}$. Следовательно:

$$\operatorname{sgn}(\sigma_2\sigma_1)=\operatorname{sgn}(\sigma_2\sigma_{1,r}\cdots\sigma_{1,1})=\operatorname{sgn}(\sigma_2)(-1)^r=\operatorname{sgn}(\sigma_2)\operatorname{sgn}(\sigma_1).$$

Пусть $N=0$, 1. Тогда σ_1, $\sigma_2=e$. Следовательно:

$$\operatorname{sgn}(\sigma_2\sigma_1)=\operatorname{sgn}(ee)=\operatorname{sgn}(e)=\operatorname{sgn}(e)\operatorname{sgn}(e)=\operatorname{sgn}(\sigma_2)\operatorname{sgn}(\sigma_1).$$

4. Очевидно: $\sigma\sigma^{-1}=e$, $\operatorname{sgn}(\sigma\sigma^{-1})=\operatorname{sgn}(e)$, $\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})=1$, $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})=\operatorname{sgn}(\sigma)$.

5. Так как σ — простая перестановка, то существуют числа k, $m=\overline{1,N}$, удовлетворяющие условиям: $k<m$, $\sigma(k)=m$, $\sigma(m)=k$, $\sigma(i)=i$ при: $i=\overline{1,N}$, $i\neq k$, $i\neq m$. Тогда существуют перестановки $\sigma_1,\dots,\sigma_{2(m-k)-1}\in S_N$, удовлетворяющие условиям: $\sigma_1,\dots,\sigma_{2(m-k)-1}$ — элементарные перестановки, $\sigma=e\sigma_{2(m-k)-1}\cdots\sigma_1$. Следовательно: $\operatorname{sgn}(\sigma)=\operatorname{sgn}(e\sigma_{2(m-k)-1}\cdots\sigma_1)=(-1)^{2(m-k)-1}\operatorname{sgn}(e)=-1$.

6. Очевидно: $\operatorname{sgn}(\sigma_r\cdots\sigma_1)=\operatorname{sgn}(\sigma_r)\cdots\operatorname{sgn}(\sigma_1)=(-1)^r$. □

9.2. Существование и единственность определителя

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $N \in \mathbb{N}$*;* F *— определитель в пространстве* $\mathbb{K}^{N \times N}$*.*

1. *Пусть:* k*,* $m = \overline{1, N}$*,* $k < m$*,* $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$*. Тогда:*

$$F(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \ldots, A_N) = -F(A_1, \ldots, A_N).$$

2. *Пусть:* $\sigma \in S_N$*,* $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$*. Тогда:*

$$F(A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(N)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) F(A_1, \ldots, A_N).$$

3. *Пусть* $\sigma \in S_N$*. Тогда:*

$$F(I_{\sigma(1)}, \ldots, I_{\sigma(N)}) = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

4. *Пусть* $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$*. Тогда:*

$$F(A) = F(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N}) A_1^{k_1} \cdots A_N^{k_N}.$$

5. *Пусть* $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$*. Тогда:*

$$F(A) = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_N^{\sigma(N)}.$$

Доказательство.

1. Очевидно:

$$\begin{gathered}
F(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k + A_m, A_{m+1}, \ldots, A_N) = 0, \\
F(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \ldots, A_N) + \\
+ F(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_m, A_{m+1}, \ldots, A_N) + \\
+ F(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \ldots, A_N) + \\
+ F(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_m, A_{m+1}, \ldots, A_N) = 0, \\
F(A_1, \ldots, A_N) + F(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \ldots, A_N) = 0, \\
F(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \ldots, A_N) = -F(A_1, \ldots, A_N).
\end{gathered}$$

2. Пусть $N \geqslant 2$. Тогда существует число $r \in \mathbb{N}$, существуют перестановки $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in S_N$, удовлетворяющие условиям: $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ — элементарные перестановки, $\sigma = \sigma_r \cdots \sigma_1$. Следовательно:

$$\begin{gathered}
F(A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(N)}) = F(A_{(\sigma_r \cdots \sigma_1)(1)}, \ldots, A_{(\sigma_r \cdots \sigma_1)(N)}) = (-1)^r F(A_1, \ldots, A_N) = \\
= \operatorname{sgn}(\sigma) F(A_1, \ldots, A_N).
\end{gathered}$$

Пусть $N = 1$. Тогда $\sigma = e$. Следовательно:

$$F(A_{\sigma(1)}) = F(A_{e(1)}) = F(A_1) = \operatorname{sgn}(e) F(A_1) = \operatorname{sgn}(\sigma) F(A_1).$$

3. Очевидно:

$$F(I_{\sigma(1)}, \ldots, I_{\sigma(N)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) F(I_1, \ldots, I_N) = \operatorname{sgn}(\sigma) F(I) = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

4. Очевидно:

$$F(A) = F(A_1, \ldots, A_N) = F(I_{k_1} A_1^{k_1}, \ldots, I_{k_N} A_N^{k_N}) = F(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N}) A_1^{k_1} \cdots A_N^{k_N}.$$

5. Очевидно:

$$F(A) = F(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N}) A_1^{k_1} \cdots A_N^{k_N} = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_N = \overline{1,N}, \\ k_1, \ldots, k_N \text{ — различные числа}}} F(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N}) A_1^{k_1} \cdots A_N^{k_N} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_N} F(I_{\sigma(1)}, \ldots, I_{\sigma(N)}) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_N^{\sigma(N)}. \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $N \in \mathbb{N}$*;* F_1*,* F_2 *— определители в пространстве* $\mathbb{K}^{N \times N}$*. Тогда* $F_1 = F_2$*.*

Доказательство. Очевидно, F_1, $F_2 \colon \mathbb{K}^{N \times N} \implies \mathbb{K}$. Пусть $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$. Тогда:

$$F_1(A) = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} = F_2(A).$$

Следовательно, $F_1 = F_2$. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $N \in \mathbb{N}$*;* $F(A) = \sum\limits_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_N^{\sigma(N)}$ *при* $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$*. Тогда* F *— определитель в пространстве* $\mathbb{K}^{N \times N}$*.*

Доказательство. Очевидно, $F \colon \mathbb{K}^{N \times N} \implies \mathbb{K}$.

1. Пусть: $k = \overline{1,N}$, X, Y, $A_1, \ldots, A_{k-1}$, $A_{k+1}, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$. Тогда:

$$F(A_1, \ldots, A_{k-1}, X + Y, A_{k+1}, \ldots, A_N) =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} (X + Y)^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} X^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} +$$
$$+ \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} Y^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} =$$
$$= F(A_1, \ldots, A_{k-1}, X, A_{k+1}, \ldots, A_N) + F(A_1, \ldots, A_{k-1}, Y, A_{k+1}, \ldots, A_N).$$

2. Пусть: $k = \overline{1,N}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$. Тогда:

$$F(A_1, \ldots, A_{k-1}, \lambda A_k, A_{k+1}, \ldots, A_N) =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} (\lambda A_k)^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} =$$
$$= \lambda \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} = \lambda F(A_1, \ldots, A_N).$$

3. Пусть: k, $m = \overline{1,N}$, $k < m$, X, $A_1, \ldots, A_{k-1}$, $A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_{m+1}, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$. Обозначим: $\sigma_0(k) = m$, $\sigma_0(m) = k$, $\sigma_0(i) = i$ при: $i = \overline{1,N}$, $i \neq k$, $i \neq m$. Тогда: $\sigma_0 \in S_N$, σ_0 — простая перестановка. Обозначим:

$$S_{N,1} = \bigl\{\sigma \colon \sigma \in S_N \land \sigma(k) < \sigma(m)\bigr\},$$

$$S_{N,2} = \bigl\{\sigma\colon \sigma \in S_N \wedge \sigma(k) > \sigma(m)\bigr\}.$$

Тогда: $S_{N,1} \cup S_{N,2} = S_N$, $S_{N,1} \cap S_{N,2} = \varnothing$, $S_{N,1}$, $S_{N,2} \neq \varnothing$. Следовательно:

$$\begin{gathered}
F(A_1, \ldots, A_{k-1}, X, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, X, A_{m+1}, \ldots, A_N) = \\
= \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} X^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_{m-1}^{\sigma(m-1)} X^{\sigma(m)} A_{m+1}^{\sigma(m+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} = \\
= \sum_{\sigma \in S_{N,1}} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} X^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_{m-1}^{\sigma(m-1)} X^{\sigma(m)} A_{m+1}^{\sigma(m+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} + \\
+ \sum_{\sigma \in S_{N,2}} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} X^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_{m-1}^{\sigma(m-1)} X^{\sigma(m)} A_{m+1}^{\sigma(m+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} = \\
= [\text{замена: } \tilde\sigma = \sigma\sigma_0,\ \sigma \in S_{N,2};\ \sigma = \tilde\sigma\sigma_0,\ \tilde\sigma \in S_{N,1}] = \\
= \sum_{\sigma \in S_{N,1}} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} X^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_{m-1}^{\sigma(m-1)} X^{\sigma(m)} A_{m+1}^{\sigma(m+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} + \\
+ \sum_{\tilde\sigma \in S_{N,1}} \operatorname{sgn}(\tilde\sigma\sigma_0) A_1^{(\tilde\sigma\sigma_0)(1)} \cdots A_{k-1}^{(\tilde\sigma\sigma_0)(k-1)} X^{(\tilde\sigma\sigma_0)(k)} \times \\
\times A_{k+1}^{(\tilde\sigma\sigma_0)(k+1)} \cdots A_{m-1}^{(\tilde\sigma\sigma_0)(m-1)} X^{(\tilde\sigma\sigma_0)(m)} A_{m+1}^{(\tilde\sigma\sigma_0)(m+1)} \cdots A_N^{(\tilde\sigma\sigma_0)(N)} = \\
= \sum_{\sigma \in S_{N,1}} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} X^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_{m-1}^{\sigma(m-1)} X^{\sigma(m)} A_{m+1}^{\sigma(m+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} - \\
- \sum_{\tilde\sigma \in S_{N,1}} \operatorname{sgn}(\tilde\sigma) A_1^{\tilde\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\tilde\sigma(k-1)} X^{\tilde\sigma(m)} A_{k+1}^{\tilde\sigma(k+1)} \cdots A_{m-1}^{\tilde\sigma(m-1)} X^{\tilde\sigma(k)} A_{m+1}^{\tilde\sigma(m+1)} \cdots A_N^{\tilde\sigma(N)} = 0.
\end{gathered}$$

4. Очевидно:

$$F(I) = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) I_1^{\sigma(1)} \cdots I_N^{\sigma(N)} = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) \delta_1^{\sigma(1)} \cdots \delta_N^{\sigma(N)} = \operatorname{sgn}(e) \delta_1^{e(1)} \cdots \delta_N^{e(N)} = 1. \quad \square$$

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\det_N$ определитель в пространстве $\mathbb{K}^{N\times N}$. Далее обычно будем писать $\det$ вместо $\det_N$.

9.3. Основные свойства определителя

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $N \in \mathbb{N}$.

1. Пусть: $k = \overline{1, N}$, $A_1, \ldots, A_{k-1}$, $A_{k+1}, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$. *Тогда:*

$$\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, \theta, A_{k+1}, \ldots, A_N) = 0.$$

2. Пусть: $N \geqslant 2$, $k = \overline{1, N}$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$, $A_k \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_N)$. *Тогда:*

$$\det(A_1, \ldots, A_N) = 0.$$

3. Пусть: $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$ *— линейно зависимые столбцы. Тогда:*

$$\det(A_1, \ldots, A_N) = 0.$$

4. Пусть: $N \geqslant 2$, $k = \overline{1, N}$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$, $X \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_N)$. *Тогда:*

$$\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + X, A_{k+1}, \ldots, A_N) = \det(A_1, \ldots, A_N).$$

5. Пусть: $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $k_1, \ldots, k_N = \overline{1, N}$. *Тогда:*

$$\det(A_{k_1}, \ldots, A_{k_N}) = \det(A)\det(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N}).$$

6. Пусть A, $B \in \mathbb{K}^{N\times N}$. *Тогда:*

$$\det(BA) = \det(B)\det(A).$$

7. Пусть $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$. *Тогда:*

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Доказательство.

1. Очевидно:

$$\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, \theta, A_{k+1}, \ldots, A_N) = \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, 0\theta, A_{k+1}, \ldots, A_N) = \\ = 0\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, \theta, A_{k+1}, \ldots, A_N) = 0.$$

2. Так как $A_k \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_N)$, то существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{k-1}$, $\alpha^{k+1}, \ldots, \alpha^N$, удовлетворяющие условиям: $\alpha^1, \ldots, \alpha^{k-1}$, $\alpha^{k+1}, \ldots, \alpha^N \in \mathbb{K}$, $A_k = \sum\limits_{m=\overline{1,N},\, m\neq k} \alpha^m A_m$. Тогда:

$$\det(A_1, \ldots, A_N) = \det\Big(A_1, \ldots, A_{k-1}, \sum_{m=\overline{1,N},\, m\neq k} \alpha^m A_m, A_{k+1}, \ldots, A_N\Big) = \\ = \sum_{m=\overline{1,N},\, m\neq k} \alpha^m \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_N) = 0.$$

3. Пусть $N \geqslant 2$. Так как $A_1, \ldots, A_N$ — линейно зависимые столбцы, то существует номер $k = \overline{1, N}$, удовлетворяющий условию $A_k \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_N)$. Тогда $\det(A_1, \ldots, A_N) = 0$.

Пусть $N = 1$. Так как A_1 — линейно зависимый столбец, то $A_1 = \theta$. Тогда: $\det(A_1) = \det(\theta) = 0$.

4. Очевидно:

$$\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + X, A_{k+1}, \ldots, A_N) = \\ = \det(A_1, \ldots, A_N) + \det(A_1, \ldots, A_{k-1}, X, A_{k+1}, \ldots, A_N) = \det(A_1, \ldots, A_N).$$

5. Пусть числа $k_1, \ldots, k_N$ не являются различными. Тогда: $\det(A_{k_1}, \ldots, A_{k_N}) = 0$, $\det(A)\det(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N}) = 0$. Следовательно, $\det(A_{k_1}, \ldots, A_{k_N}) = \det(A)\det(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N})$.

Пусть $k_1, \ldots, k_N$ — различные числа. Обозначим: $\sigma(1) = k_1, \ldots, \sigma(N) = k_N$. Тогда $\sigma \in S_N$. Следовательно:

$$\det(A_{k_1}, \ldots, A_{k_N}) = \det(A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(N)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\det(A_1, \ldots, A_N) = \operatorname{sgn}(\sigma)\det(A); \\ \det(A)\det(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N}) = \det(A)\det(I_{\sigma(1)}, \ldots, I_{\sigma(N)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\det(A)\det(I_1, \ldots, I_N) = \\ = \operatorname{sgn}(\sigma)\det(A)\det(I) = \operatorname{sgn}(\sigma)\det(A).$$

Тогда $\det(A_{k_1}, \ldots, A_{k_N}) = \det(A)\det(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N})$.

6. Очевидно:

$$\det(BA) = \det\bigl((BA)_1, \ldots, (BA)_N\bigr) = \det(B_{k_1}A_1^{k_1}, \ldots, B_{k_N}A_N^{k_N}) =$$
$$= \det(B_{k_1}, \ldots, B_{k_N})A_1^{k_1}\cdots A_N^{k_N} = \det(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N})\det(B)A_1^{k_1}\cdots A_N^{k_N} = \det(B)\det(A).$$

7. Очевидно:

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma\in S_N}\operatorname{sgn}(\sigma)(A^T)_1^{\sigma(1)}\cdots(A^T)_N^{\sigma(N)} = \sum_{\sigma\in S_N}\operatorname{sgn}(\sigma)A^1_{\sigma(1)}\cdots A^N_{\sigma(N)} =$$
$$= \sum_{\sigma\in S_N}\operatorname{sgn}(\sigma)A_1^{\sigma^{-1}(1)}\cdots A_N^{\sigma^{-1}(N)} = [\text{замена: } \tilde\sigma = \sigma^{-1},\ \sigma\in S_N;\ \sigma = \tilde\sigma^{-1},\ \tilde\sigma\in S_N] =$$
$$= \sum_{\tilde\sigma\in S_N}\operatorname{sgn}(\tilde\sigma^{-1})A_1^{\tilde\sigma(1)}\cdots A_N^{\tilde\sigma(N)} = \sum_{\tilde\sigma\in S_N}\operatorname{sgn}(\tilde\sigma)A_1^{\tilde\sigma(1)}\cdots A_N^{\tilde\sigma(N)} = \det(A). \quad \square$$

Определение. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$, $N\in\mathbb{Z}$, $N\geqslant 2$; $A\in\mathbb{K}^{N\times N}$, i, $j = \overline{1,N}$. Обозначим через $\overline{\Delta}_i^j(A)$ определитель матрицы, которая получается из матрицы A вычёркиванием столбца A_i и строки A^j. Будем говорить, что $\overline{\Delta}_i^j(A)$ — минор матрицы A, дополнительный к элементу A_i^j. Будем говорить, что $(-1)^{j+i}\overline{\Delta}_i^j(A)$ — алгебраическое дополнение элемента A_i^j в матрице A.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* $N\in\mathbb{Z}$*,* $N\geqslant 2$*;* $A\in\mathbb{K}^{N\times N}$*. Тогда:*

$$\det(A_1, \ldots, A_{N-1}, I_N) = \overline{\Delta}_N^N(A).$$

Доказательство. Пусть $\tilde\sigma\in S_{N-1}$. Обозначим: $\varphi(\tilde\sigma)(k) = \tilde\sigma(k)$ при $k = \overline{1, N-1}$; $\varphi(\tilde\sigma)(N) = N$. Тогда: $\varphi(\tilde\sigma)\in S_N$, $\operatorname{sgn}\bigl(\varphi(\tilde\sigma)\bigr) = \operatorname{sgn}(\tilde\sigma)$. Очевидно: φ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\varphi) = S_{N-1}$, $\mathrm{R}(\varphi) = \bigl\{\sigma\colon \sigma\in S_N\wedge\sigma(N) = N\bigr\}$. Тогда:

$$\det(A_1, \ldots, A_{N-1}, I_N) = \sum_{\sigma\in S_N}\operatorname{sgn}(\sigma)A_1^{\sigma(1)}\cdots A_{N-1}^{\sigma(N-1)}I_N^{\sigma(N)} =$$
$$= \sum_{\sigma\in S_N}\operatorname{sgn}(\sigma)A_1^{\sigma(1)}\cdots A_{N-1}^{\sigma(N-1)}\delta_N^{\sigma(N)} = \sum_{\sigma\in S_N,\,\sigma(N)=N}\operatorname{sgn}(\sigma)A_1^{\sigma(1)}\cdots A_{N-1}^{\sigma(N-1)}\delta_N^{\sigma(N)} =$$
$$= \sum_{\sigma\in S_N,\,\sigma(N)=N}\operatorname{sgn}(\sigma)A_1^{\sigma(1)}\cdots A_{N-1}^{\sigma(N-1)} = \bigl[\text{замена: } \sigma = \varphi(\tilde\sigma),\ \tilde\sigma\in S_{N-1}\bigr] =$$
$$= \sum_{\tilde\sigma\in S_{N-1}}\operatorname{sgn}\bigl(\varphi(\tilde\sigma)\bigr)A_1^{\varphi(\tilde\sigma)(1)}\cdots A_{N-1}^{\varphi(\tilde\sigma)(N-1)} = \sum_{\tilde\sigma\in S_{N-1}}\operatorname{sgn}(\tilde\sigma)A_1^{\tilde\sigma(1)}\cdots A_{N-1}^{\tilde\sigma(N-1)} = \overline{\Delta}_N^N(A). \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* $N\in\mathbb{Z}$*,* $N\geqslant 2$*;* $A\in\mathbb{K}^{N\times N}$*,* i_0*,* $j_0 = \overline{1,N}$*. Тогда:*

$$\det(A_1, \ldots, A_{i_0-1}, I_{j_0}, A_{i_0+1}, \ldots, A_N) = (-1)^{j_0+i_0}\overline{\Delta}_{i_0}^{j_0}(A).$$

Доказательство. Обозначим:

$$B = (A_1, \ldots, A_{i_0-1}, A_{i_0+1}, \ldots, A_N, I_{j_0}),$$
$$C = \begin{pmatrix} B^1 \\ \vdots \\ B^{j_0-1} \\ B^{j_0+1} \\ \vdots \\ B^N \\ B^{j_0} \end{pmatrix}.$$

Тогда:

$$\det(A_1,\ldots,A_{i_0-1},I_{j_0},A_{i_0+1},\ldots,A_N)=(-1)^{N-i_0}\det(A_1,\ldots,A_{i_0-1},A_{i_0+1},\ldots,A_N,I_{j_0})=$$
$$=(-1)^{N-i_0}\det(B)=(-1)^{N-i_0}\det\begin{pmatrix}B^1\\ \vdots\\ B^{j_0-1}\\ B^{j_0}\\ B^{j_0+1}\\ \vdots\\ B^N\end{pmatrix}=(-1)^{N-i_0}(-1)^{N-j_0}\det\begin{pmatrix}B^1\\ \vdots\\ B^{j_0-1}\\ B^{j_0+1}\\ \vdots\\ B^N\\ B^{j_0}\end{pmatrix}=$$
$$=(-1)^{N-i_0}(-1)^{N-j_0}\det(C)=(-1)^{N-i_0}(-1)^{N-j_0}\det(C_1,\ldots,C_{N-1},C_N)=$$
$$=(-1)^{j_0+i_0}\det(C_1,\ldots,C_{N-1},I_N)=(-1)^{j_0+i_0}\overline{\Delta}_N^N(C)=(-1)^{j_0+i_0}\overline{\Delta}_{i_0}^{j_0}(A).\quad\square$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* $N\in\mathbb{Z}$*,* $N\geqslant 2$*;* $A\in\mathbb{K}^{N\times N}$*,* $i_0=\overline{1,N}$*. Тогда:*

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{N}(-1)^{j+i_0}\overline{\Delta}_{i_0}^{j}(A)A_{i_0}^{j}.$$

Доказательство. Очевидно:

$$\det(A)=\det(A_1,\ldots,A_{i_0-1},A_{i_0},A_{i_0+1},\ldots,A_N)=\det(A_1,\ldots,A_{i_0-1},I_jA_{i_0}^j,A_{i_0+1},\ldots,A_N)=$$
$$=\det(A_1,\ldots,A_{i_0-1},I_j,A_{i_0+1},\ldots,A_N)A_{i_0}^j=\sum_{j=1}^{N}(-1)^{j+i_0}\overline{\Delta}_{i_0}^{j}(A)A_{i_0}^{j}.\quad\square$$

9.4. Метод Гаусса—Жордана для вычисления определителя

Замечание. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; $N\in\mathbb{Z}$, $N\geqslant 2$; $A\in\mathbb{K}^{N\times N}$.

Пусть: $\exists i=\overline{1,N}(A_i=\tilde{\theta})$ либо $\exists j=\overline{1,N}(A^j=\tilde{\theta})$. Тогда $\det(A)=0$. Остановим процесс.

Пусть: $\forall i=\overline{1,N}(A_i\neq\tilde{\theta})$, $\forall j=\overline{1,N}(A^j\neq\tilde{\theta})$, $N=2$. Тогда $\det(A)=A_1^1A_2^2-A_1^2A_2^1$. Остановим процесс.

Пусть: $\forall i=\overline{1,N}(A_i\neq\tilde{\theta})$, $\forall j=\overline{1,N}(A^j\neq\tilde{\theta})$, $N\geqslant 3$. Обозначим, $N_1=N-1$. Тогда: $N_1\in\mathbb{Z}$, $N_1\geqslant 2$. Выберем числа i_0, $j_0=\overline{1,N}$, удовлетворяющие условию $A_{i_0}^{j_0}\neq 0$. Первый вариант. Обнулим элементы, стоящие над элементом $A_{i_0}^{j_0}$, обнулим элементы, стоящие под элементом $A_{i_0}^{j_0}$. Разложим полученный определитель по столбцу с номером i_0, получим число $\lambda_1\in\mathbb{R}$, получим матрицу $B_1\in\mathbb{R}^{N_1\times N_1}$, удовлетворяющую условию $\det(A)=\lambda_1\det(B_1)$. Второй вариант. Обнулим элементы, стоящие левее элемента $A_{i_0}^{j_0}$, обнулим элементы, стоящие правее элемента $A_{i_0}^{j_0}$. Разложим полученный определитель по строке с номером j_0, получим число $\lambda_1\in\mathbb{R}$, получим матрицу $B_1\in\mathbb{R}^{N_1\times N_1}$, удовлетворяющую условию $\det(A)=\lambda_1\det(B_1)$. Перейдём к следующему шагу.

Пусть: $\exists i=\overline{1,N_1}\big((B_1)_i=\tilde{\theta}\big)$ либо $\exists j=\overline{1,N_1}\big((B_1)^j=\tilde{\theta}\big)$. Тогда: $\det(A)=\lambda_1\det(B_1)=0$. Остановим процесс.

Пусть: $\forall i=\overline{1,N_1}\big((B_1)_i\neq\tilde{\theta}\big)$, $\forall j=\overline{1,N_1}\big((B_1)^j\neq\tilde{\theta}\big)$, $N_1=2$. Тогда: $\det(A)=\lambda_1\det(B_1)=\lambda_1\big((B_1)_1^1(B_1)_2^2-(B_1)_1^2(B_1)_2^1\big)$. Остановим процесс.

Пусть: $\forall i=\overline{1,N_1}\big((B_1)_i\neq\tilde{\theta}\big)$, $\forall j=\overline{1,N_1}\big((B_1)^j\neq\tilde{\theta}\big)$, $N_1\geqslant 3$. Обозначим, $N_2=N_1-1$. Тогда: $N_2\in\mathbb{Z}$, $N_2\geqslant 2$. Выберем числа i_0, $j_0=\overline{1,N_1}$, удовлетворяющие условию $(B_1)_{i_0}^{j_0}\neq 0$.

Первый вариант. Обнулим элементы, стоящие над элементом $(B_1)_{i_0}^{j_0}$, обнулим элементы, стоящие под элементом $(B_1)_{i_0}^{j_0}$. Разложим полученный определитель по столбцу с номером i_0, получим число $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, получим матрицу $B_2 \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_2}$, удовлетворяющую условию $\det(A) = \lambda_2 \det(B_2)$. Второй вариант. Обнулим элементы, стоящие левее элемента $(B_1)_{i_0}^{j_0}$, обнулим элементы, стоящие правее элемента $(B_1)_{i_0}^{j_0}$. Разложим полученный определитель по строке с номером j_0, получим число $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, получим матрицу $B_2 \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_2}$, удовлетворяющую условию $\det(A) = \lambda_2 \det(B_2)$. Перейдём к следующему шагу.

Продолжая рассуждения, получим $\det(A)$.

Лекция 10. Размерность линейного пространства. Ранг матрицы

10.1. Теорема о базисном миноре

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$, $i_1 < \cdots < i_r$, $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N_2}$, $j_1 < \cdots < j_r$. Обозначим:

$$\Delta^{j_1, \ldots, j_r}_{i_1, \ldots, i_r}(A) = \begin{vmatrix} A^{j_1}_{i_1} & \cdot & A^{j_1}_{i_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^{j_r}_{i_1} & \cdot & A^{j_r}_{i_r} \end{vmatrix}.$$

Будем говорить, что $\Delta^{j_1, \ldots, j_r}_{i_1, \ldots, i_r}(A)$ — минор матрицы A порядка r.

Пусть: $r_1 \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_{r_1} = \overline{1, N_1}$, $i_1 < \cdots < i_{r_1}$, $j_1, \ldots, j_{r_1} = \overline{1, N_2}$, $j_1 < \cdots < j_{r_1}$; $r_2 \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_{r_2} = \overline{1, N_1}$, $k_1 < \cdots < k_{r_2}$, $m_1, \ldots, m_{r_2} = \overline{1, N_2}$, $m_1 < \cdots < m_{r_2}$. Будем говорить, что минор $\Delta^{m_1, \ldots, m_{r_2}}_{k_1, \ldots, k_{r_2}}(A)$ окаймляет минор $\Delta^{j_1, \ldots, j_{r_1}}_{i_1, \ldots, i_{r_1}}(A)$, если: $r_1 < r_2$, $i_1, \ldots, i_{r_1} \in \{k_1, \ldots, k_{r_2}\}$, $j_1, \ldots, j_{r_1} \in \{m_1, \ldots, m_{r_2}\}$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$, $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — базис множества $\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}$ длины r. Будем говорить, что $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — базисные столбцы матрицы A.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N_2}$, $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ — базис множества $\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}$ длины r. Будем говорить, что $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ — базисные строки матрицы A.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$, $i_1 < \cdots < i_r$, $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N_2}$, $j_1 < \cdots < j_r$, $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — базис множества $\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}$ длины r; $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ — базис множества $\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}$ длины r. Будем говорить, что $\Delta^{j_1, \ldots, j_r}_{i_1, \ldots, i_r}(A)$ — базисный минор матрицы A.

Теорема (о базисном миноре)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* N_1*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*;* $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$*.*

Пусть: $r \in \mathbb{N}$*,* $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$*,* $i_1 < \cdots < i_r$*,* $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N_2}$*,* $j_1 < \cdots < j_r$*,* $\Delta^{j_1, \ldots, j_r}_{i_1, \ldots, i_r}(A) \neq 0$*.*

Пусть все миноры матрицы A *порядка* $r+1$*, окаймляющие минор* $\Delta^{j_1, \ldots, j_r}_{i_1, \ldots, i_r}(A)$*, равны нулю (если они существуют).*

Тогда: $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ *— базис множества* $\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}$ *длины* r*;* $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ *— базис множества* $\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}$ *длины* r*.*

Доказательство. Обозначим: $\delta = \Delta^{j_1, \ldots, j_r}_{i_1, \ldots, i_r}(A)$,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A^{j_1}_{i_1} & \cdot & A^{j_1}_{i_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^{j_r}_{i_1} & \cdot & A^{j_r}_{i_r} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — линейно зависимые столбцы. Тогда $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_r$ — линейно зависимые столбцы. Следовательно: $\delta = \det(\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_r) = 0$ (что противоречит утверждению: $\delta \neq 0$). Итак, $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — линейно независимые столбцы.

Пусть: $i = \overline{1, N_1}$, $j = \overline{1, N_2}$. Обозначим:

$$B(i, j) = \begin{pmatrix} A^{j_1}_{i_1} & \cdot & A^{j_1}_{i_r} & A^{j_1}_{i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A^{j_r}_{i_1} & \cdot & A^{j_r}_{i_r} & A^{j_r}_{i} \\ A^{j}_{i_1} & \cdot & A^{j}_{i_r} & A^{j}_{i} \end{pmatrix}.$$

Пусть $i \in \{i_1, \ldots, i_r\}$. Тогда последний столбец матрицы $B(i,j)$ равен одному из предыдущих столбцов матрицы $B(i,j)$. Следовательно, $\det\bigl(B(i,j)\bigr) = 0$.

Пусть $j \in \{j_1, \ldots, j_r\}$. Тогда последняя строка матрицы $B(i,j)$ равна одной из предыдущих строк матрицы $B(i,j)$. Следовательно, $\det\bigl(B(i,j)\bigr) = 0$.

Пусть: $i \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$, $j \notin \{j_1, \ldots, j_r\}$. Тогда $\det\bigl(B(i,j)\bigr)$ равен (с точностью до знака) одному из миноров матрицы A порядка $r+1$, окаймляющих минор δ. Следовательно, $\det\bigl(B(i,j)\bigr) = 0$.

Итак, $\det\bigl(B(i,j)\bigr) = 0$. Тогда:

$$0 = \det\bigl(B(i,j)\bigr) = (-1)^{(r+1)+1}\overline{\Delta}_1^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr)A_{i_1}^j + \cdots + (-1)^{(r+1)+r}\overline{\Delta}_r^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr)A_{i_r}^j + \\ + (-1)^{(r+1)+(r+1)}\overline{\Delta}_{r+1}^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr)A_i^j.$$

Так как: $(-1)^{(r+1)+(r+1)}\overline{\Delta}_{r+1}^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr) = \delta \neq 0$, то:

$$A_i^j = (-1)^{(r+2)+1}\frac{\overline{\Delta}_1^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr)}{\delta}A_{i_1}^j + \cdots + (-1)^{(r+2)+r}\frac{\overline{\Delta}_r^{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr)}{\delta}A_{i_r}^j.$$

Пусть $k = \overline{1,r}$. Очевидно, число $(-1)^{(r+2)+k}\frac{\overline{\Delta}_k^{r+1}(B(i,j))}{\delta}$ не зависит от выбора номера $j = \overline{1,N_2}$. Обозначим, $C^k(i) = (-1)^{(r+2)+k}\frac{\overline{\Delta}_k^{r+1}(B(i,j))}{\delta}$. Тогда $A_i^j = C^1(i)A_{i_1}^j + \cdots + C^r(i)A_{i_r}^j$. Следовательно, $(A_i)^j = \bigl(C^1(i)A_{i_1} + \cdots + C^r(i)A_{i_r}\bigr)^j$. В силу произвольности выбора номера $j = \overline{1,N_2}$ получаем, что $A_i = C^1(i)A_{i_1} + \cdots + C^r(i)A_{i_r}$.

Аналогично проводятся рассуждения для строк. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$; $Q \subseteq L$, e *— базис множества* Q *длины* r. *Тогда* $\operatorname{rank}(Q) = r$.

Доказательство. Так как e — базис множества Q длины r, то: $r \in \mathbb{N}$, $e \in Q^r$, $e_1, \ldots, e_r$ — линейно независимые векторы, $Q \subseteq L(e_1, \ldots, e_r)$.

Итак: $e_1, \ldots, e_r \in Q$, $e_1, \ldots, e_r$ — линейно независимые векторы.

Пусть $x_1, \ldots, x_{r+1} \in Q$. Обозначим: $\tilde{x}_i^j = [x_i]^j(e)$ при: $i = \overline{1, r+1}$, $j = \overline{1,r}$. Очевидно: $\tilde{x} \in \mathbb{K}^{r\times(r+1)}$, $\tilde{x}_1 = [x_1](e), \ldots, \tilde{x}_{r+1} = [x_{r+1}](e)$.

Пусть $\tilde{x} = \Theta$ (здесь Θ — нулевой элемент пространства $\mathbb{K}^{r\times(r+1)}$). Тогда $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{r+1} = \tilde{\theta}$ (здесь $\tilde{\theta}$ — нулевой элемент пространства $\mathbb{K}^r$). Следовательно, $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{r+1}$ — линейно зависимые столбцы.

Пусть $\tilde{x} \neq \Theta$. Тогда существует число $r_0 = \overline{1,r}$, существуют числа $i_1, \ldots, i_{r_0} = \overline{1, r+1}$, существуют числа $j_1, \ldots, j_{r_0} = \overline{1,r}$, удовлетворяющие условиям: $i_1 < \cdots < i_{r_0}$, $j_1 < \cdots < j_{r_0}$, $\overline{\Delta}_{i_1,\ldots,i_{r_0}}^{j_1,\ldots,j_{r_0}}(\tilde{x}) \neq 0$, все миноры матрицы $\tilde{x}$ порядка r_0+1, окаймляющие минор $\overline{\Delta}_{i_1,\ldots,i_{r_0}}^{j_1,\ldots,j_{r_0}}(\tilde{x})$, равны нулю (если они существуют). Следовательно, $\tilde{x}_{i_1}, \ldots, \tilde{x}_{i_{r_0}}$ — базис множества $\{\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{r+1}\}$ длины r_0. Так как: $r_0 \leqslant r < r+1$, то $\tilde{x}, \ldots, \tilde{x}_{r+1}$ — линейно зависимые столбцы.

Итак, $\tilde{x}, \ldots, \tilde{x}_{r+1}$ — линейно зависимые столбцы. Тогда $x_1, \ldots, x_{r+1}$ — линейно зависимые векторы. Итак, $\operatorname{rank}(Q) = r$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in L$. *Тогда* $\dim\bigl(L(x_1, \ldots, x_r)\bigr) = \operatorname{rank}\bigl(\{x_1, \ldots, x_r\}\bigr)$.

Доказательство. Обозначим, $r_0 = \operatorname{rank}\big(\{x_1, \ldots, x_r\}\big)$. Тогда $r_0 \in \overline{\mathbb{Z}}_+$. Так как $r_0 \leqslant r$, то $r_0 \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть $r_0 = 0$. Так как $\operatorname{rank}\big(\{x_1, \ldots, x_r\}\big) = r_0$, то $x_1, \ldots, x_r = \theta$. Тогда: $\dim\big(L(x_1, \ldots, x_r)\big) = \operatorname{rank}\big(L(x_1, \ldots, x_r)\big) = \operatorname{rank}\big(\{\theta\}\big) = 0 = r_0$.

Пусть $r_0 \neq 0$. Тогда $r_0 \in \mathbb{N}$. Так как $\operatorname{rank}\big(\{x_1, \ldots, x_r\}\big) = r_0$, то существуют векторы $e_1, \ldots, e_{r_0}$, удовлетворяющие условию: $e_1, \ldots, e_{r_0}$ — базис множества $\{x_1, \ldots, x_r\}$ длины r_0. Тогда $e_1, \ldots, e_{r_0}$ — базис подпространства $L(x_1, \ldots, x_r)$ длины r_0. Следовательно, $\dim\big(L(x_1, \ldots, x_r)\big) = r_0$. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $Q \subseteq L$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_{N_1} \in Q$*,* $x_1, \ldots, x_{N_1}$ *— линейно независимые векторы,* $N_1 < \operatorname{rank}(Q)$*. Тогда существует вектор* $x \in Q$*, удовлетворяющий условию:* $x_1, \ldots, x_{N_1}, x$ *— линейно независимые векторы.*

Доказательство. Предположим, что для любого вектора $x \in Q$ справедливо утверждение: $x_1, \ldots, x_{N_1}, x$ — линейно зависимые векторы.

По условию: $N_1 \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_{N_1} \in Q$, $x_1, \ldots, x_{N_1}$ — линейно независимые векторы.

Пусть $x \in Q$. Так как: $x_1, \ldots, x_{N_1}$ — линейно независимые векторы, $x_1, \ldots, x_{N_1}, x$ — линейно зависимые векторы, то $x \in L(x_1, \ldots, x_{N_1})$. Итак, $x_1, \ldots, x_{N_1}$ — базис множества Q. Тогда $\operatorname{rank}(Q) = N_1$ (что противоречит утверждению: $N_1 < \operatorname{rank}(Q)$). Итак, существует вектор $x \in Q$, удовлетворяющий условию: $x_1, \ldots, x_{N_1}, x$ — линейно независимые векторы. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $Q \subseteq L$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_{N_1} \in Q$*,* $x_1, \ldots, x_{N_1}$ *— линейно независимые векторы,* $N_2 \in \mathbb{Z}$*,* $N_1 < N_2 \leqslant \operatorname{rank}(Q)$*. Тогда существуют векторы* $x_{N_1+1}, \ldots, x_{N_2} \in Q$*, удовлетворяющие условию:* $x_1, \ldots, x_{N_2}$ *— линейно независимые векторы.*

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $Q_2 \subseteq L$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\operatorname{rank}(Q_2) = N_2$*;* $Q_1 \subseteq Q_2$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\operatorname{rank}(Q_1) = N_1$*,* $e_1, \ldots, e_{N_1}$ *— базис множества* Q_1*,* $N_1 < N_2$*. Тогда существуют векторы* $e_{N_1+1}, \ldots, e_{N_2}$*, удовлетворяющие условию:* $e_1, \ldots, e_{N_2}$ *— базис множества* Q_2*.*

Доказательство. Так как: $e_1, \ldots, e_{N_1} \in Q_1$, $Q_1 \subseteq Q_2$, то $e_1, \ldots, e_{N_1} \in Q_2$. Так как: $e_1, \ldots, e_{N_1}$ — линейно независимые векторы, $N_1 < N_2 = \operatorname{rank}(Q_2)$, то существуют векторы $e_{N_1+1}, \ldots, e_{N_2} \in Q_2$, удовлетворяющие условию: $e_1, \ldots, e_{N_2}$ — линейно независимые векторы. Так как: $\operatorname{rank}(Q_2) = N_2$, $e_1, \ldots, e_{N_2} \in Q_2$, $e_1, \ldots, e_{N_2}$ — линейно независимые векторы, то $e_1, \ldots, e_{N_2}$ — базис множества Q_2. $\square$

10.2. Ранг матрицы

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $N \in \mathbb{N}$*;* $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$*,* $\det(A) = 0$*. Тогда* $A_1, \ldots, A_N$ *— линейно зависимые столбцы.*

Доказательство. Пусть $A = \Theta$ (здесь Θ — нулевой элемент пространства $\mathbb{K}^{N \times N}$). Тогда $A_1, \ldots, A_N = \tilde{\theta}$ (здесь $\tilde{\theta}$ — нулевой элемент пространства $\mathbb{K}^N$). Следовательно, $A_1, \ldots, A_N$ — линейно зависимые столбцы.

Пусть $A \neq \Theta$. Тогда существует число $r = \overline{1, N}$, существуют числа $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N}$, существуют числа $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N}$, удовлетворяющие условиям: $i_1 < \cdots < i_r$, $j_1 < \cdots < j_r$, $\overline{\Delta}^{j_1, \ldots, j_r}_{i_1, \ldots, i_r}(A) \neq 0$, все миноры матрицы A порядка $r + 1$, окаймляющие минор

$\overline{\Delta}^{j_1,\dots,j_r}_{i_1,\dots,i_r}(A)$, равны нулю (если они существуют). Следовательно, $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ — базис множества $\{A_1, \dots, A_N\}$ длины r. Так как $\det(A) = 0$, то $r \neq N$. Тогда $r < N$. Следовательно, $A_1, \dots, A_N$ — линейно зависимые столбцы. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_r = \overline{1, N_1}$, $i_1 < \dots < i_r$, $j_1, \dots, j_r = \overline{1, N_2}$, $j_1 < \dots < j_r$, $\Delta^{j_1,\dots,j_r}_{i_1,\dots,i_r}(A) \neq 0$.

Пусть все миноры матрицы A порядка $r + 1$, окаймляющие минор $\Delta^{j_1,\dots,j_r}_{i_1,\dots,i_r}(A)$, равны нулю (если они существуют).

Тогда: $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ — базис множества $\{A_1, \dots, A_{N_1}\}$ длины r; $A^{j_1}, \dots, A^{j_r}$ — базис множества $\{A^1, \dots, A^{N_2}\}$ длины r.

Так как $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ — базис множества $\{A_1, \dots, A_{N_1}\}$ длины r, то $\operatorname{rank}\bigl(\{A_1, \dots, A_{N_1}\}\bigr) = r$. Так как $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ — базис множества $\{A_1, \dots, A_{N_1}\}$ длины r, то $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ — базис подпространства $L(A_1, \dots A_{N_1})$ длины r. Тогда $\dim\bigl(L(A_1, \dots A_{N_1})\bigr) = r$.

Так как $A^{j_1}, \dots, A^{j_r}$ — базис множества $\{A^1, \dots, A^{N_2}\}$ длины r, то $\operatorname{rank}\bigl(\{A^1, \dots, A^{N_2}\}\bigr) = r$. Так как $A^{j_1}, \dots, A^{j_r}$ — базис множества $\{A^1, \dots, A^{N_2}\}$ длины r, то $A^{j_1}, \dots, A^{j_r}$ — базис подпространства $L(A^1, \dots, A^{N_2})$ длины r. Тогда $\dim\bigl(L(A^1, \dots, A^{N_2})\bigr) = r$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Обозначим, $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\bigl(\{A_1, \dots, A_{N_1}\}\bigr)$. Будем говорить, что $\operatorname{rank}(A)$ — ранг матрицы A.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* N_1*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*;* $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

1. *Справедливо утверждение:* $\operatorname{rank}(A) = \dim\bigl(L(A_1, \dots, A_{N_1})\bigr)$.
2. *Справедливо утверждение:* $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\bigl(\{A^1, \dots, A^{N_2}\}\bigr)$.
3. *Справедливо утверждение:* $\operatorname{rank}(A) = \dim\bigl(L(A^1, \dots, A^{N_2})\bigr)$.
4. *Пусть:* $r \in \mathbb{N}$*,* $i_1, \dots, i_r = \overline{1, N_1}$*,* $i_1 < \dots < i_r$*,* $j_1, \dots, j_r = \overline{1, N_2}$*,* $j_1 < \dots < j_r$*,* $\Delta^{j_1,\dots,j_r}_{i_1,\dots,i_r}(A) \neq 0$*. Пусть все миноры матрицы* A *порядка* $r + 1$*, окаймляющие минор* $\Delta^{j_1,\dots,j_r}_{i_1,\dots,i_r}(A)$*, равны нулю (если они существуют). Тогда* $\operatorname{rank}(A) = r$.

Доказательство.

1. Очевидно: $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\bigl(\{A_1, \dots, A_{N_1}\}\bigr) = \dim\bigl(L(A_1, \dots, A_{N_1})\bigr)$.

2. Пусть $A = \Theta$ (здесь Θ — нулевой элемент пространства $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$). Тогда: $A_1, \dots, A_{N_1} = \tilde{\theta}_2$ (здесь $\tilde{\theta}_2$ — нулевой элемент пространства $\mathbb{K}^{N_2 \times 1}$); $A^1, \dots, A^{N_2} = \tilde{\theta}_1$ (здесь $\tilde{\theta}_1$ — нулевой элемент пространства $\mathbb{K}^{1 \times N_1}$). Следовательно:

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\bigl(\{A_1, \dots, A_{N_1}\}\bigr) = \operatorname{rank}\bigl(\{\tilde{\theta}_2\}\bigr) = 0 = \operatorname{rank}\bigl(\{\tilde{\theta}_1\}\bigr) = \operatorname{rank}\bigl(\{A^1, \dots, A^{N_2}\}\bigr).$$

Пусть $A \neq \Theta$. Тогда существует число $r \in \mathbb{N}$, существуют числа $i_1, \dots, i_r = \overline{1, N_1}$, существуют числа $j_1, \dots, j_r = \overline{1, N_2}$, удовлетворяющие условиям: $i_1 < \dots < i_r$, $j_1 < \dots < j_r$, $\overline{\Delta}^{j_1,\dots,j_r}_{i_1,\dots,i_r}(A) \neq 0$, все миноры матрицы A порядка $r + 1$, окаймляющие минор $\overline{\Delta}^{j_1,\dots,j_r}_{i_1,\dots,i_r}(A)$, равны нулю (если они существуют). Следовательно: $\operatorname{rank}\bigl(\{A_1, \dots, A_{N_1}\}\bigr) = r$, $\operatorname{rank}\bigl(\{A^1, \dots, A^{N_2}\}\bigr) = r$. Тогда: $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\bigl(\{A_1, \dots, A_{N_1}\}\bigr) = r = \operatorname{rank}\bigl(\{A^1, \dots, A^{N_2}\}\bigr)$.

3. Очевидно: $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\bigl(\{A^1, \dots, A^{N_2}\}\bigr) = \dim\bigl(L(A^1, \dots, A^{N_2})\bigr)$.

4. Очевидно, $\operatorname{rank}\bigl(\{A_1, \dots, A_{N_1}\}\bigr) = r$. Тогда: $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\bigl(\{A_1, \dots, A_{N_1}\}\bigr) = r$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* N_1*,* $N_2 \in \mathbb{N}$.

1. *Пусть:* $A_1, \dots, A_{N_1} \in \mathbb{K}^{N_2}$*,* $\sigma \in S_{N_1}$*. Тогда:*

$$\operatorname{rank}(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(N_1)}) = \operatorname{rank}(A_1, \dots, A_{N_1}).$$

2. Пусть: $N_1 \geqslant 2$*,* $k = \overline{1, N_1}$*,* $A_1, \dots, A_{N_1} \in \mathbb{K}^{N_2}$*,* $X \in L(A_1, \dots, A_{k-1}, A_{k+1}, \dots, A_{N_1})$*. Тогда:*

$$\operatorname{rank}(A_1, \dots, A_{k-1}, A_k + X, A_{k+1}, \dots, A_{N_1}) = \operatorname{rank}(A_1, \dots, A_{N_1}).$$

3. Пусть: $N_1 \geqslant 2$*,* $k = \overline{1, N_1}$*,* $A_1, \dots, A_{k-1}$*,* $A_{k+1}, \dots, A_{N_1} \in \mathbb{K}^{N_2}$*. Тогда:*

$$\operatorname{rank}(A_1, \dots, A_{k-1}, A_{k+1}, \dots, A_{N_1}) = \operatorname{rank}(A_1, \dots, A_{k-1}, \tilde{\theta}_2, A_{k+1}, \dots, A_{N_1}).$$

4. Пусть: $N_1 \geqslant 2$*,* $k = \overline{1, N_1}$*,* $A_1, \dots, A_{N_1} \in \mathbb{K}^{N_2}$*,* $A_k \in L(A_1, \dots, A_{k-1}, A_{k+1}, \dots, A_{N_1})$*. Тогда:*

$$\operatorname{rank}(A_1, \dots, A_{k-1}, A_{k+1}, \dots, A_{N_1}) = \operatorname{rank}(A_1, \dots, A_{N_1}).$$

5. Пусть: $k = \overline{1, N_1}$*,* $\lambda \in \mathbb{K}$*,* $\lambda \neq 0$*,* $A_1, \dots, A_{N_1} \in \mathbb{K}^{N_2}$*. Тогда:*

$$\operatorname{rank}(A_1, \dots, A_{k-1}, \lambda A_k, A_{k+1}, \dots, A_{N_1}) = \operatorname{rank}(A_1, \dots, A_{N_1}).$$

Доказательство.

1. Очевидно:

$$\operatorname{rank}(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(N_1)}) = \operatorname{rank}\big(\{A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(N_1)}\}\big) = \operatorname{rank}\big(\{A_1, \dots, A_{N_1}\}\big) = \\ = \operatorname{rank}(A_1, \dots, A_{N_1}).$$

2. Достаточно доказать, что:

$$L(A_1, \dots, A_{k-1}, A_k + X, A_{k+1}, \dots, A_{N_1}) = L(A_1, \dots, A_{N_1}).$$

Так как $X \in L(A_1, \dots, A_{k-1}, A_{k+1}, \dots, A_{N_1})$, то существуют числа $\alpha^1, \dots, \alpha^{k-1}$, $\alpha^{k+1}, \dots, \alpha^{N_1} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $X = \sum\limits_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m$.

Пусть $Y \in L(A_1, \dots, A_{k-1}, A_k + X, A_{k+1}, \dots, A_{N_1})$. Тогда существуют числа $\beta^1, \dots, \beta^{N_1} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $Y = \sum\limits_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \beta^m A_m + \beta^k (A_k + X)$. Следовательно:

$$Y = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \beta^m A_m + \beta^k (A_k + X) = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \beta^m A_m + \beta^k \left(A_k + \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m\right) = \\ = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} (\beta^m + \beta^k \alpha^m) A_m + \beta^k A_k \in L(A_1, \dots, A_{N_1}).$$

Пусть $Y \in L(A_1, \dots, A_{N_1})$. Тогда существуют числа $\beta^1, \dots, \beta^{N_1} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $Y = \sum\limits_{m=\overline{1,N_1}} \beta^m A_m$. Следовательно:

$$Y = \sum_{m=\overline{1,N_1}} \beta^m A_m = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \beta^m A_m + \beta^k A_k = \\ = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} (\beta^m - \beta^k \alpha^m) A_m + \beta^k \left(A_k + \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m\right) = \\ = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} (\beta^m - \beta^k \alpha^m) A_m + \beta^k (A_k + X) \in L(A_1, \dots, A_{k-1}, A_k + X, A_{k+1}, \dots, A_{N_1}).$$

3. Достаточно доказать, что:

$$L(A_1,\dots,A_{k-1},A_{k+1},\dots,A_{N_1}) = L(A_1,\dots,A_{k-1},\tilde{\theta}_2,A_{k+1},\dots,A_{N_1}).$$

Пусть $X \in L(A_1,\dots,A_{k-1},A_{k+1},\dots,A_{N_1})$. Тогда существуют числа $\alpha^1,\dots,\alpha^{k-1}$, $\alpha^{k+1},\dots,\alpha^{N_1}\in\mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $X = \sum\limits_{m=\overline{1,N_1},\,m\neq k}\alpha^m A_m$. Следовательно:

$$X = \sum_{m=\overline{1,N_1},\,m\neq k}\alpha^m A_m = \sum_{m=\overline{1,N_1},\,m\neq k}\alpha^m A_m + 1\tilde{\theta}_2 \in L(A_1,\dots,A_{k-1},\tilde{\theta}_2,A_{k+1},\dots,A_{N_1}).$$

Пусть $X \in L(A_1,\dots,A_{k-1},\tilde{\theta}_2,A_{k+1},\dots,A_{N_1})$. Тогда существуют числа $\alpha^1,\dots,\alpha^{N_1}\in\mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $X = \sum\limits_{m=\overline{1,N_1},\,m\neq k}\alpha^m A_m + \alpha^k\tilde{\theta}_2$. Следовательно:

$$X = \sum_{m=\overline{1,N_1},\,m\neq k}\alpha^m A_m + \alpha^k\tilde{\theta}_2 = \sum_{m=\overline{1,N_1},\,m\neq k}\alpha^m A_m \in L(A_1,\dots,A_{k-1},A_{k+1},\dots,A_{N_1}).$$

4. Так как $A_k \in L(A_1,\dots,A_{k-1},A_{k+1},\dots,A_{N_1})$, то:

$$-A_k \in L(A_1,\dots,A_{k-1},A_{k+1},\dots,A_{N_1}).$$

Тогда:

$$\begin{gathered}\operatorname{rank}(A_1,\dots,A_{N_1}) = \operatorname{rank}\big(A_1,\dots,A_{k-1},A_k+(-A_k),A_{k+1},\dots,A_{N_1}\big) = \\ = \operatorname{rank}(A_1,\dots,A_{k-1},\tilde{\theta}_2,A_{k+1},\dots,A_{N_1}) = \operatorname{rank}(A_1,\dots,A_{k-1},A_{k+1},\dots,A_{N_1}).\end{gathered}$$

5. Достаточно доказать, что:

$$L(A_1,\dots,A_{k-1},\lambda A_k,A_{k+1},\dots,A_{N_1}) = L(A_1,\dots,A_{N_1}).$$

Пусть $X \in L(A_1,\dots,A_{k-1},\lambda A_k,A_{k+1},\dots,A_{N_1})$. Тогда существуют числа $\alpha^1,\dots,\alpha^{N_1}\in\mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $X = \sum\limits_{m=\overline{1,N_1},\,m\neq k}\alpha^m A_m + \alpha^k(\lambda A_k)$. Следовательно:

$$X = \sum_{m=\overline{1,N_1},\,m\neq k}\alpha^m A_m + \alpha^k(\lambda A_k) = \sum_{m=\overline{1,N_1},\,m\neq k}\alpha^m A_m + (\alpha^k\lambda)A_k \in L(A_1,\dots,A_{N_1}).$$

Пусть $X \in L(A_1,\dots,A_{N_1})$. Тогда существуют числа $\alpha^1,\dots,\alpha^{N_1}\in\mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $X = \sum\limits_{m=\overline{1,N_1}}\alpha^m A_m$. Так как $\lambda \neq 0$, то:

$$\begin{gathered}X = \sum_{m=\overline{1,N_1}}\alpha^m A_m = \sum_{m=\overline{1,N_1},\,m\neq k}\alpha^m A_m + \alpha^k A_k = \sum_{m=\overline{1,N_1},\,m\neq k}\alpha^m A_m + \frac{\alpha^k}{\lambda}(\lambda A_k) \in \\ \in L(A_1,\dots,A_{k-1},\lambda A_k,A_{k+1},\dots,A_{N_1}). \quad \square\end{gathered}$$

Лекция 11. Линейные операторы. Изоморфизмы линейных пространств

Замечание. Пусть F_1, F_2 — функции. Очевидно:

$$\mathrm{D}(F_2 \circ F_1) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)\big\} \subseteq \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1)\big\} = \mathrm{D}(F_1);$$
$$\mathrm{D}(F_2 \circ F_1) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)\big\} = \mathrm{D}\big(F_1, \mathrm{D}(F_2)\big);$$
$$\mathrm{R}(F_2 \circ F_1) = (F_2 \circ F_1)\big[\mathrm{D}(F_1)\big] = F_2\Big[F_1\big[\mathrm{D}(F_1)\big]\Big] \subseteq \mathrm{R}(F_2);$$
$$\mathrm{R}(F_2 \circ F_1) = (F_2 \circ F_1)\big[\mathrm{D}(F_1)\big] = F_2\Big[F_1\big[\mathrm{D}(F_1)\big]\Big] = F_2\big[\mathrm{R}(F_1)\big].$$

Пусть: F_1, F_2 — функции, $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$. Тогда:

$$\mathrm{D}(F_2 \circ F_1) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)\big\} = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1)\big\} = \mathrm{D}(F_1).$$

Пусть: F_1, F_2 — функции, $\mathrm{D}(F_2) \subseteq \mathrm{R}(F_1)$. Тогда:

$$\mathrm{R}(F_2 \circ F_1) = F_2\big[\mathrm{R}(F_1)\big] = \mathrm{R}(F_2).$$

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть $A\colon L_1 \to L_2$. Будем говорить, что A — линейный оператор, если: $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1, $A(x+y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$; $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$.

2. Обозначим через $\mathrm{lin}(L_1, L_2)$ множество всех функций A, удовлетворяющих условиям: $A\colon L_1 \to L_2$, A — линейный оператор.

3. Обозначим через $\mathrm{Lin}(L_1, L_2)$ множество всех функций A, удовлетворяющих условиям: $A\colon L_1 \implies L_2$, A — линейный оператор.

4. Будем говорить, что A — изоморфизм пространства L_1 на пространство L_2, если: A — обратимая функция, $\mathrm{D}(A) = L_1$, $\mathrm{R}(A) = L_2$, $A(x+y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in L_1$; $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$.

5. Будем писать $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$, если A — изоморфизм пространства L_1 на пространство L_2. Утверждение $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$ можно читать: «пространство L_1 изоморфно пространству L_2 относительно функции A».

6. Будем писать $L_1 \approx L_2$ если $\exists A(L_1 \overset{A}{\approx} L_2)$. Утверждение $L_1 \approx L_2$ читается: «пространство L_1 изоморфно пространству L_2».

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A\colon L_1 \implies L_2$.

Пусть A — линейный оператор. Тогда: $A(x+y) = A(x)+A(y)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$; $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$. Так как $\mathrm{D}(A) = L_1$, то: $A(x+y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in L_1$; $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$.

Пусть: $A(x+y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in L_1$; $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Так как $\mathrm{D}(A) = L_1$, то: $A(x+y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$; $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$. Так как $\mathrm{D}(A) = L_1$, то $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1. Итак, A — линейный оператор.

Замечание (примеры линейных операторов). Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$.

1. Пусть L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$. Обозначим: $\Theta(x) = \theta_2$ при $x \in L_1$. Докажем, что $\Theta \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Очевидно, $\Theta\colon L_1 \implies L_2$.

Пусть $x,\, y \in L_1$. Тогда: $\Theta(x+y) = \theta_2 = \theta_2 + \theta_2 = \Theta(x) + \Theta(y)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда: $\Theta(\lambda x) = \theta_2 = \lambda\theta_2 = \lambda\Theta(x)$.

Итак, $\Theta \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$.

2. Пусть L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Обозначим: $I(x) = x$ при $x \in L$. Докажем, что $L \overset{I}{\approx} L$. Очевидно: I — обратимая функция, $\mathrm{D}(I) = L$, $\mathrm{R}(I) = L$.

Пусть $x,\, y \in L$. Тогда: $I(x+y) = x + y = I(x) + I(y)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L$. Тогда: $I(\lambda x) = \lambda x = \lambda I(x)$.

Итак, $L \overset{I}{\approx} L$.

3. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L. Обозначим: $h_e(x) = [x](e)$ при $x \in L$. Докажем, что $L \overset{h_e}{\approx} \mathbb{K}^N$. Очевидно: h_e — обратимая функция, $\mathrm{D}(h_e) = L$, $\mathrm{R}(h_e) = \mathbb{K}^N$.

Пусть $x,\, y \in L$. Тогда: $h_e(x+y) = [x+y](e) = [x](e) + [y](e) = h_e(x) + h_e(y)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L$. Тогда: $h_e(\lambda x) = [\lambda x](e) = \lambda[x](e) = \lambda h_e(x)$.

Итак, $L \overset{h_e}{\approx} \mathbb{K}^N$.

4. Пусть: $N_1,\, N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Обозначим: $\hat{A}(x) = Ax$ при $x \in \mathbb{K}^{N_1}$. Будем говорить, что $\hat{A}$ — оператор умножения на матрицу A. Докажем, что $\hat{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{N_1}, \mathbb{K}^{N_2})$. Очевидно, $\hat{A}\colon \mathbb{K}^{N_1} \implies \mathbb{K}^{N_2}$.

Пусть $x,\, y \in \mathbb{K}^{N_1}$. Тогда: $\hat{A}(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = \hat{A}(x) + \hat{A}(y)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}^{N_1}$. Тогда: $\hat{A}(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda\hat{A}(x)$.

Итак, $\hat{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{N_1}, \mathbb{K}^{N_2})$.

Очевидно:

$$\mathrm{R}(\hat{A}) = \big\{\hat{A}(x)\colon x \in \mathbb{K}^{N_1}\big\} = \{Ax\colon x \in \mathbb{K}^{N_1}\} =$$
$$= \{A_1x^1 + \dots + A_{N_1}x^{N_1}\colon x^1 \in \mathbb{K} \wedge \dots \wedge x^{N_1} \in \mathbb{K}\} = L(A_1, \dots, A_{N_1}).$$

Тогда: $\mathrm{R}(\hat{A})$ — подпространство пространства $\mathbb{K}^{N_2}$,

$$\dim\big(\mathrm{R}(\hat{A})\big) = \dim\big(L(A_1, \dots, A_{N_1})\big) = \mathrm{rank}(A).$$

5. Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$; $k = \overline{1, N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1},\, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K}$. Обозначим:

$$A(x) = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{k-1} \\ x^k + \sum\limits_{m=\overline{1,N},\, m\neq k} \lambda_m x^m \\ x^{k+1} \\ \vdots \\ x^N \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{K}^N.$$

Очевидно, $\mathbb{K}^N \overset{A}{\approx} \mathbb{K}^N$.

6. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; $k = \overline{1, N}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$. Обозначим:

$$A(x) = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{k-1} \\ \lambda x^k \\ x^{k+1} \\ \vdots \\ x^N \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{K}^N.$$

Очевидно, $\mathbb{K}^N \overset{A}{\approx} \mathbb{K}^N$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*;* $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$.

1. Справедливы утверждения: $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$*,* $A\theta_1 = \theta_2$.

2. Пусть Q *— подпространство пространства* L_2*. Тогда* $\mathrm{D}(A, Q)$ *— подпространство пространства* L_1*.*

Справедливо утверждение: $\ker(A)$ *— подпространство пространства* L_1*.*

3. Пусть Q *— подпространство пространства* L_1*. Тогда* $A[Q]$ *— подпространство пространства* L_2*.*

Справедливо утверждение: $\mathrm{R}(A)$ *— подпространство пространства* L_2*.*

4. Пусть Q *— подпространство пространства* L_1*. Тогда:* $A|_Q \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$*,* $\ker(A|_Q) = Q \cap \ker(A)$*.*

5. Пусть: $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r \in \mathrm{D}(A)$*. Пусть* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно зависимые векторы. Тогда* $Ax_1, \ldots, Ax_r$ *— линейно зависимые векторы.*

6. Пусть $Q \subseteq L_1$*. Тогда* $\operatorname{rank}\big(A[Q]\big) \leqslant \operatorname{rank}(Q)$*.*

Пусть Q *— подпространство пространства* L_1*. Тогда* $\dim\big(A[Q]\big) \leqslant \dim(Q)$*.*

Справедливо утверждение: $\dim\big(\mathrm{R}(A)\big) \leqslant \dim\big(\mathrm{D}(A)\big)$*.*

Доказательство.

1. Так как $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1, то $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$. Очевидно: $A\theta_1 = A(0\theta_1) = 0A(\theta_1) = \theta_2$.

2. Пусть Q — подпространство пространства L_2. Очевидно: $\mathrm{D}(A, Q) \subseteq \mathrm{D}(A) \subseteq L_1$. Так как: $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$, $A\theta_1 = \theta_2 \in Q$, то $\theta_1 \in \mathrm{D}(A, Q)$.

Пусть x_1, $x_2 \in \mathrm{D}(A, Q)$. Тогда: x_1, $x_2 \in \mathrm{D}(A)$, Ax_1, $Ax_2 \in Q$. Следовательно: $x_1 + x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 \in Q$. Тогда $x_1 + x_2 \in \mathrm{D}(A, Q)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A, Q)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(A)$, $Ax \in Q$. Следовательно: $\lambda x \in \mathrm{D}(A)$, $A(\lambda x) = \lambda A(x) \in Q$. Тогда $\lambda x \in \mathrm{D}(A, Q)$.

Итак, $\mathrm{D}(A, Q)$ — подпространство пространства L_1.

Так как: $\{\theta_2\}$ — подпространство пространства L_2, $\ker(A) = \mathrm{D}\big(A, \{\theta_2\}\big)$, то $\ker(A)$ — подпространство пространства L_1.

3. Пусть Q — подпространство пространства L_1. Очевидно: $A[Q] \subseteq \mathrm{R}(A) \subseteq L_2$. Так как: $\theta_1 \in Q$, $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$, то $A\theta_1 \in A[Q]$.

Пусть y_1, $y_2 \in A[Q]$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: x_1, $x_2 \in Q$, x_1, $x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2$. Следовательно: $x_1 + x_2 \in Q$, $x_1 + x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $y_1 + y_2 = Ax_1 + Ax_2 = A(x_1 + x_2)$. Тогда $y_1 + y_2 \in A[Q]$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $y \in A[Q]$. Тогда существует вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in Q$, $x \in \mathrm{D}(A)$, $y = Ax$. Следовательно: $\lambda x \in Q$, $\lambda x \in \mathrm{D}(A)$, $\lambda y = \lambda A(x) = A(\lambda x)$. Тогда $\lambda y \in A[Q]$.

Итак, $A[Q]$ — подпространство пространства L_2.

Так как: $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1, $\mathrm{R}(A) = A\big[\mathrm{D}(A)\big]$, то $\mathrm{R}(A)$ — подпространство пространства L_2.

4. Так как $A\colon L_1 \to L_2$, то $A|_Q : L_1 \to L_2$. Так как: Q, $\mathrm{D}(A)$ — подпространства пространства L_1, $\mathrm{D}(A|_Q) = Q \cap \mathrm{D}(A)$, то $\mathrm{D}(A|_Q)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть $x, y \in \mathrm{D}(A|_Q)$. Тогда: $A|_Q (x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = A|_Q x + A|_Q y$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A|_Q)$. Тогда: $A|_Q (\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda A(x) = \lambda\, A|_Q (x)$.

Итак, $A|_Q \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$.

Очевидно:

$$\ker(A|_Q) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A|_Q) \wedge A|_Q x = \theta_2\big\} = \big\{x\colon x \in Q \wedge x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax = \theta_2\big\} = \\ = \big\{x\colon x \in Q \wedge x \in \ker(A)\big\} = Q \cap \ker(A).$$

5. Так как $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы, то существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^k x_k = \theta_1$, $\exists k = \overline{1,r}(\lambda^k \neq 0)$. Тогда: $\lambda^k A(x_k) = A(\lambda^k x_k) = A\theta_1 = \theta_2$. Так как $\exists k = \overline{1,r}(\lambda^k \neq 0)$, то $Ax_1, \ldots, Ax_r$ — линейно зависимые векторы.

6. Пусть $Q \subseteq L_1$. Обозначим: $r_1 = \mathrm{rank}(Q)$, $r_2 = \mathrm{rank}\big(A[Q]\big)$. Тогда $r_1, r_2 \in \overline{\mathbb{Z}}_+$. Предположим, что $r_1 < r_2$. Тогда: $r_1 \in \mathbb{Z}_+$, $r_2 \in \overline{\mathbb{N}}$. Так как: $\mathrm{rank}\big(A[Q]\big) = r_2$, $r_1 + 1 \leqslant r_2$, то существуют векторы $y_1, \ldots, y_{r_1+1}$, удовлетворяющие условиям: $y_1, \ldots, y_{r_1+1} \in A[Q]$, $y_1, \ldots, y_{r_1+1}$ — линейно независимые векторы. Пусть $k = \overline{1, r_1+1}$. Так как $y_k \in A[Q]$, то существует вектор x_k, удовлетворяющий условиям: $x_k \in Q$, $x_k \in \mathrm{D}(A)$, $y_k = Ax_k$. Так как: $\mathrm{rank}(Q) = r_1$, $x_1, \ldots, x_{r_1+1} \in Q$, то $x_1, \ldots, x_{r_1+1}$ — линейно зависимые векторы. Так как: $x_1, \ldots, x_{r_1+1} \in \mathrm{D}(A)$, $y_1 = Ax_1, \ldots, y_{r_1+1} = Ax_{r_1+1}$, то $y_1, \ldots, y_{r_1+1}$ — линейно зависимые векторы (что противоречит утверждению: $y_1, \ldots, y_{r_1+1}$ — линейно независимые векторы). Итак, $r_2 \leqslant r_1$.

Пусть Q — подпространство пространства L_1. Тогда $A[Q]$ — подпространство пространства L_2. Так как $Q \subseteq L_1$, то $\mathrm{rank}\big(A[Q]\big) \leqslant \mathrm{rank}(Q)$. Так как: Q — подпространство пространства L_1, $A[Q]$ — подпространство пространства L_2, то $\dim\big(A[Q]\big) \leqslant \dim(Q)$.

Так как: $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1, $\mathrm{R}(A) = A\big[\mathrm{D}(A)\big]$, то $\dim\big(\mathrm{R}(A)\big) \leqslant \dim\big(\mathrm{D}(A)\big)$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$. Обозначим, $\mathrm{rank}(A) = \dim\big(\mathrm{R}(A)\big)$. Тогда:

$$\mathrm{rank}(A) = \dim\big(\mathrm{R}(A)\big) \leqslant \dim(L_2);$$
$$\mathrm{rank}(A) = \dim\big(\mathrm{R}(A)\big) \leqslant \dim\big(\mathrm{D}(A)\big) \leqslant \dim(L_1).$$

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2, L_3 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$. Обозначим, $BA = B \circ A$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1, L_2, L_3 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$.

Пусть: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$. *Тогда* $BA \in \mathrm{lin}(L_1, L_3)$.

Пусть: $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$. *Тогда* $BA \in \mathrm{Lin}(L_1, L_3)$.

Пусть: $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$, $L_2 \overset{B}{\approx} L_3$. *Тогда* $L_1 \overset{BA}{\approx} L_3$.

Доказательство. Пусть: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$. Так как: $A\colon L_1 \to L_2$, $B\colon L_2 \to L_3$, то $BA\colon L_1 \to L_3$. Так как: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $\mathrm{D}(B)$ — подпространство пространства L_2, $\mathrm{D}(BA) = \mathrm{D}\big(A, \mathrm{D}(B)\big)$, то $\mathrm{D}(BA)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть x_1, $x_2 \in \mathrm{D}(BA)$. Тогда:

$$(BA)(x_1 + x_2) = B\big(A(x_1 + x_2)\big) = B(Ax_1 + Ax_2) = B(Ax_1) + B(Ax_2) = (BA)x_1 + (BA)x_2.$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$. Тогда:

$$(BA)(\lambda x) = B\big(A(\lambda x)\big) = B\big(\lambda A(x)\big) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x).$$

Итак, $BA \in \mathrm{lin}(L_1, L_3)$.

Пусть: $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$. Так как: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$, то $BA \in \mathrm{lin}(L_1, L_3)$. Так как: $\mathrm{R}(A) \subseteq L_2 = \mathrm{D}(B)$, то: $\mathrm{D}(BA) = \mathrm{D}(A) = L_1$. Тогда $BA \in \mathrm{Lin}(L_1, L_3)$.

Пусть: $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$, $L_2 \overset{B}{\approx} L_3$. Так как: $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$, то $BA \in \mathrm{Lin}(L_1, L_3)$. Так как: $\mathrm{D}(B) = L_2 \subseteq L_2 = \mathrm{R}(A)$, то: $\mathrm{R}(BA) = \mathrm{R}(B) = L_3$. Так как A, B — обратимые функции, то BA — обратимая функция. Тогда $L_1 \overset{BA}{\approx} L_3$. □

Утверждение (критерий обратимости линейного оператора)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1, L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*;* $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$. *Оператор* A *является обратимым тогда и только тогда, когда* $\ker(A) = \{\theta_1\}$.

Доказательство.

1. Пусть A — обратимый оператор. Так как: $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$, $A\theta_1 = \theta_2$, то $\theta_1 \in \ker(A)$. Пусть $x \in \ker(A)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(A)$, $Ax = \theta_2$. Так как: $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$, $A\theta_1 = \theta_2$, A — обратимый оператор, то $x = \theta_1$. Итак, $\ker(A) = \{\theta_1\}$.

2. Пусть $\ker(A) = \{\theta_1\}$. Пусть: x_1, $x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $Ax_1 = Ax_2$. Тогда: $x_1 - x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = \theta_2$. Следовательно, $x_1 - x_2 \in \ker(A)$. Так как $\ker(A) = \{\theta_1\}$, то $x_1 - x_2 = \theta_1$. Тогда $x_1 = x_2$. Итак, A — обратимый оператор. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1, L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$.

1. Пусть: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, A *— обратимый оператор. Тогда:* $A^{-1} \in \mathrm{lin}(L_2, L_1)$, A^{-1} *— обратимый оператор.*

Пусть $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$. *Тогда* $L_2 \overset{A^{-1}}{\approx} L_1$.

2. Пусть: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, A *— обратимый оператор,* $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in \mathrm{D}(A)$. *Векторы* $x_1, \ldots, x_r$ *являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда векторы* $Ax_1, \ldots, Ax_r$ *являются линейно зависимыми.*

3. Пусть: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, A *— обратимый оператор,* $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$. *Тогда* $\mathrm{rank}\big(A[Q]\big) = \mathrm{rank}(Q)$.

Пусть: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, A *— обратимый оператор,* $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, Q *— подпространство пространства* L_1. *Тогда* $\dim\big(A[Q]\big) = \dim(Q)$.

Пусть: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, A *— обратимый оператор. Тогда* $\dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim\big(\mathrm{D}(A)\big)$.

Пусть $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$. *Тогда* $\dim(L_1) = \dim(L_2)$.

Доказательство.

1. Пусть: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор. Так как $A\colon L_1 \to L_2$, то $A^{-1}\colon L_2 \to L_1$. Так как: $\mathrm{R}(A)$ — подпространство пространства L_2, $\mathrm{D}(A^{-1}) = \mathrm{R}(A)$, то $\mathrm{D}(A^{-1})$ — подпространство пространства L_2.

Пусть y_1, $y_2 \in \mathrm{R}(A)$. Тогда:

$$A^{-1}(y_1 + y_2) = A^{-1}\big(A(A^{-1}y_1) + A(A^{-1}y_2)\big) = A^{-1}\big(A(A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2)\big) = A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2.$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $y \in \mathrm{R}(A)$. Тогда:

$$A^{-1}(\lambda y) = A^{-1}\big(\lambda A(A^{-1}y)\big) = A^{-1}\Big(A\big(\lambda A^{-1}(y)\big)\Big) = \lambda A^{-1}(y).$$

Итак, $A^{-1} \in \mathrm{lin}(L_2, L_1)$. Очевидно, A^{-1} — обратимый оператор.

Пусть $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$. Так как: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор, то: $A^{-1} \in \mathrm{lin}(L_2, L_1)$, A^{-1} — обратимый оператор. Так как: $\mathrm{R}(A) = L_2$, $\mathrm{D}(A) = L_1$, то: $\mathrm{D}(A^{-1}) = \mathrm{R}(A) = L_2$, $\mathrm{R}(A^{-1}) = \mathrm{D}(A) = L_1$. Тогда $L_2 \overset{A^{-1}}{\approx} L_1$.

2. Пусть $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы. Так как: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $x_1, \ldots, x_r \in \mathrm{D}(A)$, то $Ax_1, \ldots, Ax_r$ — линейно зависимые векторы.

Пусть $Ax_1, \ldots, Ax_r$ — линейно зависимые векторы. Пусть $k = \overline{1, r}$. Так как $x_k \in \mathrm{D}(A)$, то: $Ax_k \in \mathrm{R}(A)$, $x_k = A^{-1}(Ax_k)$. Так как: $A^{-1} \in \mathrm{lin}(L_2, L_1)$, $Ax_1, \ldots, Ax_r$ — линейно зависимые векторы, то $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы.

3. Пусть: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор, $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$. Так как: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $Q \subseteq \mathrm{D}(A) \subseteq L_1$, то $\mathrm{rank}\big(A[Q]\big) \leqslant \mathrm{rank}(Q)$. Так как $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, то: $A[Q] \subseteq \mathrm{R}(A) \subseteq L_2$, $A^{-1}\big[A[Q]\big] = (A^{-1}A)[Q] = Q \cap \mathrm{D}(A) = Q$. Так как $A^{-1} \in \mathrm{lin}(L_2, L_1)$, то $\mathrm{rank}(Q) \leqslant \mathrm{rank}\big(A[Q]\big)$. Так как $\mathrm{rank}\big(A[Q]\big) \leqslant \mathrm{rank}(Q)$, то $\mathrm{rank}\big(A[Q]\big) = \mathrm{rank}(Q)$.

Пусть: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор, $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, Q — подпространство пространства L_1. Так как: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, Q — подпространство пространства L_1, то $A[Q]$ — подпространство пространства L_2. Так как: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор, $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, то $\mathrm{rank}\big(A[Q]\big) = \mathrm{rank}(Q)$. Так как: Q — подпространство пространства L_1, $A[Q]$ — подпространство пространства L_2, то $\dim\big(A[Q]\big) = \dim(Q)$.

Пусть: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор. Так как: $\mathrm{D}(A) \subseteq \mathrm{D}(A)$, $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1, $\mathrm{R}(A) = A\big[\mathrm{D}(A)\big]$, то $\dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim\big(\mathrm{D}(A)\big)$.

Пусть $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$. Так как: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор, то $\dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim\big(\mathrm{D}(A)\big)$. Так как: $\mathrm{D}(A) = L_1$, $\mathrm{R}(A) = L_2$, то: $\dim(L_1) = \dim\big(\mathrm{D}(A)\big) = \dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim(L_2)$. □

Теорема. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$; $\dim(L_1) = \dim(L_2)$, $\dim(L_2) \neq +\infty$. *Тогда* $L_1 \approx L_2$.

Доказательство. Обозначим, $N = \dim(L_2)$. Тогда: $N \in \mathbb{Z}_+$, $\dim(L_1) = N$.

Пусть $N = 0$. Так как $\dim(L_1)$, $\dim(L_2) = N$, то: $L_1 = \{\theta_1\}$, $L_2 = \{\theta_2\}$. Обозначим, $A(\theta_1) = \theta_2$. Тогда $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$.

Пусть $N \neq 0$. Тогда $N \in \mathbb{N}$. Так как $\dim(L_1)$, $\dim(L_2) = N$, то существуют векторы $e_1, \ldots, e_N$, $f_1, \ldots, f_N$, удовлетворяющие условиям: $e_1, \ldots, e_N$ — базис пространства L_1, $f_1, \ldots, f_N$ — базис пространства L_2. Тогда: $L_1 \overset{h_e}{\approx} \mathbb{K}^N$, $L_2 \overset{h_f}{\approx} \mathbb{K}^N$. Следовательно: $L_1 \overset{h_e}{\approx} \mathbb{K}^N$, $\mathbb{K}^N \overset{h_f^{-1}}{\approx} L_2$. Тогда $L_1 \overset{h_f^{-1}h_e}{\approx} L_2$. □

Замечание (метод Гаусса—Жордана для нахождения ранга, базисных столбцов, базисных строк матрицы). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Пусть $A = \Theta$. Тогда: $\mathrm{rank}(A) = 0$, у матрицы A нет базисных столбцов, у матрицы A нет базисных строк. Пусть $A \neq \Theta$. Обозначим, $B_0 = A$. Тогда: $B_0 \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $B_0 \neq \Theta$.

Выберем числа $i_1 = \overline{1, N_1}$, $j_1 = \overline{1, N_2}$, удовлетворяющие условию $(B_0)_{i_1}^{j_1} \neq 0$. Обнулим элементы, стоящие над элементом $(B_0)_{i_1}^{j_1}$, обнулим элементы, стоящие под элементом $(B_0)_{i_1}^{j_1}$. Получим матрицу $B_1 \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, удовлетворяющую условиям: $(B_1)_{i_1}^{j_1} \neq 0$, $(B_1)_{i_1}^{j} = 0$

при: $j = \overline{1, N_2}$, $j \neq j_1$. Пусть матрица B_1 содержит ровно одну ненулевую строку. Остановим процесс. Пусть матрица B_1 содержит, по крайней мере, две ненулевые строки. Перейдём к следующему шагу.

Выберем числа $i_2 = \overline{1, N_1}$, $j_2 = \overline{1, N_2}$, удовлетворяющие условиям: $j_2 \neq j_1$, $(B_1)_{i_2}^{j_2} \neq 0$. Очевидно, $i_2 \neq i_1$. Тогда: $i_1, i_2 = \overline{1, N_1}$, i_1, i_2 — различные числа, $j_1, j_2 = \overline{1, N_2}$, j_1, j_2 — различные числа. Обнулим элементы, стоящие над элементом $(B_1)_{i_2}^{j_2}$, обнулим элементы, стоящие под элементом $(B_1)_{i_2}^{j_2}$. Получим матрицу $B_2 \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, удовлетворяющую условиям: $(B_2)_{i_k}^{j_k} \neq 0$, $(B_2)_{i_k}^{j} = 0$ при: $k = 1, 2$, $j = \overline{1, N_2}$, $j \neq j_k$. Пусть матрица B_2 содержит ровно две ненулевые строки. Остановим процесс. Пусть матрица B_2 содержит, по крайней мере, три ненулевые строки. Перейдём к следующему шагу.

Продолжая рассуждения, получим число $r = \overline{1, \min\{N_1, N_2\}}$, получим числа $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$, $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N_2}$, получим матрицу $B_r \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, удовлетворяющую условиям: $i_1, \ldots, i_r$ — различные числа, $j_1, \ldots, j_r$ — различные числа, $(B_r)_{i_k}^{j_k} \neq 0$, $(B_r)_{i_k}^{j} = 0$ при: $k = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, N_2}$, $j \neq j_k$; матрица B_r содержит ровно r ненулевых строк. Очевидно, $(B_r)_{i_1}, \ldots, (B_r)_{i_r}$ — базисные столбцы матрицы B_r. Тогда $\operatorname{rank}(B_r) = r$. Так как $(B_r)_{i_1}, \ldots, (B_r)_{i_r}$ — линейно независимые столбцы, то $\det\Big(\big\{(B_r)_{i_k}^{j_m}\big\}_{k=\overline{1,r}}^{m=\overline{1,r}}\Big) \neq 0$.

Очевидно:

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B_0) = \cdots = \operatorname{rank}(B_r) = r;$$
$$\det\Big(\big\{A_{i_k}^{j_m}\big\}_{k=\overline{1,r}}^{m=\overline{1,r}}\Big) = \det\Big(\big\{(B_0)_{i_k}^{j_m}\big\}_{k=\overline{1,r}}^{m=\overline{1,r}}\Big) = \cdots = \det\Big(\big\{(B_r)_{i_k}^{j_m}\big\}_{k=\overline{1,r}}^{m=\overline{1,r}}\Big) \neq 0.$$

Так как $\det\Big(\big\{A_{i_k}^{j_m}\big\}_{k=\overline{1,r}}^{m=\overline{1,r}}\Big) \neq 0$, то: $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — линейно независимые столбцы, $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ — линейно независимые строки. Так как $\operatorname{rank}(A) = r$, то: $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — базисные столбцы матрицы A; $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ — базисные строки матрицы A.

Лекция 12. Система линейных алгебраических уравнений

12.1. Линейное операторное уравнение

Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, $y \in L_2$. Рассмотрим уравнение:

$$\begin{cases} Ax = y, \\ x \in \mathrm{D}(A). \end{cases} \tag{1}$$

Будем говорить, что (1) — линейное операторное уравнение. Пусть $y = \theta_2$. Будем говорить, что (1) — линейное однородное операторное уравнение. Пусть $y \neq \theta_2$. Будем говорить, что (1) — линейное неоднородное операторное уравнение.

Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$. Рассмотрим уравнение:

$$\begin{cases} Ax = \theta_2, \\ x \in \mathrm{D}(A). \end{cases} \tag{2}$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$. Рассмотрим уравнение (2).

1. Пусть $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = 0$. Тогда $\ker(A) = \{\theta_1\}$.

2. Пусть: $m \in \mathbb{N}$, $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = m$. Тогда существуют векторы $e_1, \ldots, e_m$, удовлетворяющие условию: $e_1, \ldots, e_m$ — базис подпространства $\ker(A)$. Следовательно, $\ker(A) = L(e_1, \ldots, e_m)$.

3. Пусть $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = +\infty$. Ничего сказать нельзя.

Будем говорить, что e — фундаментальная совокупность решений (ФСР) уравнения (2), если e — базис подпространства $\ker(A)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, $y \in L_2$. Рассмотрим уравнение (1). Обозначим, $Q = \bigl\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax = y\bigr\}$. Очевидно, $Q = \mathrm{D}\bigl(A, \{y\}\bigr)$.

Пусть x_1, $x_2 \in Q$. Тогда: $x_1 \in \mathrm{D}(A)$, $Ax_1 = y$, $x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $Ax_2 = y$. Следовательно: $x_1 - x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = y - y = \theta_2$. Тогда $x_1 - x_2 \in \ker(A)$.

Пусть: $x_1 \in Q$, $x_2 \in \ker(A)$. Тогда: $x_1 \in \mathrm{D}(A)$, $Ax_1 = y$, $x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $Ax_2 = \theta_2$. Следовательно: $x_1 + x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = y + \theta_2 = y$. Тогда $x_1 + x_2 \in Q$.

Пусть $x_0 \in Q$. Докажем, что $Q = \{x_0\} + \ker(A)$.

Пусть $x \in Q$. Так как $x_0 \in Q$, то $x - x_0 \in \ker(A)$. Тогда: $x = x_0 + (x - x_0) \in \{x_0\} + \ker(A)$.

Пусть $x \in \{x_0\} + \ker(A)$. Тогда существует вектор $\tilde{x}$, удовлетворяющий условиям: $\tilde{x} \in \ker(A)$, $x = x_0 + \tilde{x}$. Так как $x_0 \in Q$, то $x \in Q$.

Итак, $Q = \{x_0\} + \ker(A)$.

1. Пусть $y \notin \mathrm{R}(A)$. Тогда $Q = \varnothing$.

2. Пусть $y \in \mathrm{R}(A)$. Тогда существует вектор x_0, удовлетворяющий условию $x_0 \in Q$. Следовательно, $Q = \{x_0\} + \ker(A)$.

2.1. Пусть $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = 0$. Тогда $\ker(A) = \{\theta_1\}$. Следовательно: $Q = \{x_0\} + \ker(A) = \{x_0\} + \{\theta_1\} = \{x_0\}$.

2.2. Пусть: $m \in \mathbb{N}$, $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = m$. Тогда существуют векторы $e_1, \dots, e_m$, удовлетворяющие условию: $e_1, \dots, e_m$ — базис подпространства $\ker(A)$. Следовательно, $\ker(A) = L(e_1, \dots, e_m)$. Тогда: $Q = \{x_0\} + \ker(A) = \{x_0\} + L(e_1, \dots, e_m)$.

2.3. Пусть $\dim\bigl(\ker(A)\bigr) = +\infty$. Ничего сказать нельзя.

12.2. Система линейных алгебраических уравнений

Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $y \in \mathbb{K}^{N_2}$. Рассмотрим уравнение:

$$\begin{cases} Ax = y, \\ x \in \mathbb{K}^{N_1}. \end{cases} \tag{3}$$

Очевидно, уравнение (3) можно переписать в виде линейного операторного уравнения:

$$\begin{cases} \hat{A}x = y, \\ x \in \mathrm{D}(\hat{A}). \end{cases}$$

Очевидно, уравнение (3) можно переписать в виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{cases} A^1_1 x^1 + \dots + A^1_{N_1} x^{N_1} = y^1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A^{N_2}_1 x^1 + \dots + A^{N_2}_{N_1} x^{N_1} = y^{N_2}; \\ x^1, \dots, x^{N_1} \in \mathbb{K}. \end{cases}$$

Будем говорить, что A — основная матрица уравнения (3). Будем говорить, что (A, y) — расширенная матрица уравнения (3).

Теорема (Кронекера—Капелли)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* N_1*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*;* $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $y \in \mathbb{K}^{N_2}$*. Уравнение* (3) *имеет решение тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rank}(A, y) = \operatorname{rank}(A)$.

Доказательство. Пусть существует столбец x, удовлетворяющий условиям: $x \in \mathbb{K}^{N_1}$, $Ax = y$. Тогда: $x^1, \dots, x^{N_1} \in \mathbb{K}$, $y = A_1 x^1 + \dots + A_{N_1} x^{N_1}$. Следовательно: $-x^1, \dots, -x^{N_1} \in \mathbb{K}$, $(-1)y = A_1(-x^1) + \dots + A_{N_1}(-x^{N_1})$. Тогда $(-1)y \in L(A_1, \dots, A_{N_1})$. Следовательно:

$$\operatorname{rank}(A, y) = \operatorname{rank}(A_1, \dots, A_{N_1}, y) = \operatorname{rank}\bigl(A_1, \dots, A_{N_1}, y + (-1)y\bigr) = \operatorname{rank}(A_1, \dots, A_{N_1}, \tilde{\theta}_2) = \\ = \operatorname{rank}(A_1, \dots, A_{N_1}) = \operatorname{rank}(A).$$

Пусть $\operatorname{rank}(A, y) = \operatorname{rank}(A)$. Обозначим, $r = \operatorname{rank}(A)$. Тогда: $r \in \mathbb{Z}_+$, $\operatorname{rank}(A, y) = r$.

Пусть $r = 0$. Так как: $\operatorname{rank}\bigl(\{A_1, \dots, A_{N_1}, y\}\bigr) = \operatorname{rank}(A, y) = r$, то $y = \tilde{\theta}_2$. Тогда: $\tilde{\theta}_1 \in \mathbb{K}^{N_1}$, $A\tilde{\theta}_1 = y$.

Пусть $r \neq 0$. Тогда $r \in \mathbb{N}$. Так как: $\operatorname{rank}\bigl(\{A_1, \dots, A_{N_1}\}\bigr) = \operatorname{rank}(A) = r$, то существуют числа $i_1, \dots, i_r = \overline{1, N_1}$, удовлетворяющие условиям: $i_1 < \dots < i_r$, $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ — линейно независимые столбцы. Так как: $\operatorname{rank}\bigl(\{A_1, \dots, A_{N_1}, y\}\bigr) = \operatorname{rank}(A, y) = r$, то $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ — базис множества $\{A_1, \dots, A_{N_1}, y\}$. Тогда существуют числа $x^{i_1}, \dots, x^{i_r}$, удовлетворяющие условиям: $x^{i_1}, \dots, x^{i_r} \in \mathbb{K}$, $y = A_{i_1} x^{i_1} + \dots + A_{i_r} x^{i_r}$. Обозначим: $x^i = 0$ при: $i = \overline{1, N_1}$, $i \notin \{i_1, \dots, i_r\}$. Тогда: $x^1, \dots, x^{N_1} \in \mathbb{K}$, $y = A_1 x^1 + \dots + A_{N_1} x^{N_1}$. Следовательно: $x \in \mathbb{K}^{N_1}$, $Ax = y$. $\square$

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$. Будем говорить, что B — обратная матрица к матрице A, если: $B \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $AB = I$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$; $A,\ B \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $AB = I$. Тогда:

$$\det(AB) = \det(I);$$
$$\det(A)\det(B) = 1;$$
$$\det(A),\ \det(B) \neq 0.$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $\det(A) \neq 0$.

1. Обозначим: $B_i^j = \frac{(-1)^{i+j}\overline{\Delta}_j^i(A)}{\det(A)}$ *при* $i,\ j = \overline{1, N}$. *Тогда:* $B \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $AB = I$, $BA = I$.

2. Пусть: $N_1 \in \mathbb{N}$, $Y \in \mathbb{K}^{N \times N_1}$. *Существует единственная матрица* X*, удовлетворяющая условиям:* $X \in \mathbb{K}^{N \times N_1}$, $AX = Y$.

3. Пусть: $N_2 \in \mathbb{N}$, $Y \in \mathbb{K}^{N_2 \times N}$. *Существует единственная матрица* X*, удовлетворяющая условиям:* $X \in \mathbb{K}^{N_2 \times N}$, $XA = Y$.

4. Пусть: $x,\ y \in \mathbb{K}^N$, $Ax = y$. *Тогда:* $x^j = \frac{\det(A_1, \ldots, A_{j-1}, y, A_{j+1}, \ldots, A_N)}{\det(A)}$ *при* $j = \overline{1, N}$ *(**формулы Крамера**).*

Доказательство.

1. Очевидно, $B \in \mathbb{K}^{N \times N}$. Пусть $i,\ j = \overline{1, N}$. Обозначим:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^{i-1} \\ A^j \\ A^{i+1} \\ \vdots \\ A^N \end{pmatrix}.$$

Тогда:

$$(AB)_i^j = \sum_{k=1}^{N} A_k^j B_i^k = \sum_{k=1}^{N} A_k^j \frac{(-1)^{i+k}\overline{\Delta}_k^i(A)}{\det(A)} = \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^{N} (-1)^{i+k}\overline{\Delta}_k^i(A) A_k^j =$$
$$= \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^{N} (-1)^{i+k}\overline{\Delta}_k^i(\tilde{A}) \tilde{A}_k^i = \frac{1}{\det(A)} \det(\tilde{A}) = \delta_i^j = I_i^j.$$

Следовательно, $AB = I$.

Пусть $i,\ j = \overline{1, N}$. Обозначим, $\tilde{A} = (A_1, \ldots, A_{j-1}, A_i, A_{j+1}, \ldots, A_N)$. Тогда:

$$(BA)_i^j = \sum_{k=1}^{N} B_k^j A_i^k = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k+j}\overline{\Delta}_j^k(A)}{\det(A)} A_i^k = \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+j}\overline{\Delta}_j^k(A) A_i^k =$$
$$= \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+j}\overline{\Delta}_j^k(\tilde{A}) \tilde{A}_j^k = \frac{1}{\det(A)} \det(\tilde{A}) = \delta_i^j = I_i^j.$$

Следовательно, $BA = I$.

2. Пусть: $X \in \mathbb{K}^{N\times N_1}$, $AX = Y$. Тогда:

$$\begin{gathered}B(AX) = BY,\\(BA)X = BY,\\IX = BY,\\X = BY.\end{gathered}$$

Пусть: $X_1 \in \mathbb{K}^{N\times N_1}$, $AX_1 = Y$, $X_2 \in \mathbb{K}^{N\times N_1}$, $AX_2 = Y$. Тогда: $X_1 = BY$, $X_2 = BY$. Следовательно, $X_1 = X_2$.

Пусть $X = BY$. Тогда: $X \in \mathbb{K}^{N\times N_1}$, $AX = A(BY) = (AB)Y = IY = Y$.

3. Пусть: $X \in \mathbb{K}^{N_2\times N}$, $XA = Y$. Тогда:

$$\begin{gathered}(XA)B = YB,\\X(AB) = YB,\\XI = YB,\\X = YB.\end{gathered}$$

Пусть: $X_1 \in \mathbb{K}^{N_2\times N}$, $X_1A = Y$, $X_2 \in \mathbb{K}^{N_2\times N}$, $X_2A = Y$. Тогда: $X_1 = YB$, $X_2 = YB$. Следовательно, $X_1 = X_2$.

Пусть $X = YB$. Тогда: $X \in \mathbb{K}^{N_2\times N}$, $XA = (YB)A = Y(BA) = YI = Y$.

4. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\frac{\det(A_1, \ldots, A_{j-1}, y, A_{j+1}, \ldots, A_N)}{\det(A)} = \frac{\det(A_1, \ldots, A_{j-1}, Ax, A_{j+1}, \ldots, A_N)}{\det(A)} =$$
$$= \frac{\det(A_1, \ldots, A_{j-1}, A_kx^k, A_{j+1}, \ldots, A_N)}{\det(A)} = \frac{\det(A_1, \ldots, A_{j-1}, A_k, A_{j+1}, \ldots, A_N)}{\det(A)}x^k = \delta^j_k x^k =$$
$$= x^j. \quad \square$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$.

1. Пусть: $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A) \neq 0$. Очевидно, существует единственная матрица X, удовлетворяющая условию: X — обратная матрица к матрице A. Обозначим через A^{-1} обратную матрицу к матрице A.

2. Пусть: $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A) \neq 0$. Обозначим: $B^j_i = \frac{(-1)^{i+j}\overline{\Delta}^i_j(A)}{\det(A)}$ при i, $j = \overline{1, N}$. Тогда: $B \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $AB = I$. Следовательно, $A^{-1} = B$. Тогда: $A^{-1}A = I$, $(A^{-1})^j_i = \frac{(-1)^{i+j}\overline{\Delta}^i_j(A)}{\det(A)}$ при i, $j = \overline{1, N}$.

3. Пусть: A, $B \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $AB = I$. Тогда $\det(A)$, $\det(B) \neq 0$.

Так как $AB = I$, то $A^{-1} = B$.

Очевидно, $B^{-1}B = I$. С другой стороны, $AB = I$. Тогда $B^{-1} = A$.

4. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A) \neq 0$. Очевидно: $(\lambda A)(\lambda^{-1}A^{-1}) = (\lambda\lambda^{-1})(AA^{-1}) = 1I = I$. Тогда: $\det(\lambda A) \neq 0$, $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$.

5. Пусть: A, $B \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A)$, $\det(B) \neq 0$. Очевидно: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = \big(A(BB^{-1})\big)A^{-1} = (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I$. Тогда: $\det(AB) \neq 0$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

6. Пусть: $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(A) \neq 0$. Очевидно, $AA^{-1} = I$. Тогда: $\det(A^{-1}) \neq 0$, $(A^{-1})^{-1} = A$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2\times N_1}$, $y \in \mathbb{K}^{N_2}$. Рассмотрим уравнение (3). Обозначим: $Q = \{x\colon x \in \mathbb{K}^{N_1} \wedge Ax = y\}$, $r = \operatorname{rank}(A)$. Тогда $r = \overline{0, \min\{N_1, N_2\}}$.

1. Пусть $\operatorname{rank}(A, y) \neq r$. Тогда $Q = \varnothing$.

2. Пусть: $\operatorname{rank}(A,y)=r$, $r=0$. Тогда: $A=\Theta$, $y=\tilde{\theta}_2$. Следовательно, $Q=\mathbb{K}^{N_1}$.

3. Пусть: $\operatorname{rank}(A,y)=r$, $r\neq 0$, $N_1=r$, $N_2=r$. Можно использовать формулы Крамера.

4. Пусть: $\operatorname{rank}(A,y)=r$, $r\neq 0$, $N_1=r$, $N_2>r$. Пусть $\Delta^{1,\dots,r}_{1,\dots,r}(A)\neq 0$. Тогда $(A,y)^1,\dots,(A,y)^r$ — базис множества $\{(A,y)^1,\dots,(A,y)^{N_2}\}$. Следовательно, уравнение (3) эквивалентно системе:

$$\begin{cases} A^1_1x^1+\dots+A^1_rx^r=y^1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A^r_1x^1+\dots+A^r_rx^r=y^r; \\ x^1,\dots,x^r\in\mathbb{K}. \end{cases}$$

Можно использовать формулы Крамера.

5. Пусть: $\operatorname{rank}(A,y)=r$, $r\neq 0$, $N_1>r$, $N_2=r$. Пусть $\Delta^{1,\dots,r}_{1,\dots,r}(A)\neq 0$. Пусть x — решение уравнения (3). Тогда:

$$\begin{cases} A^1_1x^1+\dots+A^1_rx^r=y^1-A^1_{r+1}x^{r+1}-\dots-A^1_{N_1}x^{N_1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A^r_1x^1+\dots+A^r_rx^r=y^r-A^r_{r+1}x^{r+1}-\dots-A^r_{N_1}x^{N_1}; \\ x^1,\dots,x^{N_1}\in\mathbb{K}. \end{cases}$$

Обозначим: $C^1=x^{r+1},\dots,C^{N_1-r}=x^{N_1}$. Тогда: $C^1,\dots,C^{N_1-r}\in\mathbb{K}$;

$$\begin{cases} A^1_1x^1+\dots+A^1_rx^r=y^1-A^1_{r+1}C^1-\dots-A^1_{N_1}C^{N_1-r}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A^r_1x^1+\dots+A^r_rx^r=y^r-A^r_{r+1}C^1-\dots-A^r_{N_1}C^{N_1-r}, \\ x^{r+1}=C^1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^{N_1}=C^{N_1-r}; \\ x^1,\dots,x^{N_1}\in\mathbb{K}. \end{cases} \tag{4}$$

Можно использовать формулы Крамера.

Пусть: $C^1,\dots,C^{N_1-r}\in\mathbb{K}$, x — решение системы (4). Тогда x — решение уравнения (3).

6. Пусть: $\operatorname{rank}(A,y)=r$, $r\neq 0$, $N_1>r$, $N_2>r$. Пусть $\Delta^{1,\dots,r}_{1,\dots,r}(A)\neq 0$. Тогда $(A,y)^1,\dots,(A,y)^r$ — базис множества $\{(A,y)^1,\dots,(A,y)^{N_2}\}$. Следовательно, уравнение (3) эквивалентно системе:

$$\begin{cases} A^1_1x^1+\dots+A^1_{N_1}x^{N_1}=y^1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A^r_1x^1+\dots+A^r_{N_1}x^{N_1}=y^r; \\ x^1,\dots,x^{N_1}\in\mathbb{K}. \end{cases}$$

Можно использовать метод из пункта 5.

Определение. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$, $N_1,\ N_2\in\mathbb{N}$; $A\in\mathbb{K}^{N_2\times N_1}$, $y\in\mathbb{K}^{N_2}$, $j=\overline{1,N_2}$. Будем говорить, что $(A,y)^j$ — квазинулевая строка, если: $A^j_1,\dots,A^j_{N_1}=0$, $y^j\neq 0$.

Замечание (Метод Гаусса—Жордана для решения СЛАУ). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $y \in \mathbb{K}^{N_2}$. Обозначим, $Q = \{x\colon x \in \mathbb{K}^{N_1} \wedge Ax = y\}$. Пусть матрица (A, y) содержит квазинулевую строку. Тогда $Q = \varnothing$. Пусть матрица (A, y) не содержит квазинулевых строк. Пусть матрица A не содержит ненулевых строк. Тогда $Q = \mathbb{K}^{N_1}$. Пусть матрица A содержит ненулевую строку. Обозначим: $B_0 = A$, $z_0 = y$. Тогда: $B_0 \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $z_0 \in \mathbb{K}^{N_2}$, $Q = \{x\colon x \in \mathbb{K}^{N_1} \wedge B_0 x = z_0\}$, матрица (B_0, z_0) не содержит квазинулевых строк, матрица B_0 содержит ненулевую строку.

Выберем числа $i_1 = \overline{1, N_1}$, $j_1 = \overline{1, N_2}$, удовлетворяющие условию $(B_0)_{i_1}^{j_1} \neq 0$. Обнулим элементы, стоящие над элементом $(B_0)_{i_1}^{j_1}$, обнулим элементы, стоящие под элементом $(B_0)_{i_1}^{j_1}$. Получим матрицу $B_1 \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, получим столбец $z_1 \in \mathbb{K}^{N_2}$, удовлетворяющий условиям: $(B_1)_{i_1}^{j_1} \neq 0$, $(B_1)_{i_1}^{j} = 0$ при: $j = \overline{1, N_2}$, $j \neq j_1$; $Q = \{x\colon x \in \mathbb{K}^{N_1} \wedge B_1 x = z_1\}$. Пусть матрица (B_1, z_1) содержит квазинулевую строку. Тогда $Q = \varnothing$. Остановим процесс. Пусть матрица (B_1, z_1) не содержит квазинулевых строк. Пусть матрица B_1 содержит ровно одну ненулевую строку. Остановим процесс. Пусть матрица B_1 содержит, по крайней мере, две ненулевые строки. Перейдём к следующему шагу.

Выберем числа $i_2 = \overline{1, N_1}$, $j_2 = \overline{1, N_2}$, удовлетворяющие условиям: $j_2 \neq j_1$, $(B_1)_{i_2}^{j_2} \neq 0$. Очевидно, $i_2 \neq i_1$. Тогда: i_1, $i_2 = \overline{1, N_1}$, i_1, i_2 — различные числа, j_1, $j_2 = \overline{1, N_2}$, j_1, j_2 — различные числа. Обнулим элементы, стоящие над элементом $(B_1)_{i_2}^{j_2}$, обнулим элементы, стоящие под элементом $(B_1)_{i_2}^{j_2}$. Получим матрицу $B_2 \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, получим столбец $z_2 \in \mathbb{K}^{N_2}$, удовлетворяющий условиям: $(B_2)_{i_k}^{j_k} \neq 0$, $(B_2)_{i_k}^{j} = 0$ при: $k = 1, 2$, $j = \overline{1, N_2}$, $j \neq j_k$; $Q = \{x\colon x \in \mathbb{K}^{N_1} \wedge B_1 x = z_1\}$. Пусть матрица (B_2, z_2) содержит квазинулевую строку. Тогда $Q = \varnothing$. Остановим процесс. Пусть матрица B_2 содержит ровно две ненулевые строки. Остановим процесс. Пусть матрица B_2 содержит, по крайней мере, три ненулевые строки. Перейдём к следующему шагу.

Первый вариант. Продолжая рассуждения, получим, что $Q = \varnothing$.

Второй вариант. Продолжая рассуждения, получим число $r = \overline{1, \min\{N_1, N_2\}}$, получим числа $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$, $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N_2}$, получим матрицу $B_r \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, получим столбец $z_r \in \mathbb{K}^{N_2}$, удовлетворяющий условиям: $i_1, \ldots, i_r$ — различные числа, $j_1, \ldots, j_r$ — различные числа, $(B_r)_{i_k}^{j_k} \neq 0$, $(B_r)_{i_k}^{j} = 0$ при: $k = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, N_2}$, $j \neq j_k$; $Q = \{x\colon x \in \mathbb{K}^{N_1} \wedge B_r x = z_r\}$, матрица (B_r, z_r) не содержит квазинулевых строк, матрица B_r содержит ровно r ненулевых строк. Далее можно выписывать ответ.

Лекция 13. Кривые второго порядка

13.1. Определение кривой второго порядка

Определение. Будем говорить, что l — кривая второго порядка в пространстве E^2, если: $l \subseteq E^2$; существуют объекты O, e, A, B, C, удовлетворяющие условиям: $O \in E^2$, e — базис пространства $\vec{E}^2$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A^T = A$, $A \neq \Theta$, $B \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, $C \in \mathbb{R}$, $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$A_{k,m}x^k x^m + 2B_m x^m + C = 0,$$
$$x \in \mathbb{R}^2.$$

Утверждение (без доказательства). *Пусть l — кривая второго порядка в пространстве E^2. Тогда l является одним из следующих множеств.*

1. *Эллипс.*
2. *Множество, состоящее из одной точки.*
3. *Пустое множество.*
4. *Гипербола.*
5. *Объединение двух прямых, имеющих одну общую точку.*
6. *Парабола.*
7. *Объединение двух прямых, не имеющих общих точек.*
8. *Прямая.*

13.2. Эллипс

Определение. Будем говорить, что l — эллипс в пространстве E^2, если: $l \subseteq E^2$; существуют объекты O, e, a, b, удовлетворяющие условиям: $O \in E^2$, e — правый ортонормированный базис пространства $\vec{E}^2$, a, $b \in \mathbb{R}$, $0 < b \leqslant a$, $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} = 1,$$
$$x \in \mathbb{R}^2.$$

Пусть: $l \subseteq E^2$; $O \in E^2$, e — правый ортонормированный базис пространства $\vec{E}^2$, a, $b \in \mathbb{R}$, $0 < b \leqslant a$, $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} = 1,$$
$$x \in \mathbb{R}^2.$$

Тогда l — эллипс в пространстве E^2.

Будем говорить, что: $h_{O,e}$ — каноническая система координат для эллипса l; a — большая полуось эллипса l; b — малая полуось эллипса l. Очевидно, $O \notin l$. Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$. Тогда: $h_{O,e}^{-1}(-x^1, x^2) \in l$, $h_{O,e}^{-1}(x^1, -x^2) \in l$, $h_{O,e}^{-1}(-x^1, -x^2) \in l$.

Утверждение. *Справедливо утверждение: $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:*

$$|x^2| = b\sqrt{1 - \frac{(x^1)^2}{a^2}},$$

$$x \in \mathbb{R}^2,\ |x^1| \leqslant a.$$

Справедливо утверждение: $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$|x^1| = a\sqrt{1 - \frac{(x^2)^2}{b^2}},$$
$$x \in \mathbb{R}^2,\ |x^2| \leqslant b.$$

Обозначим, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Тогда $c \in [0, a)$. Пусть $a > b$. Тогда $c > 0$. Пусть $a = b$. Тогда $c = 0$.

Обозначим, $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Тогда $\varepsilon \in [0, 1)$. Будем говорить, что ε — эксцентриситет эллипса l. Пусть $a > b$. Тогда $\varepsilon > 0$. Пусть $a = b$. Тогда $\varepsilon = 0$.

Обозначим: $F_1 = h_{O,e}^{-1}(-c, 0)$, $F_2 = h_{O,e}^{-1}(c, 0)$. Тогда: F_1, $F_2 \in E^2$, F_1, $F_2 \notin l$, $\rho(F_1, F_2) = 2c$. Будем говорить, что: F_1, F_2 — фокусы эллипса l; $\rho(F_1, F_2)$ — фокусное расстояние эллипса l. Пусть $a > b$. Тогда: F_1, $F_2 \neq O$, $F_1 \neq F_2$. Пусть $a = b$. Тогда F_1, $F_2 = O$.

Пусть $M \in E^2$. Обозначим: $r_1(M) = \rho(M, F_1)$, $r_2(M) = \rho(M, F_2)$. Тогда $r_1(M)$, $r_2(M) \in [0, +\infty)$. Пусть $x = h_{O,e}(M)$. Тогда: $r_1(M) = \sqrt{(x^1 + c)^2 + (x^2)^2}$, $r_2(M) = \sqrt{(x^1 - c)^2 + (x^2)^2}$.

Замечание. Пусть $M \in l$. Так как $F_1 \notin l$, то $M \neq F_1$. Тогда: $\overrightarrow{F_1M} \neq \theta$, $r_1(M) = \rho(M, F_1) > 0$.

Пусть $M \in l$. Так как $F_2 \notin l$, то $M \neq F_2$. Тогда: $\overrightarrow{F_2M} \neq \theta$, $r_2(M) = \rho(M, F_2) > 0$.

Утверждение. *Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$. Тогда:*

$$r_1(M) = \sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1\Big) + (a + \varepsilon x^1)^2},$$
$$r_2(M) = \sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1\Big) + (a - \varepsilon x^1)^2}.$$

Доказательство. Очевидно:

$$\sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1\Big) + (a + \varepsilon x^1)^2} = \sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1\Big) + \Big(a + \frac{c}{a}x^1\Big)^2} =$$
$$= \sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1\Big) + a^2 + 2cx^1 + \frac{c^2}{a^2}(x^1)^2} =$$
$$= \sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1\Big) + a^2 + 2cx^1 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}(x^1)^2} = \sqrt{(x^1)^2 + 2x^1c + c^2 + (x^2)^2} =$$
$$= \sqrt{(x^1 + c)^2 + (x^2)^2} = r_1(M);$$
$$\sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1\Big) + (a - \varepsilon x^1)^2} = \sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1\Big) + \Big(a - \frac{c}{a}x^1\Big)^2} =$$
$$= \sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1\Big) + a^2 - 2cx^1 + \frac{c^2}{a^2}(x^1)^2} =$$
$$= \sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1\Big) + a^2 - 2cx^1 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}(x^1)^2} = \sqrt{(x^1)^2 - 2x^1c + c^2 + (x^2)^2} =$$
$$= \sqrt{(x^1 - c)^2 + (x^2)^2} = r_2(M). \quad \square$$

Утверждение (фокальные свойства эллипса)**.**

1. *Пусть:* $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$. *Тогда* $r_1(M) = |a + \varepsilon x^1|$.
2. *Пусть:* $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r_1(M) = |a + \varepsilon x^1|$. *Тогда* $M \in l$.
3. *Пусть:* $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$. *Тогда* $r_2(M) = |a - \varepsilon x^1|$.
4. *Пусть:* $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r_2(M) = |a - \varepsilon x^1|$. *Тогда* $M \in l$.

Доказательство.

1. Так как $M \in l$, то $\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} = 1$. Тогда:

$$r_1(M) = \sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1\Big) + (a + \varepsilon x^1)^2} = \sqrt{(a + \varepsilon x^1)^2} = |a + \varepsilon x^1|.$$

2. Очевидно:

$$\begin{gathered} r_1(M) = |a + \varepsilon x^1|, \\ \sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1\Big) + (a + \varepsilon x^1)^2} = |a + \varepsilon x^1|, \\ b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1\Big) + (a + \varepsilon x^1)^2 = (a + \varepsilon x^1)^2, \\ b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1\Big) = 0, \\ \frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} = 1. \end{gathered}$$

Тогда $M \in l$.

3. Так как $M \in l$, то $\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} = 1$. Тогда:

$$r_2(M) = \sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1\Big) + (a - \varepsilon x^1)^2} = \sqrt{(a - \varepsilon x^1)^2} = |a - \varepsilon x^1|.$$

4. Очевидно:

$$\begin{gathered} r_2(M) = |a - \varepsilon x^1|, \\ \sqrt{b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1\Big) + (a - \varepsilon x^1)^2} = |a - \varepsilon x^1|, \\ b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1\Big) + (a - \varepsilon x^1)^2 = (a - \varepsilon x^1)^2, \\ b^2\Big(\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - 1\Big) = 0, \\ \frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} = 1. \end{gathered}$$

Тогда $M \in l$. □

Замечание. Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$. Тогда $|x^1| \leqslant a$. Так как: $a > 0$, $|\varepsilon| < 1$, то $a + \varepsilon x^1 > 0$.

Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r_1(M) = a + \varepsilon x^1$. Тогда $\big|r_1(M)\big| = |a + \varepsilon x^1|$. Так как $r_1(M) \geqslant 0$, то $r_1(M) = |a + \varepsilon x^1|$.

Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$. Тогда $|x^1| \leqslant a$. Так как: $a > 0$, $|\varepsilon| < 1$, то $a - \varepsilon x^1 > 0$.

Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r_2(M) = a - \varepsilon x^1$. Тогда $\big|r_2(M)\big| = |a - \varepsilon x^1|$. Так как $r_2(M) \geqslant 0$, то $r_2(M) = |a - \varepsilon x^1|$.

Замечание (фокальные свойства эллипса). Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$. Тогда: $r_1(M) = |a + \varepsilon x^1|$, $a + \varepsilon x^1 > 0$. Следовательно, $r_1(M) = a + \varepsilon x^1$.

Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r_1(M) = a + \varepsilon x^1$. Тогда $r_1(M) = |a + \varepsilon x^1|$. Следовательно, $M \in l$.

Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$. Тогда: $r_2(M) = |a - \varepsilon x^1|$, $a - \varepsilon x^1 > 0$. Следовательно, $r_2(M) = a - \varepsilon x^1$.

Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r_2(M) = a - \varepsilon x^1$. Тогда $r_2(M) = |a - \varepsilon x^1|$. Следовательно, $M \in l$.

Утверждение (фокальные свойства эллипса)**.**

1. Пусть $M \in l$. Тогда $r_1(M) + r_2(M) = 2a$.

2. Пусть: $M \in E^2$, $r_1(M) + r_2(M) = 2a$. Тогда $M \in l$.

Доказательство.

1. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Так как $M \in l$, то: $r_1(M) = a + \varepsilon x^1$, $r_2(M) = a - \varepsilon x^1$. Тогда $r_1(M) + r_2(M) = 2a$.

2. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Очевидно:

$$\big(r_1(M)\big)^2 = (x^1 + c)^2 + (x^2)^2 = (x^1)^2 + 2x^1c + c^2 + (x^2)^2,$$
$$\big(r_2(M)\big)^2 = (x^1 - c)^2 + (x^2)^2 = (x^1)^2 - 2x^1c + c^2 + (x^2)^2.$$

Тогда $\big(r_1(M)\big)^2 - \big(r_2(M)\big)^2 = 4x^1c$. Следовательно:

$$\big(r_1(M) - r_2(M)\big)\big(r_1(M) + r_2(M)\big) = \big(r_1(M)\big)^2 - \big(r_2(M)\big)^2 = 4x^1c.$$

Так как $r_1(M) + r_2(M) = 2a$, то:

$$r_1(M) - r_2(M) = \frac{1}{2a}4x^1c = 2\varepsilon x^1.$$

Так как $r_1(M) + r_2(M) = 2a$, то $r_1(M) = a + \varepsilon x^1$. Тогда $M \in l$. □

Пусть $a > b$. Пусть: $D_1 \subseteq E^2$, $h_{O,e}[D_1]$ — множество всех решений уравнения: $x^1 = -\frac{a}{\varepsilon}$, $x \in \mathbb{R}^2$; $D_2 \subseteq E^2$, $h_{O,e}[D_2]$ — множество всех решений уравнения: $x^1 = \frac{a}{\varepsilon}$, $x \in \mathbb{R}^2$. Тогда: D_1, D_2 — прямые в пространстве E^2, $O, F_1, F_2 \notin D_1$, $O, F_1, F_2 \notin D_2$, $D_1 \cap l = \varnothing$, $D_2 \cap l = \varnothing$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$. Будем говорить, что D_1, D_2 — директрисы эллипса l.

Пусть $M \in E^2$. Обозначим: $d_1(M) = \rho(M, D_1)$, $d_2(M) = \rho(M, D_2)$. Тогда $d_1(M), d_2(M) \in [0, +\infty)$. Пусть $x = h_{O,e}(M)$. Тогда: $d_1(M) = |x^1 + \frac{a}{\varepsilon}|$, $d_1(M) = |x^1 - \frac{a}{\varepsilon}|$.

Утверждение (фокально-директориальные свойства эллипса)**.**

1. Пусть $M \in l$. Тогда $r_1(M) = \varepsilon d_1(M)$.

2. Пусть: $M \in E^2$, $r_1(M) = \varepsilon d_1(M)$. Тогда $M \in l$.

3. Пусть $M \in l$. Тогда $r_2(M) = \varepsilon d_2(M)$.

4. Пусть: $M \in E^2$, $r_2(M) = \varepsilon d_2(M)$. Тогда $M \in l$.

Доказательство.

1. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Так как $M \in l$, то:

$$r_1(M) = |a + \varepsilon x^1| = \varepsilon\Big|x^1 + \frac{a}{\varepsilon}\Big| = \varepsilon d_1(M).$$

2. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Очевидно:

$$r_1(M) = \varepsilon d_1(M) = \varepsilon\Big|x^1 + \frac{a}{\varepsilon}\Big| = |a + \varepsilon x^1|.$$

Тогда $M \in l$.

3. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Так как $M \in l$, то:

$$r_2(M) = |a - \varepsilon x^1| = \varepsilon\Big|x^1 - \frac{a}{\varepsilon}\Big| = \varepsilon d_1(M).$$

4. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Очевидно:

$$r_1(M) = \varepsilon d_1(M) = \varepsilon\Big|x^1 - \frac{a}{\varepsilon}\Big| = |a - \varepsilon x^1|.$$

Тогда $M \in l$. □

Определение (нормальный вектор к эллипсу, касательный вектор к эллипсу, касательная прямая к эллипсу). Пусть: $M_0 \in l$, $x_0 = h_{O,e}(M_0)$.

Обозначим, $N_*(M_0) = \frac{x_0^1}{a^2}e_1 + \frac{x_0^2}{b^2}e_2$. Тогда: $N_*(M_0) \in \vec{E}^2$, $N_*(M_0) \neq \theta$. Будем говорить, что N — нормальный вектор к эллипсу l в точке M_0, если $N \in L\big(N_*(M_0)\big)$.

Обозначим, $\tau_*(M_0) = -\frac{x_0^2}{b^2}e_1 + \frac{x_0^1}{a^2}e_2$. Тогда: $\tau_*(M_0) \in \vec{E}^2$, $\tau_*(M_0) \perp N_*(M_0)$, $\tau_*(M_0) \neq \theta$. Будем говорить, что τ — касательный вектор к эллипсу l в точке M_0, если $\tau \in L\big(\tau_*(M_0)\big)$.

Обозначим через $l_*(M_0)$ прямую, удовлетворяющую условиям: $l_*(M_0)$ — прямая в пространстве E^2, $M_0 \in l_*(M_0)$, $N_*(M_0)$ — нормальный вектор к прямой $l_*(M_0)$. Будем говорить, что $l_*(M_0)$ — касательная прямая к эллипсу l в точке M_0.

Утверждение. *Пусть* $\psi\colon \mathbb{R} \to l$. *Обозначим:* $\psi_1(t) = \overrightarrow{O\psi(t)}$ *при* $t \in \mathrm{D}(\psi)$; $\psi_2(t) = h_{O,e}\big(\psi(t)\big)$ *при* $t \in \mathrm{D}(\psi)$.

Пусть: $t_0 \in \mathbb{R}$, ψ_1 *— дифференцируемая функция в точке* t_0. *Обозначим:* $M_0 = \psi(t_0)$, $x_0 = \psi_2(t_0)$. *Тогда:* $\dot\psi_1(t_0) \perp N_*(M_0)$, $\dot\psi_1(t_0)$ *— касательный вектор к эллипсу* l *в точке* M_0.

Доказательство. Пусть $t \in \mathrm{D}(\psi)$. Тогда $\psi(t) \in l$. Следовательно:

$$\frac{\big(\psi_2^1(t)\big)^2}{a^2} + \frac{\big(\psi_2^2(t)\big)^2}{b^2} = 1.$$

Так как ψ_1 — дифференцируемая функция в точке t_0, то:

$$\frac{2\psi_2^1(t_0)\dot\psi_2^1(t_0)}{a^2} + \frac{2\psi_2^2(t_0)\dot\psi_2^2(t_0)}{b^2} = 0,$$
$$\frac{x_0^1}{a^2}\dot\psi_2^1(t_0) + \frac{x_0^2}{b^2}\dot\psi_2^2(t_0) = 0,$$
$$\big(N_*(M_0), \dot\psi_1(t_0)\big) = 0.$$

Так как: $N_*(M_0) \neq \theta$, $\tau_*(M_0) \perp N_*(M_0)$, то $\tau_*(M_0)$, $\dot\psi_1(t_0)$ — линейно зависимые векторы. Так как $\tau_*(M_0) \neq \theta$, то $\dot\psi_1(t_0) \in L\big(\tau_*(M_0)\big)$. □

Замечание (уравнение касательной прямой к эллипсу). Пусть: $M_0 \in l$, $x_0 = h_{O,e}(M_0)$. Тогда $\frac{(x_0^1)^2}{a^2} + \frac{(x_0^2)^2}{b^2} = 1$.

Так как: $l_*(M_0)$ — прямая в пространстве E^2, $M_0 \in l_*(M_0)$, $N_*(M_0)$ — нормальный вектор к прямой $l_*(M_0)$, то $h_{O,e}\big[l_*(M_0)\big]$ — множество решений уравнения:

$$\frac{x_0^1}{a^2}(x^1 - x_0^1) + \frac{x_0^2}{b^2}(x^2 - x_0^2) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2;$$
$$\frac{x_0^1 x^1}{a^2} + \frac{x_0^2 x^2}{b^2} = \frac{(x_0^1)^2}{a^2} + \frac{(x_0^2)^2}{b^2}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Так как $\frac{(x_0^1)^2}{a^2} + \frac{(x_0^2)^2}{b^2} = 1$, то $h_{O,e}\big[l_*(M_0)\big]$ — множество решений уравнения:

$$\frac{x_0^1 x^1}{a^2} + \frac{x_0^2 x^2}{b^2} = 1, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Утверждение (оптическое свойство эллипса). *Пусть* $M_0 \in l$. *Тогда* $\varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_1M_0}\big) = \varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_2M_0}\big)$.

Доказательство. Обозначим, $x_0 = h_{O,e}(M_0)$. Так как $M_0 \in l$, то $\frac{(x_0^1)^2}{a^2} + \frac{(x_0^2)^2}{b^2} = 1$.

Очевидно: $\|\overrightarrow{F_1M_0}\| = \rho(F_1, M_0) = \rho(M_0, F_1) = r_1(M_0)$.

Очевидно, $[\overrightarrow{F_1M_0}](e) = (x_0^1 + c, x_0^2)^T$. Так как $M_0 \in l$, то $r_1(M_0) = a + \varepsilon x_0^1$. Так как $\frac{(x_0^1)^2}{a^2} + \frac{(x_0^2)^2}{b^2} = 1$, то:

$$\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_1M_0}\big) = \frac{x_0^1}{a^2}(x_0^1 + c) + \frac{x_0^2}{b^2}x_0^2 = \frac{(x_0^1)^2}{a^2} + \frac{(x_0^2)^2}{b^2} + \frac{x_0^1}{a^2}c = 1 + \frac{1}{a}\varepsilon x_0^1 = \frac{1}{a}(a + \varepsilon x_0^1) = \\ = \frac{1}{a}r_1(M_0).$$

Так как $M_0 \in l$, то $\overrightarrow{F_1M_0} \neq \theta$. Так как $N_*(M_0) \neq \theta$, то:

$$\varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_1M_0}\big) = \arccos\left(\frac{\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_1M_0}\big)}{\big\|N_*(M_0)\big\| \cdot \|\overrightarrow{F_1M_0}\|}\right) = \arccos\left(\frac{\frac{1}{a}r_1(M_0)}{\big\|N_*(M_0)\big\| r_1(M_0)}\right) = \\ = \arccos\left(\frac{1}{a\big\|N_*(M_0)\big\|}\right).$$

Очевидно: $\|\overrightarrow{F_2M_0}\| = \rho(F_2, M_0) = \rho(M_0, F_2) = r_2(M_0)$.

Очевидно, $[\overrightarrow{F_2M_0}](e) = (x_0^1 - c, x_0^2)^T$. Так как $M_0 \in l$, то $r_2(M_0) = a - \varepsilon x_0^1$. Так как $\frac{(x_0^1)^2}{a^2} + \frac{(x_0^2)^2}{b^2} = 1$, то:

$$\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_2M_0}\big) = \frac{x_0^1}{a^2}(x_0^1 - c) + \frac{x_0^2}{b^2}x_0^2 = \frac{(x_0^1)^2}{a^2} + \frac{(x_0^2)^2}{b^2} - \frac{x_0^1}{a^2}c = 1 - \frac{1}{a}\varepsilon x_0^1 = \frac{1}{a}(a - \varepsilon x_0^1) = \\ = \frac{1}{a}r_2(M_0).$$

Так как $M_0 \in l$, то $\overrightarrow{F_2M_0} \neq \theta$. Так как $N_*(M_0) \neq \theta$, то:

$$\varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_2M_0}\big) = \arccos\left(\frac{\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_2M_0}\big)}{\big\|N_*(M_0)\big\| \cdot \|\overrightarrow{F_2M_0}\|}\right) = \arccos\left(\frac{\frac{1}{a}r_2(M_0)}{\big\|N_*(M_0)\big\| r_2(M_0)}\right) =$$

$$= \arccos\left(\frac{1}{a\big\|N_*(M_0)\big\|}\right).$$

Итак: $\varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_1M_0}\big) = \arccos\big(\frac{1}{a|N_*(M_0)|}\big) = \varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_2M_0}\big)$. $\square$

13.3. Гипербола

Определение. Будем говорить, что l — гипербола в пространстве E^2, если: $l \subseteq E^2$; существуют объекты O, e, a, b, удовлетворяющие условиям: $O \in E^2$, e — правый ортонормированный базис пространства $\vec{E}^2$, a, $b \in (0, +\infty)$, $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$\frac{(x^1)^2}{a^2} - \frac{(x^2)^2}{b^2} = 1,$$
$$x \in \mathbb{R}^2.$$

Пусть: $l \subseteq E^2$; $O \in E^2$, e — правый ортонормированный базис пространства $\vec{E}^2$, a, $b \in (0, +\infty)$, $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$\frac{(x^1)^2}{a^2} - \frac{(x^2)^2}{b^2} = 1,$$
$$x \in \mathbb{R}^2.$$

Тогда l — гипербола в пространстве E^2.

Будем говорить, что: $h_{O,e}$ — каноническая система координат для гиперболы l; a — вещественная полуось гиперболы l; b — мнимая полуось гиперболы l. Очевидно, $O \notin l$. Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$. Тогда: $h^{-1}_{O,e}(-x^1, x^2) \in l$, $h^{-1}_{O,e}(x^1, -x^2) \in l$, $h^{-1}_{O,e}(-x^1, -x^2) \in l$.

Утверждение. *Справедливо утверждение: $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:*

$$|x^2| = b\sqrt{\frac{(x^1)^2}{a^2} - 1},$$
$$x \in \mathbb{R}^2,\ |x^1| \geqslant a.$$

Справедливо утверждение: $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$|x^1| = a\sqrt{1 + \frac{(x^2)^2}{b^2}},$$
$$x \in \mathbb{R}^2.$$

Замечание. Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$, $x^1 > -a$. Тогда: $|x^1| \geqslant a$, $x^1 > -a$. Следовательно, $x^1 \geqslant a$.

Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$, $x^1 < a$. Тогда: $|x^1| \geqslant a$, $x^1 < a$. Следовательно, $x^1 \leqslant -a$.

Пусть: $l_1 \subseteq E^2$, $h_{O,e}[l_1]$ — множество всех решений уравнения: $x^2 = \frac{b}{a}x^1$, $x \in \mathbb{R}^2$; $l_2 \subseteq E^2$, $h_{O,e}[l_2]$ — множество всех решений уравнения: $x^2 = -\frac{b}{a}x^1$, $x \in \mathbb{R}^2$. Тогда: l_1, l_2 — прямые в пространстве E^2, F_1, $F_2 \notin l_1$, F_1, $F_2 \notin l_2$, $l_1 \cap l = \varnothing$, $l_2 \cap l = \varnothing$, $l_1 \cap l_2 = \{O\}$. Будем говорить, что l_1, l_2 — асимптоты гиперболы l.

Утверждение. *Обозначим: $F_1(x^1) = b\sqrt{\frac{(x^1)^2}{a^2} - 1}$ при: $x^1 \in \mathbb{R}$, $|x^1| \geqslant a$. Тогда:*

1. $F_1(x^1) < \frac{b}{a}x^1$ *при* $x^1 \in [a, +\infty)$*;* $F_1(x^1) = \frac{b}{a}x^1 + o(1)$ *при:* $x^1 \in \mathbb{R}$*,* $x^1 \to +\infty$*;*
2. $F_1(x^1) < -\frac{b}{a}x^1$ *при* $x^1 \in (-\infty, -a]$*;* $F_1(x^1) = -\frac{b}{a}x^1 + o(1)$ *при:* $x^1 \in \mathbb{R}$*,* $x^1 \to -\infty$*.*

Обозначим: $F_2(x^1) = -b\sqrt{\frac{(x^1)^2}{a^2} - 1}$ *при:* $x^1 \in \mathbb{R}$*,* $|x^1| \geqslant a$*. Тогда:*
1. $F_2(x^1) > -\frac{b}{a}x^1$ *при* $x^1 \in [a, +\infty)$*;* $F_2(x^1) = -\frac{b}{a}x^1 + o(1)$ *при:* $x^1 \in \mathbb{R}$*,* $x^1 \to +\infty$*;*
2. $F_2(x^1) > \frac{b}{a}x^1$ *при* $x^1 \in (-\infty, -a]$*;* $F_2(x^1) = \frac{b}{a}x^1 + o(1)$ *при:* $x^1 \in \mathbb{R}$*,* $x^1 \to -\infty$*.*

Доказательство. Пусть $x^1 \in [a, +\infty)$. Так как a, b, $x^1 > 0$, то:

$$F_1(x^1) - \frac{b}{a}x^1 = b\sqrt{\frac{(x^1)^2}{a^2} - 1} - \frac{b}{a}x^1 = b\frac{x^1}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{(x^1)^2}} - \frac{b}{a}x^1 = \frac{b}{a}x^1\Bigg(\sqrt{1 - \frac{a^2}{(x^1)^2}} - 1\Bigg) =$$
$$= \frac{b}{a}x^1\frac{1 - \frac{a^2}{(x^1)^2} - 1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{(x^1)^2}} + 1} = -\frac{ab}{x^1}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{(x^1)^2}} + 1} < 0.$$

Тогда: $F_1(x^1) < \frac{b}{a}x^1$ при $x^1 \in [a, +\infty)$. Очевидно: $F_1(x^1) - \frac{b}{a}x^1 \to 0$ при $x^1 \to +\infty$. Тогда: $F_1(x^1) - \frac{b}{a}x^1 = o(1)$ при: $x^1 \in \mathbb{R}$, $x^1 \to +\infty$. Следовательно: $F_1(x^1) = \frac{b}{a}x^1 + o(1)$ при: $x^1 \in \mathbb{R}$, $x^1 \to +\infty$.

Так как: $F_1(-x^1) = F_1(x^1)$ при: $x^1 \in \mathbb{R}$, $|x^1| \geqslant a$, то: $F_1(x^1) < -\frac{b}{a}x^1$ при $x^1 \in (-\infty, -a]$; $F_1(x^1) = -\frac{b}{a}x^1 + o(1)$ при: $x^1 \in \mathbb{R}$, $x^1 \to -\infty$.

Так как: $-F_1(x^1) = F_2(x^1)$ при: $x^1 \in \mathbb{R}$, $|x^1| \geqslant a$, то: $F_2(x^1) > -\frac{b}{a}x^1$ при $x^1 \in [a, +\infty)$; $F_2(x^1) = -\frac{b}{a}x^1 + o(1)$ при: $x^1 \in \mathbb{R}$, $x^1 \to +\infty$.

Так как: $-F_1(x^1) = F_2(x^1)$ при: $x^1 \in \mathbb{R}$, $|x^1| \geqslant a$, то: $F_2(x^1) > \frac{b}{a}x^1$ при $x^1 \in (-\infty, -a]$; $F_2(x^1) = \frac{b}{a}x^1 + o(1)$ при: $x^1 \in \mathbb{R}$, $x^1 \to -\infty$. □

Обозначим, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Тогда $c \in (a, +\infty)$.

Обозначим, $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Тогда $\varepsilon \in (1, +\infty)$. Будем говорить, что ε — эксцентриситет гиперболы l.

Обозначим: $F_1 = h_{O,e}^{-1}(-c, 0)$, $F_2 = h_{O,e}^{-1}(c, 0)$. Тогда: F_1, $F_2 \in E^2$, F_1, $F_2 \neq O$, $F_1 \neq F_2$, F_1, $F_2 \notin l$, $\rho(F_1, F_2) = 2c$. Будем говорить, что: F_1, F_2 — фокусы гиперболы l; $\rho(F_1, F_2)$ — фокусное расстояние гиперболы l.

Пусть $M \in E^2$. Обозначим: $r_1(M) = \rho(M, F_1)$, $r_2(M) = \rho(M, F_2)$. Тогда $r_1(M)$, $r_2(M) \in [0, +\infty)$. Пусть $x = h_{O,e}(M)$. Тогда: $r_1(M) = \sqrt{(x^1 + c)^2 + (x^2)^2}$, $r_2(M) = \sqrt{(x^1 - c)^2 + (x^2)^2}$.

Замечание. Пусть $M \in l$. Так как $F_1 \notin l$, то $M \neq F_1$. Тогда: $\overrightarrow{F_1M} \neq \theta$, $r_1(M) = \rho(M, F_1) > 0$.

Пусть $M \in l$. Так как $F_2 \notin l$, то $M \neq F_2$. Тогда: $\overrightarrow{F_2M} \neq \theta$, $r_2(M) = \rho(M, F_2) > 0$.

Пусть $M \in E^2$. Так как $F_1 \neq F_2$, то $M \neq F_1 \vee M \neq F_2$. Тогда $r_1(M) > 0 \vee r_2(M) > 0$. Так как $r_1(M)$, $r_2(M) \geqslant 0$, то $r_1(M) + r_2(M) > 0$.

Утверждение. *Пусть:* $M \in E^2$*,* $x = h_{O,e}(M)$*. Тогда:*

$$r_1(M) = \sqrt{b^2\Big(1 - \frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2}\Big) + (a + \varepsilon x^1)^2},$$
$$r_2(M) = \sqrt{b^2\Big(1 - \frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2}\Big) + (a - \varepsilon x^1)^2}.$$

Доказательство. Очевидно:

$$\sqrt{b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)+(a+\varepsilon x^1)^2}=\sqrt{b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)+\Big(a+\frac{c}{a}x^1\Big)^2}=$$
$$=\sqrt{b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)+a^2+2cx^1+\frac{c^2}{a^2}(x^1)^2}=$$
$$=\sqrt{b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)+a^2+2cx^1+\frac{a^2+b^2}{a^2}(x^1)^2}=\sqrt{(x^1)^2+2x^1c+c^2+(x^2)^2}=$$
$$=\sqrt{(x^1+c)^2+(x^2)^2}=r_1(M);$$
$$\sqrt{b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)+(a-\varepsilon x^1)^2}=\sqrt{b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)+\Big(a-\frac{c}{a}x^1\Big)^2}=$$
$$=\sqrt{b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)+a^2-2cx^1+\frac{c^2}{a^2}(x^1)^2}=$$
$$=\sqrt{b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)+a^2-2cx^1+\frac{a^2+b^2}{a^2}(x^1)^2}=\sqrt{(x^1)^2-2x^1c+c^2+(x^2)^2}=$$
$$=\sqrt{(x^1-c)^2+(x^2)^2}=r_2(M).\quad\square$$

Утверждение (фокальные свойства гиперболы)**.**

1. *Пусть:* $M\in l$, $x=h_{O,e}(M)$. *Тогда* $r_1(M)=|a+\varepsilon x^1|$.
2. *Пусть:* $M\in E^2$, $x=h_{O,e}(M)$, $r_1(M)=|a+\varepsilon x^1|$. *Тогда* $M\in l$.
3. *Пусть:* $M\in l$, $x=h_{O,e}(M)$. *Тогда* $r_2(M)=|a-\varepsilon x^1|$.
4. *Пусть:* $M\in E^2$, $x=h_{O,e}(M)$, $r_2(M)=|a-\varepsilon x^1|$. *Тогда* $M\in l$.

Доказательство.

1. Так как $M\in l$, то $\frac{(x^1)^2}{a^2}-\frac{(x^2)^2}{b^2}=1$. Тогда:

$$r_1(M)=\sqrt{b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)+(a+\varepsilon x^1)^2}=\sqrt{(a+\varepsilon x^1)^2}=|a+\varepsilon x^1|.$$

2. Очевидно:

$$r_1(M)=|a+\varepsilon x^1|,$$
$$\sqrt{b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)+(a+\varepsilon x^1)^2}=|a+\varepsilon x^1|,$$
$$b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)+(a+\varepsilon x^1)^2=(a+\varepsilon x^1)^2,$$
$$b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)=0,$$
$$\frac{(x^1)^2}{a^2}-\frac{(x^2)^2}{b^2}=1.$$

Тогда $M\in l$.

3. Так как $M\in l$, то $\frac{(x^1)^2}{a^2}-\frac{(x^2)^2}{b^2}=1$. Тогда:

$$r_2(M)=\sqrt{b^2\Big(1-\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}\Big)+(a-\varepsilon x^1)^2}=\sqrt{(a-\varepsilon x^1)^2}=|a-\varepsilon x^1|.$$

4. Очевидно:

$$
\begin{gathered}
r_2(M) = |a - \varepsilon x^1|,\\
\sqrt{b^2\Big(1 - \frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2}\Big) + (a - \varepsilon x^1)^2} = |a - \varepsilon x^1|,\\
b^2\Big(1 - \frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2}\Big) + (a - \varepsilon x^1)^2 = (a - \varepsilon x^1)^2,\\
b^2\Big(1 - \frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2}\Big) = 0,\\
\frac{(x^1)^2}{a^2} - \frac{(x^2)^2}{b^2} = 1.
\end{gathered}
$$

Тогда $M \in l$. □

Замечание. Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$, $x^1 > -a$. Тогда $x^1 \geqslant a$. Так как: $a > 0$, $\varepsilon > 1$, то $a + \varepsilon x^1 > 2a$. Так как: $a + \varepsilon x^1 > 0$, $x^1 > 0$, то $\operatorname{sgn}(a + \varepsilon x^1) = \operatorname{sgn}(x^1)$.

Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$, $x^1 < a$. Тогда $x^1 \leqslant -a$. Так как: $a > 0$, $\varepsilon > 1$, то $a + \varepsilon x^1 < 0$. Так как $x^1 < 0$, то $\operatorname{sgn}(a + \varepsilon x^1) = \operatorname{sgn}(x^1)$.

Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r_1(M) = \pm(a + \varepsilon x^1)$. Тогда $\big|r_1(M)\big| = |a + \varepsilon x^1|$. Так как $r_1(M) \geqslant 0$, то $r_1(M) = |a + \varepsilon x^1|$.

Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$, $x^1 > -a$. Тогда $x^1 \geqslant a$. Так как: $a > 0$, $\varepsilon > 1$, то $a - \varepsilon x^1 < 0$. Так как $x^1 > 0$, то $\operatorname{sgn}(a - \varepsilon x^1) = -\operatorname{sgn}(x^1)$.

Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$, $x^1 < a$. Тогда $x^1 \leqslant -a$. Так как: $a > 0$, $\varepsilon > 1$, то $a - \varepsilon x^1 > 2a$. Так как: $a - \varepsilon x^1 > 0$, $x^1 < 0$, то $\operatorname{sgn}(a - \varepsilon x^1) = -\operatorname{sgn}(x^1)$.

Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r_2(M) = \pm(a - \varepsilon x^1)$. Тогда $\big|r_2(M)\big| = |a - \varepsilon x^1|$. Так как $r_2(M) \geqslant 0$, то $r_2(M) = |a - \varepsilon x^1|$.

Замечание (фокальные свойства гиперболы). Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$, $x^1 > -a$. Тогда: $r_1(M) = |a + \varepsilon x^1|$, $a + \varepsilon x^1 > 0$, $x^1 > 0$. Следовательно: $r_1(M) = a + \varepsilon x^1$, $x^1 > 0$. Тогда $r_1(M) = \operatorname{sgn}(x^1)(a + \varepsilon x^1)$.

Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$, $x^1 < a$. Тогда: $r_1(M) = |a + \varepsilon x^1|$, $a + \varepsilon x^1 < 0$, $x^1 < 0$. Следовательно: $r_1(M) = -(a + \varepsilon x^1)$, $x^1 < 0$. Тогда $r_1(M) = \operatorname{sgn}(x^1)(a + \varepsilon x^1)$.

Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r_1(M) = a + \varepsilon x^1$. Тогда $r_1(M) = |a + \varepsilon x^1|$. Следовательно, $M \in l$. Предположим, что $x^1 < a$. Так как $M \in l$, то $a + \varepsilon x^1 < 0$. Так как: $r_1(M) = a + \varepsilon x^1$, $r_1(M) \geqslant 0$, то $a + \varepsilon x^1 \geqslant 0$. Итак, $x^1 \geqslant a$.

Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r_1(M) = -(a + \varepsilon x^1)$. Тогда $r_1(M) = |a + \varepsilon x^1|$. Следовательно, $M \in l$. Предположим, что $x^1 > -a$. Так как $M \in l$, то $a + \varepsilon x^1 > 0$. Так как: $r_1(M) = -(a + \varepsilon x^1)$, $r_1(M) \geqslant 0$, то $a + \varepsilon x^1 \leqslant 0$. Итак, $x^1 \leqslant -a$.

Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$, $x^1 > -a$. Тогда: $r_2(M) = |a - \varepsilon x^1|$, $a - \varepsilon x^1 < 0$, $x^1 > 0$. Следовательно: $r_2(M) = -(a - \varepsilon x^1)$, $x^1 > 0$. Тогда $r_2(M) = -\operatorname{sgn}(x^1)(a - \varepsilon x^1)$.

Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$, $x^1 < a$. Тогда: $r_2(M) = |a - \varepsilon x^1|$, $a - \varepsilon x^1 > 0$, $x^1 < 0$. Следовательно: $r_2(M) = a - \varepsilon x^1$, $x^1 < 0$. Тогда $r_2(M) = -\operatorname{sgn}(x^1)(a - \varepsilon x^1)$.

Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r_2(M) = -(a - \varepsilon x^1)$. Тогда $r_2(M) = |a - \varepsilon x^1|$. Следовательно, $M \in l$. Предположим, что $x^1 < a$. Так как $M \in l$, то $a - \varepsilon x^1 > 0$. Так как: $r_2(M) = -(a - \varepsilon x^1)$, $r_2(M) \geqslant 0$, то $a - \varepsilon x^1 \leqslant 0$. Итак, $x^1 \geqslant a$.

Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r_2(M) = a - \varepsilon x^1$. Тогда $r_2(M) = |a - \varepsilon x^1|$. Следовательно, $M \in l$. Предположим, что $x^1 > -a$. Так как $M \in l$, то $a - \varepsilon x^1 < 0$. Так как: $r_2(M) = a - \varepsilon x^1$, $r_1(M) \geqslant 0$, то $a + \varepsilon x^1 \geqslant 0$. Итак, $x^1 \leqslant -a$.

Утверждение (фокальные свойства гиперболы)**.**

1. *Пусть* $M \in l$*. Тогда* $\bigl|r_1(M) - r_2(M)\bigr| = 2a$*.*
2. *Пусть:* $M \in E^2$*,* $\bigl|r_1(M) - r_2(M)\bigr| = 2a$*. Тогда* $M \in l$*.*

Доказательство.

1. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Так как $M \in l$, то: $r_1(M) = \operatorname{sgn}(x^1)(a + \varepsilon x^1)$, $r_2(M) = -\operatorname{sgn}(x^1)(a - \varepsilon x^1)$, $x^1 \neq 0$. Так как $a > 0$, то: $\bigl|r_1(M) - r_2(M)\bigr| = |2\operatorname{sgn}(x^1)a| = 2a$.

2. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Очевидно:

$$\bigl(r_1(M)\bigr)^2 = (x^1 + c)^2 + (x^2)^2 = (x^1)^2 + 2x^1c + c^2 + (x^2)^2,$$
$$\bigl(r_2(M)\bigr)^2 = (x^1 - c)^2 + (x^2)^2 = (x^1)^2 - 2x^1c + c^2 + (x^2)^2.$$

Тогда $\bigl(r_1(M)\bigr)^2 - \bigl(r_2(M)\bigr)^2 = 4x^1c$. Следовательно:

$$\bigl(r_1(M) - r_2(M)\bigr)\bigl(r_1(M) + r_2(M)\bigr) = \bigl(r_1(M)\bigr)^2 - \bigl(r_2(M)\bigr)^2 = 4x^1c.$$

Пусть $x^1 \geqslant 0$. Так как: $c > 0$, $r_1(M) + r_2(M) > 0$, то $r_1(M) - r_2(M) \geqslant 0$. Так как $\bigl|r_1(M) - r_2(M)\bigr| = 2a$, то $r_1(M) - r_2(M) = 2a$. Тогда:

$$r_1(M) + r_2(M) = \frac{1}{2a}4x^1c = 2\varepsilon x^1.$$

Так как $r_1(M) - r_2(M) = 2a$, то $r_1(M) = a + \varepsilon x^1$. Тогда $M \in l$.

Пусть $x^1 < 0$. Так как: $c > 0$, $r_1(M) + r_2(M) > 0$, то $r_1(M) - r_2(M) < 0$. Так как $\bigl|r_1(M) - r_2(M)\bigr| = 2a$, то $r_1(M) - r_2(M) = -2a$. Тогда:

$$r_1(M) + r_2(M) = \frac{1}{-2a}4x^1c = -2\varepsilon x^1.$$

Так как $r_1(M) - r_2(M) = -2a$, то $r_1(M) = -(a + \varepsilon x^1)$. Тогда $M \in l$. □

Пусть: $D_1 \subseteq E^2$, $h_{O,e}[D_1]$ — множество всех решений уравнения: $x^1 = -\frac{a}{\varepsilon}$, $x \in \mathbb{R}^2$; $D_2 \subseteq E^2$, $h_{O,e}[D_2]$ — множество всех решений уравнения: $x^1 = \frac{a}{\varepsilon}$, $x \in \mathbb{R}^2$. Тогда: D_1, D_2 — прямые в пространстве E^2, O, F_1, $F_2 \notin D_1$, O, F_1, $F_2 \notin D_2$, $D_1 \cap l = \varnothing$, $D_2 \cap l = \varnothing$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$. Будем говорить, что D_1, D_2 — директрисы гиперболы l.

Пусть $M \in E^2$. Обозначим: $d_1(M) = \rho(M, D_1)$, $d_2(M) = \rho(M, D_2)$. Тогда $d_1(M), d_2(M) \in [0, +\infty)$. Пусть $x = h_{O,e}(M)$. Тогда: $d_1(M) = |x^1 + \frac{a}{\varepsilon}|$, $d_1(M) = |x^1 - \frac{a}{\varepsilon}|$.

Утверждение (фокально-директориальные свойства гиперболы)**.**

1. *Пусть* $M \in l$*. Тогда* $r_1(M) = \varepsilon d_1(M)$*.*
2. *Пусть:* $M \in E^2$*,* $r_1(M) = \varepsilon d_1(M)$*. Тогда* $M \in l$*.*
3. *Пусть* $M \in l$*. Тогда* $r_2(M) = \varepsilon d_2(M)$*.*
4. *Пусть:* $M \in E^2$*,* $r_2(M) = \varepsilon d_2(M)$*. Тогда* $M \in l$*.*

Доказательство.

1. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Так как $M \in l$, то:

$$r_1(M) = |a + \varepsilon x^1| = \varepsilon\Bigl|x^1 + \frac{a}{\varepsilon}\Bigr| = \varepsilon d_1(M).$$

2. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Очевидно:

$$r_1(M) = \varepsilon d_1(M) = \varepsilon\left|x^1 + \frac{a}{\varepsilon}\right| = |a + \varepsilon x^1|.$$

Тогда $M \in l$.

3. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Так как $M \in l$, то:

$$r_2(M) = |a - \varepsilon x^1| = \varepsilon\left|x^1 - \frac{a}{\varepsilon}\right| = \varepsilon d_1(M).$$

4. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Очевидно:

$$r_1(M) = \varepsilon d_1(M) = \varepsilon\left|x^1 - \frac{a}{\varepsilon}\right| = |a - \varepsilon x^1|.$$

Тогда $M \in l$. □

Определение (нормальный вектор к гиперболе, касательный вектор к гиперболе, касательная прямая к гиперболе). Пусть: $M_0 \in l$, $x_0 = h_{O,e}(M_0)$.

Обозначим, $N_*(M_0) = \frac{x_0^1}{a^2}e_1 - \frac{x_0^2}{b^2}e_2$. Тогда: $N_*(M_0) \in \vec{E}^2$, $N_*(M_0) \neq \theta$. Будем говорить, что N — нормальный вектор к гиперболе l в точке M_0, если $N \in L\big(N_*(M_0)\big)$.

Обозначим, $\tau_*(M_0) = \frac{x_0^2}{b^2}e_1 + \frac{x_0^1}{a^2}e_2$. Тогда: $\tau_*(M_0) \in \vec{E}^2$, $\tau_*(M_0) \perp N_*(M_0)$, $\tau_*(M_0) \neq \theta$. Будем говорить, что τ — касательный вектор к гиперболе l в точке M_0, если $\tau \in L\big(\tau_*(M_0)\big)$.

Обозначим через $l_*(M_0)$ прямую, удовлетворяющую условиям: $l_*(M_0)$ — прямая в пространстве E^2, $M_0 \in l_*(M_0)$, $N_*(M_0)$ — нормальный вектор к прямой $l_*(M_0)$. Будем говорить, что $l_*(M_0)$ — касательная прямая к гиперболе l в точке M_0.

Утверждение. *Пусть $\psi\colon \mathbb{R} \to l$. Обозначим: $\psi_1(t) = \overrightarrow{O\psi(t)}$ при $t \in \mathrm{D}(\psi)$; $\psi_2(t) = h_{O,e}\big(\psi(t)\big)$ при $t \in \mathrm{D}(\psi)$.*

Пусть: $t_0 \in \mathbb{R}$, ψ_1 — дифференцируемая функция в точке t_0. Обозначим: $M_0 = \psi(t_0)$, $x_0 = \psi_2(t_0)$. Тогда: $\dot\psi_1(t_0) \perp N_*(M_0)$, $\dot\psi_1(t_0)$ — касательный вектор к гиперболе l в точке M_0.

Доказательство. Пусть $t \in \mathrm{D}(\psi)$. Тогда $\psi(t) \in l$. Следовательно:

$$\frac{\big(\psi_2^1(t)\big)^2}{a^2} - \frac{\big(\psi_2^2(t)\big)^2}{b^2} = 1.$$

Так как ψ_1 — дифференцируемая функция в точке t_0, то:

$$\frac{2\psi_2^1(t_0)\dot\psi_2^1(t_0)}{a^2} - \frac{2\psi_2^2(t_0)\dot\psi_2^2(t_0)}{b^2} = 0,$$
$$\frac{x_0^1}{a^2}\dot\psi_2^1(t_0) - \frac{x_0^2}{b^2}\dot\psi_2^2(t_0) = 0,$$
$$\big(N_*(M_0), \dot\psi_1(t_0)\big) = 0.$$

Так как: $N_*(M_0) \neq \theta$, $\tau_*(M_0) \perp N_*(M_0)$, то $\tau_*(M_0)$, $\dot\psi_1(t_0)$ — линейно зависимые векторы. Так как $\tau_*(M_0) \neq \theta$, то $\dot\psi_1(t_0) \in L\big(\tau_*(M_0)\big)$. □

Замечание (уравнение касательной прямой к гиперболе). Пусть: $M_0 \in l$, $x_0 = h_{O,e}(M_0)$. Тогда $\frac{(x_0^1)^2}{a^2} - \frac{(x_0^2)^2}{b^2} = 1$.

Так как: $l_*(M_0)$ — прямая в пространстве E^2, $M_0 \in l_*(M_0)$, $N_*(M_0)$ — нормальный вектор к прямой $l_*(M_0)$, то $h_{O,e}\big[l_*(M_0)\big]$ — множество решений уравнения:

$$\frac{x_0^1}{a^2}(x^1 - x_0^1) - \frac{x_0^2}{b^2}(x^2 - x_0^2) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2;$$
$$\frac{x_0^1 x^1}{a^2} - \frac{x_0^2 x^2}{b^2} = \frac{(x_0^1)^2}{a^2} - \frac{(x_0^2)^2}{b^2}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Так как $\frac{(x_0^1)^2}{a^2} - \frac{(x_0^2)^2}{b^2} = 1$, то $h_{O,e}\big[l_*(M_0)\big]$ — множество решений уравнения:

$$\frac{x_0^1 x^1}{a^2} - \frac{x_0^2 x^2}{b^2} = 1, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Утверждение (оптическое свойство гиперболы)**.** *Пусть* $M_0 \in l$*. Тогда* $\varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_1M_0}\big) = \varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{M_0F_2}\big)$.

Доказательство. Обозначим, $x_0 = h_{O,e}(M_0)$. Так как $M_0 \in l$, то: $\frac{(x_0^1)^2}{a^2} - \frac{(x_0^2)^2}{b^2} = 1$, $x_0^1 \neq 0$.

Очевидно: $\|\overrightarrow{F_1M_0}\| = \rho(F_1, M_0) = \rho(M_0, F_1) = r_1(M_0)$.

Очевидно, $[\overrightarrow{F_1M_0}](e) = (x_0^1 + c, x_0^2)^T$. Так как $M_0 \in l$, то $r_1(M_0) = \operatorname{sgn}(x_0^1)(a + \varepsilon x_0^1)$. Так как: $\frac{(x_0^1)^2}{a^2} - \frac{(x_0^2)^2}{b^2} = 1$, $x_0^1 \neq 0$, то:

$$\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_1M_0}\big) = \frac{x_0^1}{a^2}(x_0^1 + c) - \frac{x_0^2}{b^2}x_0^2 = \frac{(x_0^1)^2}{a^2} - \frac{(x_0^2)^2}{b^2} + \frac{x_0^1}{a^2}c = 1 + \frac{1}{a}\varepsilon x_0^1 = \frac{1}{a}(a + \varepsilon x_0^1) =$$
$$= \frac{1}{a}\operatorname{sgn}(x_0^1) r_1(M_0).$$

Так как $M_0 \in l$, то $\overrightarrow{F_1M_0} \neq \theta$. Так как $N_*(M_0) \neq \theta$, то:

$$\varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_1M_0}\big) = \arccos\left(\frac{\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_1M_0}\big)}{\big\|N_*(M_0)\big\| \cdot \|\overrightarrow{F_1M_0}\|}\right) = \arccos\left(\frac{\frac{1}{a}\operatorname{sgn}(x_0^1) r_1(M_0)}{\big\|N_*(M_0)\big\| r_1(M_0)}\right) =$$
$$= \arccos\left(\frac{\operatorname{sgn}(x_0^1)}{a\big\|N_*(M_0)\big\|}\right).$$

Очевидно: $\|\overrightarrow{M_0F_2}\| = \rho(M_0, F_2) = r_2(M_0)$.

Очевидно, $[\overrightarrow{M_0F_2}](e) = \big(-(x_0^1 - c), -x_0^2\big)^T$. Так как $M_0 \in l$, то $r_2(M_0) = -\operatorname{sgn}(x_0^1)(a - \varepsilon x_0^1)$. Так как: $\frac{(x_0^1)^2}{a^2} - \frac{(x_0^2)^2}{b^2} = 1$, $x_0^1 \neq 0$, то:

$$\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_2M_0}\big) = \frac{x_0^1}{a^2}\big(-(x_0^1 - c)\big) - \frac{x_0^2}{b^2}(-x_0^2) = -\frac{(x_0^1)^2}{a^2} + \frac{(x_0^2)^2}{b^2} + \frac{x_0^1}{a^2}c =$$
$$= -1 + \frac{1}{a}\varepsilon x_0^1 = -\frac{1}{a}(a - \varepsilon x_0^1) = \frac{1}{a}\operatorname{sgn}(x_0^1) r_2(M_0).$$

Так как $M_0 \in l$, то $\overrightarrow{M_0F_2} \neq \theta$. Так как $N_*(M_0) \neq \theta$, то:

$$\varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{M_0F_2}\big) = \arccos\left(\frac{\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_2M_0}\big)}{\big\|N_*(M_0)\big\| \cdot \|\overrightarrow{F_2M_0}\|}\right) = \arccos\left(\frac{\frac{1}{a}\operatorname{sgn}(x_0^1) r_2(M_0)}{\big\|N_*(M_0)\big\| r_2(M_0)}\right) =$$
$$= \arccos\left(\frac{\operatorname{sgn}(x_0^1)}{a\big\|N_*(M_0)\big\|}\right).$$

Итак: $\varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{F_1M_0}\big) = \arccos\big(\frac{\operatorname{sgn}(x_0^1)}{a|N_*(M_0)|}\big) = \varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{M_0F_2}\big)$. $\square$

13.4. Парабола

Определение. Будем говорить, что l — парабола в пространстве E^2, если: $l \subseteq E^2$; существуют объекты O, e, p, удовлетворяющие условиям: $O \in E^2$, e — правый ортонормированный базис пространства $\vec{E}^2$, $p \in (0, +\infty)$, $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$\begin{gathered}(x^2)^2 = 2px^1,\\ x \in \mathbb{R}^2.\end{gathered}$$

Пусть: $l \subseteq E^2$; $O \in E^2$, e — правый ортонормированный базис пространства $\vec{E}^2$, $p \in (0, +\infty)$, $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$\begin{gathered}(x^2)^2 = 2px^1,\\ x \in \mathbb{R}^2.\end{gathered}$$

Тогда l — парабола в пространстве E^2.

Будем говорить, что $h_{O,e}$ — каноническая система координат для параболы l. Очевидно, $O \in l$. Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$. Тогда $h^{-1}_{O,e}(x^1, -x^2) \in l$.

Утверждение. *Справедливо утверждение: $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:*

$$\begin{gathered}|x^2| = \sqrt{2px^1},\\ x \in \mathbb{R}^2,\ x^1 \geqslant 0.\end{gathered}$$

Справедливо утверждение: $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений уравнения:

$$\begin{gathered}x^1 = \frac{1}{2p}(x^2)^2,\\ x \in \mathbb{R}^2.\end{gathered}$$

Обозначим, $\varepsilon = 1$. Будем говорить, что ε — эксцентриситет параболы l.

Обозначим, $F = h^{-1}_{O,e}(p/2, 0)$. Тогда: $F \in E^2$, $F \neq O$, $F \notin l$. Будем говорить, что F — фокус параболы l.

Пусть $M \in E^2$. Обозначим, $r(M) = \rho(M, F)$. Тогда $r(M) \in [0, +\infty)$. Пусть $x = h_{O,e}(M)$. Тогда $r(M) = \sqrt{(x^1 - p/2)^2 + (x^2)^2}$.

Замечание. Пусть $M \in l$. Так как $F \notin l$, то $M \neq F$. Тогда: $\overrightarrow{FM} \neq \theta$, $r(M) = \rho(M, F) > 0$.

Утверждение. *Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$. Тогда:*

$$r(M) = \sqrt{(x^2)^2 - 2px^1 + (p/2 + x^1)^2}.$$

Доказательство. Очевидно:

$$\begin{gathered}\sqrt{(x^2)^2 - 2px^1 + (p/2 + x^1)^2} = \sqrt{(x^2)^2 - 2px^1 + p^2/4 + px^1 + (x^1)^2} =\\ = \sqrt{(x^1)^2 - px^1 + p^2/4 + (x^2)^2} = \sqrt{(x^1 - p/2)^2 + (x^2)^2} = r(M). \quad \square\end{gathered}$$

Утверждение (фокальные свойства параболы)**.**

1. *Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$. Тогда $r(M) = |p/2 + x^1|$.*
2. *Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r(M) = |p/2 + x^1|$. Тогда $M \in l$.*

Доказательство.

1. Так как $M \in l$, то $(x^2)^2 = 2px^1$. Тогда:

$$r(M) = \sqrt{(x^2)^2 - 2px^1 + (p/2 + x^1)^2} = \sqrt{(p/2 + x^1)^2} = |p/2 + x^1|.$$

2. Очевидно:

$$\begin{gathered} r(M) = |p/2 + x^1|, \\ \sqrt{(x^2)^2 - 2px^1 + (p/2 + x^1)^2} = |p/2 + x^1|, \\ (x^2)^2 - 2px^1 + (p/2 + x^1)^2 = (p/2 + x^1)^2, \\ (x^2)^2 - 2px^1 = 0, \\ (x^2)^2 = 2px^1. \end{gathered}$$

Тогда $M \in l$. □

Замечание. Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$. Тогда $x^1 \geqslant 0$. Так как $p > 0$, то $p/2 + x^1 > 0$.

Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r(M) = p/2 + x^1$. Тогда $\bigl|r(M)\bigr| = |p/2 + x^1|$. Так как $r(M) \geqslant 0$, то $r(M) = |p/2 + x^1|$.

Замечание (фокальные свойства параболы). Пусть: $M \in l$, $x = h_{O,e}(M)$. Тогда: $r(M) = |p/2 + x^1|$, $p/2 + x^1 > 0$. Следовательно, $r(M) = p/2 + x^1$.

Пусть: $M \in E^2$, $x = h_{O,e}(M)$, $r(M) = p/2 + x^1$. Тогда $r(M) = |p/2 + x^1|$. Следовательно, $M \in l$.

Пусть: $D \subseteq E^2$, $h_{O,e}[D]$ — множество всех решений уравнения: $x^1 = -p/2$, $x \in \mathbb{R}^2$. Тогда: D — прямая в пространстве E^2, O, $F \notin D$, $D \cap l = \varnothing$. Будем говорить, что D — директриса параболы l.

Пусть $M \in E^2$. Обозначим, $d(M) = \rho(M, D)$. Тогда $d(M) \in [0, +\infty)$. Пусть $x = h_{O,e}(M)$. Тогда $d(M) = |x^1 + p/2|$.

Утверждение (фокально-директориальные свойства параболы)**.**

1. *Пусть $M \in l$. Тогда $r(M) = \varepsilon d(M)$.*
2. *Пусть: $M \in E^2$, $r(M) = \varepsilon d(M)$. Тогда $M \in l$.*

Доказательство.

1. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Так как $M \in l$, то:

$$r(M) = |p/2 + x^1| = \varepsilon |x^1 + p/2| = \varepsilon d(M).$$

2. Обозначим, $x = h_{O,e}(M)$. Очевидно:

$$r(M) = \varepsilon d(M) = \varepsilon |x^1 + p/2| = |p/2 + x^1|.$$

Тогда $M \in l$. □

Определение (нормальный вектор к параболе, касательный вектор к параболе, касательная прямая к параболе). Пусть: $M_0 \in l$, $x_0 = h_{O,e}(M_0)$.

Обозначим, $N_*(M_0) = -pe_1 + x_0^2 e_2$. Тогда: $N_*(M_0) \in \vec{E}^2$, $N_*(M_0) \neq \theta$. Будем говорить, что N — нормальный вектор к параболе l в точке M_0, если $N \in L\bigl(N_*(M_0)\bigr)$.

Обозначим, $\tau_*(M_0) = x_0^2 e_1 + pe_2$. Тогда: $\tau_*(M_0) \in \vec{E}^2$, $\tau_*(M_0) \perp N_*(M_0)$, $\tau_*(M_0) \neq \theta$. Будем говорить, что τ — касательный вектор к параболе l в точке M_0, если $\tau \in L\bigl(\tau_*(M_0)\bigr)$.

Обозначим через $l_*(M_0)$ прямую, удовлетворяющую условиям: $l_*(M_0)$ — прямая в пространстве E^2, $M_0 \in l_*(M_0)$, $N_*(M_0)$ — нормальный вектор к прямой $l_*(M_0)$. Будем говорить, что $l_*(M_0)$ — касательная прямая к параболе l в точке M_0.

Утверждение. *Пусть* $\psi\colon \mathbb{R} \to l$. *Обозначим:* $\psi_1(t) = \overrightarrow{O\psi(t)}$ *при* $t \in \mathrm{D}(\psi)$; $\psi_2(t) = h_{O,e}\bigl(\psi(t)\bigr)$ *при* $t \in \mathrm{D}(\psi)$.

Пусть: $t_0 \in \mathbb{R}$, ψ_1 *— дифференцируемая функция в точке* t_0. *Обозначим:* $M_0 = \psi(t_0)$, $x_0 = \psi_2(t_0)$. *Тогда:* $\dot{\psi}_1(t_0) \perp N_*(M_0)$, $\dot{\psi}_1(t_0)$ *— касательный вектор к параболе* l *в точке* M_0.

Доказательство. Пусть $t \in \mathrm{D}(\psi)$. Тогда $\psi(t) \in l$. Следовательно:

$$\bigl(\psi_2^2(t)\bigr)^2 = 2p\psi_2^1(t).$$

Так как ψ_1 — дифференцируемая функция в точке t_0, то:

$$\begin{gathered}
2\psi_2^2(t_0)\dot{\psi}_2^2(t_0) = 2p\dot{\psi}_2^1(t_0),\\
-p\dot{\psi}_2^1(t_0) + x_0^2\dot{\psi}_2^2(t_0) = 0,\\
\bigl(N_*(M_0), \dot{\psi}_1(t_0)\bigr) = 0.
\end{gathered}$$

Так как: $N_*(M_0) \neq \theta$, $\tau_*(M_0) \perp N_*(M_0)$, то $\tau_*(M_0)$, $\dot{\psi}_1(t_0)$ — линейно зависимые векторы. Так как $\tau_*(M_0) \neq \theta$, то $\dot{\psi}_1(t_0) \in L\bigl(\tau_*(M_0)\bigr)$. □

Замечание (уравнение касательной прямой к параболе). Пусть: $M_0 \in l$, $x_0 = h_{O,e}(M_0)$. Тогда $(x_0^2)^2 = 2px_0^1$.

Так как: $l_*(M_0)$ — прямая в пространстве E^2, $M_0 \in l_*(M_0)$, $N_*(M_0)$ — нормальный вектор к прямой $l_*(M_0)$, то $h_{O,e}\bigl[l_*(M_0)\bigr]$ — множество решений уравнения:

$$\begin{gathered}
-p(x^1 - x_0^1) + x_0^2(x^2 - x_0^2) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2;\\
x_0^2 x^2 = p(-x_0^1 + x^1) + (x_0^2)^2, \quad x \in \mathbb{R}^2;\\
x_0^2 x^2 = p(x_0^1 + x^1) + (x_0^2)^2 - 2px_0^1, \quad x \in \mathbb{R}^2.
\end{gathered}$$

Так как $(x_0^2)^2 = 2px_0^1$, то $h_{O,e}\bigl[l_*(M_0)\bigr]$ — множество решений уравнения:

$$x_0^2 x^2 = p(x_0^1 + x^1), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Утверждение (оптическое свойство параболы)**.** *Пусть* $M_0 \in l$. *Тогда* $\varphi\bigl(N_*(M_0), \overrightarrow{FM_0}\bigr) = \varphi\bigl(N_*(M_0), -e_1\bigr)$.

Доказательство. Обозначим, $x_0 = h_{O,e}(M_0)$. Так как $M_0 \in l$, то: $(x_0^2)^2 = 2px_0^1$, $r(M_0) = p/2 + x_0^1$.

Очевидно: $\|\overrightarrow{FM_0}\| = \rho(F, M_0) = \rho(M_0, F) = r(M_0)$.

Очевидно, $[\overrightarrow{FM_0}](e) = (x_0^1 - p/2, x_0^2)^T$. Так как: $(x_0^2)^2 = 2px_0^1$, $r(M_0) = p/2 + x_0^1$, то:

$$\begin{multlined}
\bigl(N_*(M_0), \overrightarrow{FM_0}\bigr) = -p(x_0^1 - p/2) + x_0^2x_0^2 = (x_0^2)^2 + p(p/2 - x_0^1) = (x_0^2)^2 - 2px_0^1 + p(p/2 + x_0^1) =\\
= pr(M_0).
\end{multlined}$$

Так как $M_0 \in l$, то $\overrightarrow{FM_0} \neq \theta$. Так как $N_*(M_0) \neq \theta$, то:

$$\varphi\bigl(N_*(M_0), \overrightarrow{FM_0}\bigr) = \arccos\left(\frac{\bigl(N_*(M_0), \overrightarrow{FM_0}\bigr)}{\bigl\|N_*(M_0)\bigr\| \cdot \|\overrightarrow{FM_0}\|}\right) = \arccos\left(\frac{pr(M_0)}{\bigl\|N_*(M_0)\bigr\| r(M_0)}\right) =$$

$$= \arccos\left(\frac{p}{\|N_*(M_0)\|}\right).$$

Очевидно: $\|-e_1\| = \|e_1\| = 1$.
Очевидно, $[-e_1](e) = (-1, 0)^T$. Тогда:

$$\big(N_*(M_0), -e_1\big) = -p(-1) + x_0^2 0 = p.$$

Так как: $N_*(M_0) \neq \theta$, $-e_1 \neq \theta$, то:

$$\varphi\big(N_*(M_0), -e_1\big) = \arccos\left(\frac{\big(N_*(M_0), -e_1\big)}{\|N_*(M_0)\| \cdot \|-e_1\|}\right) = \arccos\left(\frac{p}{\|N_*(M_0)\|}\right).$$

Итак: $\varphi\big(N_*(M_0), \overrightarrow{FM_0}\big) = \arccos\big(\frac{p}{|N_*(M_0)|}\big) = \varphi\big(N_*(M_0), -e_1\big)$. $\square$

Лекция 14. Поверхности второго порядка

Определение. Будем говорить, что σ — поверхность второго порядка в пространстве E^3, если: $\sigma \subseteq E^3$; существуют объекты O, e, A, B, C, удовлетворяющие условиям: $O \in E^3$, e — базис пространства $\vec{E}^3$, $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $A^T = A$, $A \neq \Theta$, $B \in \mathbb{R}^{1\times 3}$, $C \in \mathbb{R}$, $h_{O,e}[\sigma]$ — множество всех решений уравнения:

$$A_{k,m}x^k x^m + 2B_m x^m + C = 0,$$
$$x \in \mathbb{R}^3.$$

Утверждение (БЕЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА). *Пусть σ — поверхность второго порядка в пространстве E^3. Тогда σ является одним из следующих множеств.*

1. *Эллипсоид.*
2. *Множество, состоящее из одной точки.*
3. *Пустое множество.*
4. *Однополостный гиперболоид.*
5. *Конус второго порядка.*
6. *Двуполостный гиперболоид.*
7. *Эллиптический параболоид.*
8. *Гиперболический параболоид.*
9. *Эллиптический цилиндр.*
10. *Прямая.*
11. *Гиперболический цилиндр.*
12. *Объединение двух плоскостей, пересекающихся по прямой.*
13. *Параболический цилиндр.*
14. *Объединение двух плоскостей, не имеющих общих точек.*
15. *Плоскость.*

Замечание.

1. Будем говорить, что σ — эллипсоид в пространстве E^3, если: $\sigma \subseteq E^3$; существуют объекты O, e, a, b, c, удовлетворяющие условиям: $O \in E^3$, e — правый ортонормированный базис пространства $\vec{E}^3$, a, b, $c \in \mathbb{R}$, $0 < c \leqslant b \leqslant a$, $h_{O,e}[\sigma]$ — множество всех решений уравнения:

$$\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} + \frac{(x^3)^2}{c^2} = 1,$$
$$x \in \mathbb{R}^3.$$

2. Будем говорить, что σ — однополостный гиперболоид в пространстве E^3, если: $\sigma \subseteq E^3$; существуют объекты O, e, a, b, c, удовлетворяющие условиям: $O \in E^3$, e — правый ортонормированный базис пространства $\vec{E}^3$, a, $b \in \mathbb{R}$, $0 < b \leqslant a$, $c \in (0, +\infty)$, $h_{O,e}[\sigma]$ — множество всех решений уравнения:

$$\frac{(x^1)^2}{a^2} + \frac{(x^2)^2}{b^2} - \frac{(x^3)^2}{c^2} = 1,$$
$$x \in \mathbb{R}^3.$$

3. Будем говорить, что σ — конус второго порядка в пространстве E^3, если: $\sigma \subseteq E^3$; существуют объекты O, e, a, b, c, удовлетворяющие условиям: $O \in E^3$, e — правый ортонормированный базис пространства $\vec{E}^3$, a, $b \in \mathbb{R}$, $0 < b \leqslant a$, $c \in (0, +\infty)$, $h_{O,e}[\sigma]$ —

множество всех решений уравнения:

$$\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}-\frac{(x^3)^2}{c^2}=0,$$
$$x\in\mathbb{R}^3.$$

4. Будем говорить, что σ — двуполостный гиперболоид в пространстве E^3, если: $\sigma\subseteq E^3$; существуют объекты O, e, a, b, c, удовлетворяющие условиям: $O\in E^3$, e — правый ортонормированный базис пространства $\vec{E}^3$, a, $b\in\mathbb{R}$, $0<b\leqslant a$, $c\in(0,+\infty)$, $h_{O,e}[\sigma]$ — множество всех решений уравнения:

$$\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}-\frac{(x^3)^2}{c^2}=-1,$$
$$x\in\mathbb{R}^3.$$

5. Будем говорить, что σ — эллиптический параболоид в пространстве E^3, если: $\sigma\subseteq E^3$; существуют объекты O, e, a, b, удовлетворяющие условиям: $O\in E^3$, e — правый ортонормированный базис пространства $\vec{E}^3$, a, $b\in\mathbb{R}$, $0<b\leqslant a$, $h_{O,e}[\sigma]$ — множество всех решений уравнения:

$$x^3=\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2},$$
$$x\in\mathbb{R}^3.$$

6. Будем говорить, что σ — гиперболический параболоид в пространстве E^3, если: $\sigma\subseteq E^3$; существуют объекты O, e, a, b, удовлетворяющие условиям: $O\in E^3$, e — правый ортонормированный базис пространства $\vec{E}^3$, a, $b\in(0,+\infty)$, $h_{O,e}[\sigma]$ — множество всех решений уравнения:

$$x^3=\frac{(x^1)^2}{a^2}-\frac{(x^2)^2}{b^2},$$
$$x\in\mathbb{R}^3.$$

Теорема. *Пусть: σ — однополостный гиперболоид в пространстве E^3, $P_0\in\sigma$. Существуют существуют прямые l_1, l_2, удовлетворяющие условиям:*

1. l_1 — прямая в пространстве E^3, $P_0\in l_1$, $l_1\subseteq\sigma$; l_2 — прямая в пространстве E^3, $P_0\in l_2$, $l_2\subseteq\sigma$; $l_1\neq l_2$;

2. для любой прямой l, удовлетворяющей условиям: l — прямая в пространстве E^3, $P_0\in l$, $l\subseteq\sigma$, справедливо утверждение: $l=l_1\vee l=l_2$.

Доказательство. Так как σ — однополостный гиперболоид в пространстве E^3, то: $\sigma\subseteq E^3$; существуют объекты O, e, a, b, c, удовлетворяющие условиям: $O\in E^3$, e — ортонормированный базис пространства $\vec{E}^3$, a, b, $c\in(0,+\infty)$, $h_{O,e}[\sigma]$ — множество всех решений уравнения:

$$\frac{(x^1)^2}{a^2}+\frac{(x^2)^2}{b^2}-\frac{(x^3)^2}{c^2}=1,$$
$$x\in\mathbb{R}^3.$$

Обозначим, $x_0=h_{O,e}(P_0)$. Так как $P_0\in\sigma$, то $x_0\in h_{O,e}[\sigma]$. Тогда:

$$\frac{(x_0^1)^2}{a^2}+\frac{(x_0^2)^2}{b^2}-\frac{(x_0^3)^2}{c^2}=1,$$

$$x_0 \in \mathbb{R}^3.$$

Тогда $x_0^1 \neq 0 \vee x_0^2 \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $x_0^1 \neq 0$.

Пусть: l — прямая в пространстве E^3, $P_0 \in l$. Пусть τ — направляющий вектор прямой l. Тогда: $\tau \in \vec{E}^3$, $\tau \neq \theta$. Обозначим, $y = [\tau](e)$. Тогда: $y \in \mathbb{R}^3$, $y \neq \tilde{\theta}$. Очевидно, $h_{O,e}[l]$ — множество всех решений параметрического уравнения:

$$\exists t \in \mathbb{R}(x = x_0 + ty).$$

Запишем необходимые и достаточные условия того, что $l \subseteq \sigma$:

$$h_{O,e}[l] \subseteq h_{O,e}[\sigma];$$
$$x_0 + ty \in h_{O,e}[\sigma], \quad t \in \mathbb{R};$$
$$\frac{(x_0^1 + ty^1)^2}{a^2} + \frac{(x_0^2 + ty^2)^2}{b^2} - \frac{(x_0^3 + ty^3)^2}{c^2} = 1, \quad t \in \mathbb{R};$$
$$\frac{(x_0^1)^2}{a^2} + \frac{(x_0^2)^2}{b^2} - \frac{(x_0^3)^2}{c^2} + 2\Big(\frac{x_0^1}{a^2}y^1 + \frac{x_0^2}{b^2}y^2 - \frac{x_0^3}{c^2}y^3\Big)t + \Big(\frac{(y^1)^2}{a^2} + \frac{(y^2)^2}{b^2} - \frac{(y^3)^2}{c^2}\Big)t^2 = 1, \quad t \in \mathbb{R};$$
$$2\Big(\frac{x_0^1}{a^2}y^1 + \frac{x_0^2}{b^2}y^2 - \frac{x_0^3}{c^2}y^3\Big)t + \Big(\frac{(y^1)^2}{a^2} + \frac{(y^2)^2}{b^2} - \frac{(y^3)^2}{c^2}\Big)t^2 = 0, \quad t \in \mathbb{R};$$
$$\begin{cases} \dfrac{x_0^1}{a^2}y^1 + \dfrac{x_0^2}{b^2}y^2 - \dfrac{x_0^3}{c^2}y^3 = 0, \\ \dfrac{1}{a^2}(y^1)^2 + \dfrac{1}{b^2}(y^2)^2 - \dfrac{1}{c^2}(y^3)^2 = 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} y^1 = -\dfrac{a^2}{x_0^1}\Big(\dfrac{x_0^2}{b^2}y^2 - \dfrac{x_0^3}{c^2}y^3\Big), \\ \dfrac{a^2}{(x_0^1)^2}\Big(\dfrac{x_0^2}{b^2}y^2 - \dfrac{x_0^3}{c^2}y^3\Big)^2 + \dfrac{1}{b^2}(y^2)^2 - \dfrac{1}{c^2}(y^3)^2 = 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} y^1 = -\dfrac{a^2}{x_0^1}\Big(\dfrac{x_0^2}{b^2}y^2 - \dfrac{x_0^3}{c^2}y^3\Big), \\ \Big(\dfrac{x_0^2}{b^2}y^2 - \dfrac{x_0^3}{c^2}y^3\Big)^2 + \dfrac{(x_0^1)^2}{a^2b^2}(y^2)^2 - \dfrac{(x_0^1)^2}{a^2c^2}(y^3)^2 = 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} y^1 = -\dfrac{a^2}{x_0^1}\Big(\dfrac{x_0^2}{b^2}y^2 - \dfrac{x_0^3}{c^2}y^3\Big), \\ \dfrac{1}{b^2}\Big(\dfrac{(x_0^1)^2}{a^2} + \dfrac{(x_0^2)^2}{b^2}\Big)(y^2)^2 - \dfrac{2x_0^2x_0^3}{b^2c^2}y^2y^3 - \dfrac{1}{c^2}\Big(\dfrac{(x_0^1)^2}{a^2} - \dfrac{(x_0^3)^2}{c^2}\Big)(y^3)^2 = 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} y^1 = -\dfrac{a^2}{x_0^1}\Big(\dfrac{x_0^2}{b^2}y^2 - \dfrac{x_0^3}{c^2}y^3\Big), \\ \dfrac{1}{b^2}\Big(1 + \dfrac{(x_0^3)^2}{c^2}\Big)(y^2)^2 - \dfrac{2x_0^2x_0^3}{b^2c^2}y^2y^3 - \dfrac{1}{c^2}\Big(1 - \dfrac{(x_0^2)^2}{b^2}\Big)(y^3)^2 = 0. \end{cases}$$

Обозначим через Q_1 множество всех прямых l, удовлетворяющих условиям: l — прямая в пространстве E^3, $P_0 \in l$, $l \subseteq \sigma$. Обозначим через Q_2 множество всех векторов τ, удовлетворяющих условиям: существует прямая l, удовлетворяющая условиям: $l \in Q_1$, τ — направляющий вектор прямой l. Обозначим через Q_3 множество всех столбцов y, удовлетворяющих условиям: существует вектор τ, удовлетворяющий условиям: $\tau \in Q_2$,

$y = [\tau](e)$. Очевидно, Q_3 — множество всех решений уравнения:

$$\left\{\begin{array}{c} y^1 = -\dfrac{a^2}{x_0^1}\Big(\dfrac{x_0^2}{b^2}y^2 - \dfrac{x_0^3}{c^2}y^3\Big), \\ \dfrac{1}{b^2}\Big(1 + \dfrac{(x_0^3)^2}{c^2}\Big)(y^2)^2 - \dfrac{2x_0^2x_0^3}{b^2c^2}y^2y^3 - \dfrac{1}{c^2}\Big(1 - \dfrac{(x_0^2)^2}{b^2}\Big)(y^3)^2 = 0, \\ y \in \mathbb{R}^3, \quad y \neq \tilde{\theta}; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} y^1 = -\dfrac{a^2}{x_0^1}\Big(\dfrac{x_0^2}{b^2}y^2 - \dfrac{x_0^3}{c^2}y^3\Big), \\ \dfrac{1}{b^2}\Big(1 + \dfrac{(x_0^3)^2}{c^2}\Big)(y^2)^2 - \dfrac{2x_0^2x_0^3}{b^2c^2}y^2y^3 - \dfrac{1}{c^2}\Big(1 - \dfrac{(x_0^2)^2}{b^2}\Big)(y^3)^2 = 0, \\ y^2,\, y^3 \in \mathbb{R}, \quad y^3 \neq 0. \end{array}\right.$$

Сделаем замену: $\alpha = \frac{y^2}{y^3}$, $\beta = y^3$, $y^2, y^3 \in \mathbb{R}$, $y^3 \neq 0$; $y^2 = \alpha\beta$, $y^3 = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$. Тогда:

$$\left\{\begin{array}{c} y^2 = \alpha\beta, \quad y^3 = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \beta \neq 0, \\ y^1 = -\dfrac{a^2}{x_0^1}\Big(\dfrac{x_0^2}{b^2}\alpha - \dfrac{x_0^3}{c^2}\Big)\beta, \\ \dfrac{1}{b^2}\Big(1 + \dfrac{(x_0^3)^2}{c^2}\Big)\alpha^2 - \dfrac{2x_0^2x_0^3}{b^2c^2}\alpha - \dfrac{1}{c^2}\Big(1 - \dfrac{(x_0^2)^2}{b^2}\Big) = 0; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \beta \neq 0, \\ y = \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{x_0^1}\Big(\frac{x_0^2}{b^2}\alpha - \frac{x_0^3}{c^2}\Big) \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}\beta, \\ \dfrac{1}{b^2}\Big(1 + \dfrac{(x_0^3)^2}{c^2}\Big)\alpha^2 - \dfrac{2x_0^2x_0^3}{b^2c^2}\alpha - \dfrac{1}{c^2}\Big(1 - \dfrac{(x_0^2)^2}{b^2}\Big) = 0. \end{array}\right.$$

Обозначим через D дискриминант полученного квадратного уравнения. Тогда:

$$\begin{gathered} D = \Big(\frac{2x_0^2x_0^3}{b^2c^2}\Big)^2 + \frac{4}{b^2c^2}\Big(1 + \frac{(x_0^3)^2}{c^2}\Big)\Big(1 - \frac{(x_0^2)^2}{b^2}\Big) = \\ = \frac{4}{b^2c^2}\frac{(x_0^2)^2(x_0^3)^2}{b^2c^2} + \frac{4}{b^2c^2}\Big(1 - \frac{(x_0^2)^2}{b^2} + \frac{(x_0^3)^2}{c^2} - \frac{(x_0^2)^2(x_0^3)^2}{b^2c^2}\Big) = \\ = \frac{4}{b^2c^2}\Big(1 - \frac{(x_0^2)^2}{b^2} + \frac{(x_0^3)^2}{c^2}\Big) = \frac{4(x_0^1)^2}{a^2b^2c^2} > 0. \end{gathered}$$

Следовательно, существуют такие числа α_1, α_2, что: α_1, α_2 — все различные решения полученного квадратного уравнения. Обозначим:

$$y_1 = \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{x_0^1}\Big(\frac{x_0^2}{b^2}\alpha_1 - \frac{x_0^3}{c^2}\Big) \\ \alpha_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_1 = \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{x_0^1}\Big(\frac{x_0^2}{b^2}\alpha_2 - \frac{x_0^3}{c^2}\Big) \\ \alpha_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда: y_1, $y_2 \in \mathbb{R}^3$, y_1, y_2 — линейно независимые столбцы. Очевидно, необходимые и достаточные условия того, что $l \subseteq \sigma$ можно записать в виде:

$$\left\{\begin{array}{l} \beta \in \mathbb{R}, \quad \beta \neq 0, \\ y = y_1\beta \vee y = y_2\beta. \end{array}\right.$$

Обозначим: $\tau_1 = U_e(y_1)$, $\tau_2 = U_e(y_2)$. Тогда: $\tau_1, \tau_2 \in \vec{Q}$, τ_1, τ_2 — линейно независимые векторы. Очевидно, необходимые и достаточные условия того, что $l \subseteq \sigma$ можно записать в виде:

$$\begin{cases} \beta \in \mathbb{R}, \quad \beta \neq 0, \\ \tau = \tau_1\beta \vee \tau = \tau_2\beta. \end{cases}$$

Пусть: l_1 — прямая в пространстве Q, $P_0 \in l_1$, τ_1 — направляющий вектор прямой l_1, l_2 — прямая в пространстве Q, $P_0 \in l_2$, τ_2 — направляющий вектор прямой l_2. Тогда: $l_1 \subseteq \sigma$, $l_2 \subseteq \sigma$, $l_1 \neq l_2$.

Пусть: l — прямая в пространстве Q, $P_0 \in l$, $l \subseteq \sigma$. Пусть τ — направляющий вектор прямой l. Тогда существует такое число β, что: $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, $\tau = \tau_1\beta \vee \tau = \tau_2\beta$. Следовательно, $l = l_1 \vee l = l_2$. $\square$

Теорема. *Пусть: Q — аффинное евклидово пространство над полем $\mathbb{R}$, $\dim(Q) = 3$, Q — ориентированное пространство; σ — гиперболический параболоид в пространстве Q, $P_0 \in \sigma$.*

1. Существуют такие объекты l_1, l_2, что: l_1 — прямая в пространстве Q, $P_0 \in l_1$, $l_1 \subseteq \sigma$, l_2 — прямая в пространстве Q, $P_0 \in l_2$, $l_2 \subseteq \sigma$, $l_1 \neq l_2$.

2. Пусть: l — прямая в пространстве Q, $P_0 \in l$, $l \subseteq \sigma$. Тогда $l = l_1 \vee l = l_2$.

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Крутицкая Н. Ч., Тихонравов А. В., Шишкин А. А.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра с приложениями.

[4] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[5] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия.

[6] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[7] *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии.