Гл.2.Некоторые классические задачи математического моделирования

1. Задача с данными на характеристиках (задача Гурса)

Простейшая задача Гурса:

$$u_{xy} = f(x,y),\ x>0,\ y>0, \qquad (1)$$

$$u(x,0)=\varphi_1(x), \quad u(0,y)=\varphi_2(y) \qquad (2)$$

$$\varphi_1(0)=\varphi_2(0)=u(0,0). \qquad (3)$$

Пусть решение задачи (1)-(3) существует. Получим его явное представление через входные данные. **Проинтегрируем (1) по**

прямоугольнику $\Re=\{0<\xi<x,\ 0<\eta<y\}:$

$$\int_{\Re} u_{xy}\,ds = \int_0^y\int_0^x u_{\xi\eta}\,d\xi\,d\eta = u(x,y) - u(x,0) - u(0,y) + u(0,0) =$$

$$= u(x,y) - \varphi_1(x) - \varphi_2(y) + \varphi_1(0),$$

$$u(x,y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y\int_0^x f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta. \qquad (4)$$

Из формулы (4) следует единственность решения задачи (1)-(3). В предположении дифференцируемости функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$ и непрерывности функции *f(x,y)* из формулы (4) следует существование решения.

Рассмотрим общую задачу Гурса:

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y), \; x > 0, y > 0, \qquad (5)$$

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad u(0,y) = \varphi_2(y) \qquad (6)$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = u(0,0), \qquad (7)$$

где *a*(x,y), *b*(*x,y*), *c*(*x,y*) – гладкие функции.

Обозначим $F(x,y,u,u_x,u_y)=f-au_x-bu_y-cu.$

Тогда

$$u(x,y)=\varphi_1(x)+\varphi_2(y)-\varphi_1(0)+\int_{\Re} Fd\xi d\eta=\int_0^y\int_0^x Fd\xi d\eta+\Phi(x,y), \quad (8)$$

где $\Phi(x,y)=\varphi_1(x)+\varphi_2(y)-\varphi_1(0).$

Введем интегро-дифференциальный оператор *A*: $A[u]=\int_0^y\int_0^x Fd\xi d\eta.$

Уравнение (8) запишем в виде интегро-дифференциального уравнения Вольтерра:

$$u=A[u]+\Phi, \quad (9)$$

которое решаем методом последовательных приближений:

$$u_n=A[u_{n-1}]+\Phi,\ n=1,2,...;\ u_0 \text{ - задано} \quad (10)$$

Положим $u_0(x,y)=0$. Тогда $u_1=\int_0^y\int_0^x f(\xi,\eta)d\xi d\eta+\Phi(x,y),$

$$u_n=u_1-\int_0^y\int_0^x\left\{a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial\xi}+b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial\eta}+cu_{n-1}\right\}d\xi d\eta. \quad (11)$$

Из (11) следует:

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} - \int_0^y \left\{ a(x,\eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b(x,\eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(x,\eta)u_{n-1} \right\} d\eta$$

(12)

$$\frac{\partial u_n}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial y} - \int_0^x \left\{ a(\xi,y)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi,y)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c(\xi,y)u_{n-1} \right\} d\xi$$

Докажем равномерную сходимость последовательностей

$$\{u_n(x,y)\},\quad \left\{\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right\},\quad \left\{\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right\}$$

Пусть $z_n = u_{n+1} - u_n.$ **Из (11) и (12) следует:**

$$z_n(x,y) = -\int_0^y\int_0^x \left\{ a(\xi,\eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi,\eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi,\eta)z_{n-1} \right\} d\xi d\eta,$$

(13)

$$\frac{\partial z_n}{\partial x}(x,y) = -\int_0^y \left\{ a(x,\eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b(x,\eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(x,\eta)z_{n-1} \right\} d\eta,$$

$$\frac{\partial z_n}{\partial y}(x,y) = -\int_0^x \left\{ a(\xi,y)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi,y)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c(\xi,y) z_{n-1} \right\} d\xi. \qquad \textbf{(13)}$$

Предположим, что в квадрате $G = \{0 < x, y < L\}$

$$|a(x,y)| \le M, \ |b(x,y)| \le M, \ |c(x,y)| \le M, \ |z_0| \le H, \ \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| \le H, \ \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right| \le H, \qquad \textbf{(14)}$$

где *M*>0, *H*>0 – положительные константы.

Из (13), и (14) следуют мажорантные оценки:

$$|z_1| \le 3HMxy \le 3HM\frac{(x+y)^2}{2!}, \ \left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| \le 3HMy \le 3HM(x+y), \ \left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| \le 3HMx \le 3HM(x+y).$$

По индукции для любого $n \ge 1$ **получаем:**

$$|z_n| \le 3HM^n K^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}, \ \left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| \le 3HM^n K^{n-1}\frac{(x+y)^n}{n!}, \ \left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| \le 3HM^n K^{n-1}\frac{(x+y)^n}{n!},$$

где *K*=*L*+2. Так как $(x,y) \in \overline{G}$ **, то**

$$|z_n| \le \frac{3H}{K^2 M}\frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!}, \ \left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| \le \frac{3H}{K}\frac{(2KLM)^n}{n!}, \ \left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| \le \frac{3H}{K}\frac{(2KLM)^n}{n!}. \qquad \textbf{(15)}$$

В правой части (15) с точностью до множителей пропорциональности стоят общие члены разложения *exp(2KLM*). Следовательно, последовательности функций

$$u_n = u_1 + z_1 + \ldots + z_{n-1}, \quad \frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial z_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_n}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial z_1}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}$$

равномерно сходятся к предельным функциям *u(x,y)*, *V*(x,y), *W*(x,y):

$$u(x,y) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,y), \; V(x,y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}, \; W(x,y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial y}.$$

перейдем в формулах (11), (12) к пределу при $n \to \infty$ **:**

$$u = u_1(x,y) - \int_0^y \int_0^x \{a(\xi,\eta)V + b(\xi,\eta)W + c(\xi,\eta)u\} d\xi d\eta,$$

$$V = \frac{\partial u_1}{\partial x} - \int_0^y \{a(x,\eta)V + b(x,\eta)W + c(x,\eta)u\} d\eta, \qquad \textbf{(16)}$$

$$W = \frac{\partial u_1}{\partial y} - \int_0^x \{a(\xi,y)V + b(\xi,y)W + c(\xi,y)u\} d\xi.$$

Отсюда следует, что $V=u_x$, $W=u_y$ и $u(x,y)$ удовлетворяют уравнению (8). Непосредственным дифференцированием устанавливается, что $u(x,y)$ удовлетворяет (5). Удовлетворение условиям (6) следует из (16), (7) и вида функций $u_1(x,y)$ и $\Phi(x,y)$.

Доказательство единственности решения задачи (5)-(7) (от противного).

Пусть $u_1(x,y) \neq u_2(x,y)$ - два решения. Рассмотрим $U(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$:

$$U(x,y) = -\int_0^x \int_0^y \left\{ aU_\xi + bU_\eta + cU \right\} d\xi d\eta.$$

Из (14) следует

$$|U| \leq H_1, \quad |U_x| \leq H_1, \quad |U_y| \leq H_1.$$

При $(x,y) \in G$ для любого n $\quad |U| \leq \frac{3H_1}{K^2 M} \frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!}.$ (17)

Из (17) следует, что

$$U(x,y) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad u_1(x,y) \equiv u_2(x,y) \ -$$

противоречие.