3. Метод конечных разностей.

1. Основные понятия.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} L\,u(x) = f(x), \quad x \in D, & (1) \\ l\,u(x) = \mu(x), \quad x \in \Gamma, & (2) \end{cases}$$

где L **- линейный дифференциальный оператор,** l **– оператор дополнительных (начальных, граничных) условий,** $\bar{D} = D + \Gamma,$

$\bar{D}$ **заменяем на** $\bar{\omega}_h$ **- дискретное множество узлов – сетка,**

$u(x),\ x \in \bar{D}$ **заменяем на** $y_h(x_n)$ **- сеточные функции (зависят от параметра** h**),** $x_n \in \bar{\omega}_h$.

$u(x) \in H_0, \;\; y_h(x_n) \in H_h$ **. Пространство *H_0* отображается на пространство *H_h*:** $u(x) \in H_0 \sim u_h(x) = P_h u(x), \quad u_h \in H_h,$
где *P_h* - линейный оператор из *H_0* в *H_h*.

На линейном пространстве *H_h* вводятся сеточные нормы $\|y_h\|_h$
- аналоги норм в пространстве *H_0*.

Условие согласования норм:

$\lim\limits_{h\to 0} \|u_h\|_h = \|u\|_0$, **где** $u_h = P_h u$, $\|u\|_0$ **- норма в пространстве *H_0*.**

Пусть $\phi_h(x) = P_h f(x), \quad x \in \omega_h, \quad \chi_h(x) = P_h \mu(x), \;\; x \in \gamma_h,$
где $\overline{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h, \quad \omega_h$ **- множество внутренних узлов, *γ_h* – множество граничных узлов.**

Перейдем от дифференциальных операторов к разностным: $L \to L_h, \quad l \to l_h.$

Будем говорить, что L_h аппроксимирует L с порядком $m>0$ в точке x, если

$$\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x) = \underline{\underline{O}}(|h|^m). \tag{3}$$

Задаче (1) – (2) ставится в соответствие система алгебраических (разностных) уравнений

$$\begin{cases} L_h y_h(x) = \phi_h(x), & x \in \omega_h, \qquad (4) \\ l_h y_h(x) = \chi_h(x), & x \in \gamma_h. \qquad (5) \end{cases}$$

Семейство уравнений (4), (5), зависящих от параметра *h*, называется разностной схемой.

Пусть $z_h = y_h - u_h$, где $u_h = P_h u$. Так как L_h и l_h - линейные операторы, то получаем задачу:

$$\begin{cases} L_h z_h(x) = \psi_h, \quad x \in \omega_h, & (6) \\ l_h z_h(x) = \nu_h, \quad x \in \gamma_h, & (7) \end{cases}$$

где ψ_h и ν_h - погрешности аппроксимации на решении $u(x)$ разностной схемой уравнения (1) и дополнительного условия (2). Схема (4)- (5):

1) аппроксимирует задачу(1)-(2) и имеет m-й порядок аппроксимации, если

$$\|\psi_h\|_{(2h)} = \underline{\underline{O}}(|h|^m), \quad \|\nu_h\|_{(3h)} = \underline{\underline{O}}(|h|^m); \tag{8}$$

2) сходится и имеет m – й порядок точности, если

$$\|y_h - u_h\|_{(1h)} = \underline{\underline{O}}(|h|^m). \tag{9}$$

Схема (4)-(5) корректна (разностная задача поставлена корректно), если при всех достаточно малых $|h| \le h_0$:

1) разностная задача однозначно разрешима при любых входных данных ϕ_h, χ_h ;

2) решение y_h равномерно по *h* непрерывно зависит от входных данных (свойство устойчивости).

Если L_h и l_h - линейные операторы, то при $|h| \le h_0$

$$\|y_h\|_{(1h)} \le M_1 \|\phi_h\|_{(2h)} + M_2 \|\chi_h\|_{(3h)}, \qquad (10)$$

где $M_1 > 0, M_2 > 0$ - постоянные, не зависящие от *h* и выбора входных данных ϕ_h и χ_h .

Если схема (4)-(5) устойчива, а z_h – решение задачи (6)-(7), то (10) =>

$$\left\|y_h - u_h\right\|_{(1h)} = \left\|z_h\right\|_{(1h)} \le M_1 \left\|\psi_h\right\|_{(2h)} + M_2 \left\|\nu_h\right\|_{(3h)} \qquad (11)$$

Из равенства (11) следует утверждение:

Если линейная схема (4)-(5) устойчива и аппроксимирует задачу (1)-(2) , то она сходится (из устойчивости и аппроксимации линейной схемы следует ее сходимость).

Порядок точности схемы (4)-(5) определяется порядком аппроксимации.

2. Разностная задача для уравнения теплопроводности на отрезке.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \ 0 < x < 1, \ 0 < t \le T, & (12) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le 1, & (13) \\ u(0,t) = \mu_0 \ , \ u(1,t) = \mu_1, \ 0 \le t \le T. & (14) \end{cases}$$

Разностная аппроксимация оператора $Lu = \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

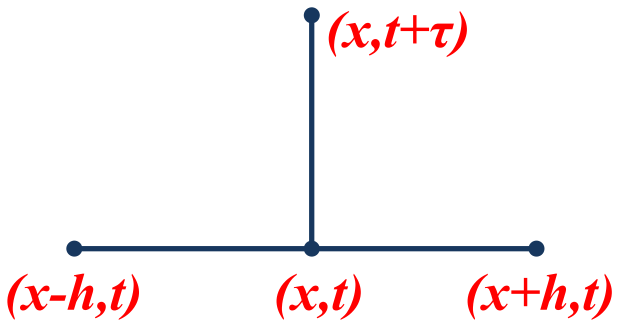
Введем равномерные сетки :

$$\bar{\omega}_h \equiv \{x_n = nh; \quad n = 0,1,\ldots,N; \quad hN = 1\},$$

$$\bar{\omega}_\tau \equiv \{t_s = s\tau; \quad s = 0,1,\ldots,S; \quad \tau S = T\},$$

$$\bar{\omega}_{h\tau} \equiv \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_n, t_s) \in \bar{D}\},$$

$$\bar{D} \equiv \{0 \le x \le 1; \quad 0 \le t \le T\}.$$



Назовем шаблоном множество узлов, на котором записывается оператор

$$L_{h\tau}^{(0)} w = \frac{w(x,t+\tau) - w(x,t)}{\tau} - \frac{w(x+h,t) - 2w(x,t) + w(x-h,t)}{h^2} \quad (15)$$

$$w = w(x,t), \;\; \hat{w} = w(x,t+\tau)$$

$$w_t = \frac{\hat{w} - w}{\tau} \quad (16)$$

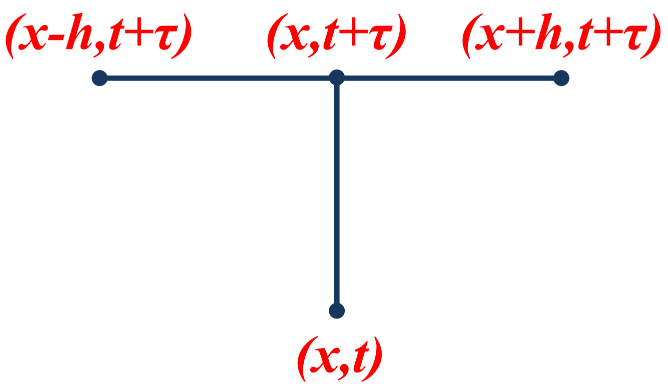
$$v_{\bar{x}} = (v(x) - v(x-h))\frac{1}{h}$$

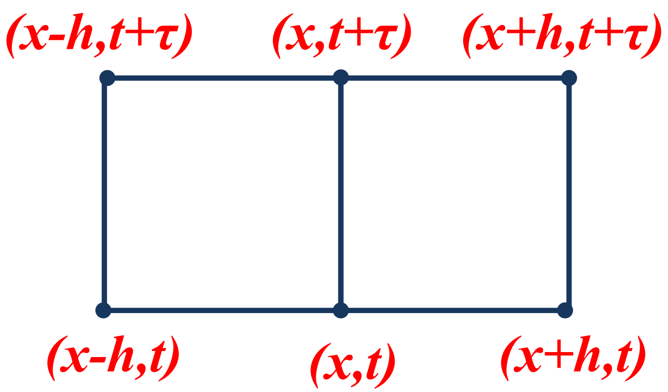
$$v_x = (v(x+h) - v(x))\frac{1}{h}$$

$$v_{x\bar{x}} = (v_x - v_{\bar{x}})\frac{1}{h}$$

$$w_{\bar{x}x} = \frac{w(x+h,t) - 2w(x,t) + w(x-h,t)}{h^2}$$

$$L_{h\tau}^{(0)} w = w_t - w_{\bar{x}x} \quad (17)$$





$$L_{h\tau}^{(1)} w = w_t - \hat{w}_{\bar{x}x} \tag{18}$$

$$L_{h\tau}^{(\sigma)} w = w_t - \left(\sigma \hat{w}_{\bar{x}x} + (1-\sigma) w_{\bar{x}x}\right) \tag{19}$$

$$\begin{aligned} w_t &= \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) + \underline{\underline{O}}(\tau^2) \\ w_{\bar{x}x} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x,t) + \underline{\underline{O}}(h^4) \end{aligned} \tag{20}$$

Подставляя (20) в (17), (18), получим

$$\psi^{(0)} = L_{h\tau}^{(0)} w - Lw(x,t) = \underset{=}{O}(h^2 + \tau) \tag{21}$$

$$\psi^{(1)} = L_{h\tau}^{(1)} w - Lw(x,t) = \underset{=}{O}(h^2 + \tau) \tag{22}$$

При σ=0,5 («симметричная схема») получаем

$$\psi^{(0,5)} = L_{h\tau}^{(0,5)} w - Lw\left(x, t + \frac{\tau}{2}\right) = \underset{=}{O}(h^2 + \tau^2), \tag{23}$$

где ψ - погрешность аппроксимации оператора L соответствующим разностным оператором $L_{h\tau}$.

Добавляя к разностному уравнению разностные начальные и граничные условия (13), (14), получим разностную начально – краевую задачу (схему):

$$\begin{cases} L_{h\tau}^{(\sigma)} y \equiv y_t - (\sigma \hat{y}_{\bar{x}x} + (1-\sigma) y_{\bar{x}x}) = \phi, \quad (x_n, t_s) \in \omega_{h\tau}, & (24) \\ y(x,0) = u_0(x), \;\; x = x_n \in \bar{\omega}_h, & (25) \\ y(0,t) = \mu_0, \;\; y(1,t) = \mu_1, \;\; t = t_s \in \bar{\omega}_\tau, & (26) \end{cases}$$

где $\phi = \phi_n^s = \phi(x_n, t_s)$.

Схема (24)-(26) аппроксимирует задачу (12)-(14) с порядком

$\underline{\underline{O}}(h^2 + \tau)$ **при** $\sigma = 0, \;\; \sigma = 1$ **и** $\underline{\underline{O}}(h^2 + \tau^2)$ **при** $\sigma = 0,5$ **.**

Схема называется явной, если σ**=0.**

При $\sigma \neq 0$ **схема называется неявной (при** σ**=1 – чисто неявной).**

Явная схема (σ=0):

$$y_n^{s+1} = y_n^s + \frac{\tau}{h^2}(y_{n-1}^s - 2y_n^s + y_{n+1}^s) + \tau\phi_n^s$$
$$n = 1, 2, ..., N-1; \quad s = 0, 1, ..., M. \qquad (27)$$

Чисто неявная схема (σ=1):

$$\frac{1}{h^2}y_{n-1}^{s+1} - (\frac{2}{h^2} + \frac{1}{\tau})y_n^{s+1} + \frac{1}{h^2}y_{n+1}^{s+1} = -(\frac{1}{\tau}y_n^s + \phi_n^s)$$
$$n = 1, 2, ..., N-1; \quad s = 0, 1, ..., M. \qquad (28)$$

Теорема

Для устойчивости разностной схемы (24)-(26) достаточно, чтобы существовали такие не зависящие от h и τ постоянные $C_1 \geq 0$ и $C_2 > 0$, при которых имеет место оценка

$$\left\| y^{s+1} \right\| \leq (1 + C_1 \tau) \left\| y^s \right\| + C_2 \tau \left\| \phi \right\| \qquad (29)$$

Замечание. В (29) введены нормы:

равномерная (чебышевская): $\left\| y \right\| = \max\limits_{n,s} \left| y_n^s \right|$ (30)

на s-м слое: $\left\| y^s \right\| = \max\limits_{n} \left| y_n^s \right|$ (31)

Доказательство:

$$\left\| y^{s+1} \right\| \leq (1 + C_1 \tau) \left\| y^s \right\| + C_2 \tau \left\| \phi \right\| \leq (1 + C_1 \tau) \left\{ (1 + C_1 \tau) \left\| y^{s-1} \right\| + C_2 \tau \left\| \phi \right\| \right\} + C_2 \tau \left\| \phi \right\| =$$

$$= (1 + C_1 \tau)^2 \left\| y^{s-1} \right\| + C_2 \tau \left\| \phi \right\| \left\{ 1 + (1 + C_1 \tau) \right\} \leq \ldots \leq (1 + C_1 \tau)^{s+1} \left\| y^0 \right\| + C_2 \tau \left\| \phi \right\| \left\{ 1 + \right.$$

$$\left. + (1 + C_1 \tau) + \ldots + (1 + C_1 \tau)^s \right\} \leq (1 + C_1 \tau)^{m+1} \left\| u_0 \right\| + C_2 \tau (m+1)(1 + C_1 \tau)^m \left\| \phi \right\|, \;\; s \leq m, \qquad (32)$$

Так как

$$(1+C_1\tau)^m \le (1+C_1\tau)^M \le e^{C_1\tau M} = e^{C_1 T} \qquad (33)$$

при $m \le M$ **, то полагая** $M_1 = e^{C_1 T}, \quad M_2 = C_2 T M_1 \Rightarrow$

$$\|y\| \le M_1\|u_0\| + M_2\|\phi\|. \qquad (34)$$

Рассмотрим устойчивость чисто неявной схемы (*σ*=1)

(28) => $$y_n^{s+1} = y_n^s - \gamma\left\{2y_n^{s+1} - y_{n+1}^{s+1} - y_{n-1}^{s+1}\right\} + \tau\phi_n^s, \ \ \gamma = \frac{\tau}{h^2} \qquad (35)$$

$$y_{k_0}^{s+1} = \max_n y_n^{s+1} \ge y_n^{s+1} \quad \Rightarrow \qquad (36)$$

$$2y_{k_0}^{s+1} - y_{k_0+1}^{s+1} - y_{k_0-1}^{s+1} \ge 0 \quad \Rightarrow \qquad (37)$$

$$y_{k_0}^{s+1} \le y_{k_0}^s + \tau\phi_{k_0}^s \qquad (38)$$

$$y_{\ell_0}^{s+1} = \min_n y_n^{s+1} \le y_n^{s+1} \quad \Rightarrow \tag{39}$$

$$2y_{\ell_0}^{s+1} - y_{\ell_0+1}^{s+1} - y_{\ell_0-1}^{s+1} \le 0 \Rightarrow \tag{40}$$

$$y_{\ell_0}^{s+1} \ge y_{\ell_0}^{s} + \tau\phi_{\ell_0}^{s} \tag{41}$$

(38), (41) =>

$$y_{\ell_0}^{s} + \tau\phi_{\ell_0}^{s} \le y_{\ell_0}^{s+1} \le y_n^{s+1} \le y_{k_0}^{s+1} \le y_{k_0}^{s} + \tau\phi_{k_0}^{s} \tag{42}$$

(42) =>

$$\left|y_n^{s+1}\right| \le \left\|y^s\right\| + \tau\left\|\phi\right\| \tag{43}$$

(43) =>

$$\left\|y^{s+1}\right\| \le \left\|y^s\right\| + \tau\left\|\phi\right\| \tag{44}$$

Рассмотрим устойчивость явной схемы (σ=0)

(27) =>

$$y_n^{s+1} = (1-2\gamma)y_n^s + \gamma y_{n+1}^s + \gamma y_{n-1}^s + \tau\phi_n^s \qquad (45)$$

Пусть $\gamma < \dfrac{1}{2}$ **. Тогда** $1-2\gamma > 0$ **и получим**

$$\begin{aligned}&\left|y_n^{s+1}\right| \le (1-2\gamma)\left|y_n^s\right| + \gamma\left|y_{n+1}^s\right| + \gamma\left|y_{n-1}^s\right| + \tau\left|\phi_n^s\right| \le \\ &\le (1-2\gamma+\gamma+\gamma)\left\|y^s\right\| + \tau\left\|\phi\right\| = \left\|y^s\right\| + \tau\left\|\phi\right\|\end{aligned} \qquad (46)$$

(46) =>

$$\left\|y^{s+1}\right\| \le \left\|y^s\right\| + \tau\left\|\phi\right\| \qquad (47)$$

Пусть $\delta y_n^s = (-1)^n \varepsilon, \;\; \varepsilon > 0$ **- ошибка на *s*-м слое.**

$$\begin{aligned}\delta y_n^{s+1} &= (1-2\gamma)\delta y_n^s + \gamma\delta y_{n+1}^s + \gamma\delta y_{n-1}^s = \\ &= (-1)^n \varepsilon(1-2\gamma-\gamma-\gamma) = (-1)^{n+1}(4\gamma-1)\varepsilon\end{aligned} \qquad (48)$$

$$\gamma > \frac{1}{2} \Rightarrow \quad \left|\delta y_n^{s+k}\right| = (4\gamma-1)^k \varepsilon, \quad 4\gamma-1 > 1 \Rightarrow$$

ошибка неограниченно возрастает, причем с уменьшением шага сетки ошибка нарастает (увеличивается число шагов).

Выводы. Чисто неявная схема является безусловно устойчивой.

Явная схема является условно устойчивой при выполнении условия $\quad \gamma < \dfrac{1}{2}$ **или** $\quad \tau < \dfrac{h^2}{2}.$ (49)

3. Метод прогонки.

$$\begin{cases} A_n y_{n-1} - C_n y_n + B_n y_{n+1} = -F_n, \quad n = 1, 2, ..., N-1 & (50) \\ y_0 = æ_1 y_1 + \mu_1, \quad y_N = æ_2 y_{N-1} + \mu_2 & (51) \end{cases}$$

$$A_n \neq 0, \quad B_n \neq 0, \quad n = 1, 2, ..., N-1.$$

$$y_n = \alpha_{n+1} y_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, ..., N-1. \tag{52}$$

(52) =>

$$y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n = \alpha_n \alpha_{n+1} y_{n+1} + \alpha_n \beta_{n+1} + \beta_n \tag{53}$$

(50),(52),(53) =>

$$\begin{aligned} &(\alpha_{n+1}(\alpha_n A_n - C_n) + B_n) y_{n+1} + \\ &\quad + (\beta_{n+1}(\alpha_n A_n - C_n) + \beta_n A_n + F_n) = 0 \end{aligned} \tag{54}$$

(54) =>

Прямой ход:

$$\alpha_{n+1} = \frac{B_n}{C_n - \alpha_n A_n}$$

$$\beta_{n+1} = \frac{A_n \beta_n + F_n}{C_n - \alpha_n A_n} \qquad n = 1, 2, ..., N-1 \tag{55}$$

(51),(52) *n=0 =>*

$$\alpha_1 = æ_1, \beta_1 = \mu_1 \tag{56}$$

(51),(52) *n=N-1 =>*

$$y_N = \frac{\mu_2 + \beta_N æ_2}{1\text{-}\alpha_{\mathrm{N}} æ_2} \tag{57}$$

Обратный ход:

$$y_n = \alpha_{n+1} y_{n+1} + \beta_{n+1}, \qquad n = N-1, N-2, ..., 0 \tag{58}$$

Достаточные условия устойчивости:

$$\left|C_n\right| \geq \left|A_n\right| + \left|B_n\right|, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1,$$
$$\left|æ_\alpha\right| \leq 1, \quad \alpha = 1, 2, \quad \left|æ_1\right| + \left|æ_2\right| < 2 \tag{59}$$

Число арифметических операций прогонки $\underline{\underline{O}}(N)$.

Покажем, что (59)=> $\left|\alpha_i\right| \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, N$

Индукция: *а)* $\left|\alpha_1\right| = \left|æ_1\right| \leq 1$; *б)* $\left|\alpha_i\right| \leq 1 \Rightarrow \left|\alpha_{i+1}\right| \leq 1$.

(59)=> $\left|C_i - \alpha_i A_i\right| - \left|B_i\right| \geq \left|C_i\right| - \left|\alpha_i\right|\left|A_i\right| - \left|B_i\right| \geq \left|A_i\right|\left(1 - \left|\alpha_i\right|\right) \geq 0$ (59a)

$B_i \neq 0$, *(59a)=>* $\left|C_i - \alpha_i A_i\right| > 0$

(59a)=> $\left|C_i - \alpha_i A_i\right| \geq \left|B_i\right| \Rightarrow \left|\alpha_{i+1}\right| = \dfrac{\left|B_i\right|}{\left|C_i - \alpha_i A_i\right|} \leq 1$

Покажем, что $|\alpha_i| < 1 \Rightarrow |\alpha_{i+1}| < 1$

Если $|\alpha_1| < 1$ **, то** $A_i \neq 0$**, (59a) =>** $|C_i - \alpha_i A_i| > |B_i| \Rightarrow |\alpha_{i+1}| < 1.$

Покажем, что (59)=> $1 - \alpha_n æ_2 \neq 0.$

а) $|æ_2| < 1 \Rightarrow |æ_1| \le 1 \Rightarrow |\alpha_1| \le 1 \Rightarrow |\alpha_N| \le 1 \Rightarrow$

$$|1 - \alpha_N æ_2| \ge 1 - |\alpha_N||æ_2| \ge 1 - |æ_2| > 0.$$

б) $|æ_2| \le 1 \Rightarrow |æ_1| < 1 \Rightarrow |\alpha_1| < 1 \Rightarrow |\alpha_N| < 1 \Rightarrow$

$$|1 - \alpha_N æ_2| \ge 1 - |\alpha_N||æ_2| \ge 1 - |\alpha_N| > 0.$$

При $|\alpha_i| \le 1$ **ошибка** $\delta y_{i+1} = \tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}$ **не нарастает:**

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad \tilde{y}_i = \alpha_{i+1} \tilde{y}_{i+1} + \beta_{i+1} \Rightarrow \delta y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} \Rightarrow$$

$$|\delta y_i| = |\alpha_{i+1}||\delta y_{i+1}| \le |\delta y_{i+1}|$$

Если $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ **возмущаются, то** $\max\limits_{1 \le i \le N} |\delta y_i| \approx \varepsilon_0 N^2$ **,**

где ε_0 **- ошибка округления.**