Тематическая лекция 1

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В этой лекции мы рассмотрим уравнение теплопроводности. Докажем слабый принцип максимума, рассмотрим задачу Коши и введем класс А. Н. Тихонова, в котором имеет место единственность решения задачи Коши.

§ 1. Уравнение теплопроводности

Как известно из курса ММФ к параболическим уравнениям относится уравнение теплопроводности

$$u_t - \Delta u = 0, \tag{1.1}$$

в котором $u(x,t) \geqslant 0$ — это температура в точке x и в момент времени $t > 0$. Для исследования уравнения теплопроводности (1.1) необходимо построить так называемое *фундаментальное решение,* которое в терминах *обобщенных функций* определяется как решение следующего уравнения в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$:

$$\mathcal{E}_t - \Delta\mathcal{E} = \delta(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geqslant 0, \tag{1.2}$$

где $\delta(x,t)$ — это дельта–функция Дирака, а равенство в уравнении (1.2) не является поточечным равенством и его точный смысл будет нам в дальнейшем понятен из курса «Функциональный анализ», который мы только начали изучать. Решение уравнения (1.2) может быть получено при помощи так называемого преобразования Фурье и оно имеет следующий явный вид:

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\vartheta(t)}{(4\pi t)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \tag{1.3}$$

где $\vartheta(t)$ — это функция Хевисайда, имеющая следующий явный вид:

$$\vartheta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t \geqslant 0; \\ 0, & \text{если} \quad t < 0. \end{cases}$$

Однако, построить фундаментальное решение можно используя симметрию уравнения (1.1) относительно преобразования

$$(x,t) \to (\lambda x, \lambda^2 t).$$

Итак, будем искать *частное решение* уравнения теплопроводности (1.1) в следующем автомодельном виде:

$$u(x,t)=\frac{1}{t^{\alpha}}v\left(y\right),\quad y=\frac{x}{t^{\beta}}. \tag{1.4}$$

После подстановки этого выражения в уравнение (1.1) мы получим следующее уравнение:

$$\alpha t^{-(\alpha+1)}v(y)+\beta t^{-(\alpha+1)}(y,D_y)v(y)+t^{-(\alpha+2\beta)}\Delta v(y)=0, \tag{1.5}$$

где $D_y=(\partial_{y_1},...,\partial_{y_N})$. Положим в этом уравнении $\beta=1/2$, тогда получим

$$\alpha v(y)+\frac{1}{2}(y,D_y)v(y)+\Delta v(y)=0. \tag{1.6}$$

Упростим это уравнение предположив, что функция $v(y)$ радиальна, т. е.

$$v=w(|y|)\Rightarrow \alpha w+\frac{1}{2}rw^{'}+w^{''}+\frac{N-1}{r}w^{'}=0,\quad r=|y|. \tag{1.7}$$

Положив в этом уравнении $\alpha=N/2$, получим более простое уравнение

$$(r^{N-1}w^{'})^{'}+\frac{1}{2}(r^Nw)^{'}=0. \tag{1.8}$$

Таким образом,

$$r^{N-1}w^{'}+\frac{1}{2}r^Nw=a,$$

где a — константа. Положим $a=0$, тогда

$$w^{'}=-\frac{1}{2}rw\Rightarrow w(r)=be^{-r^2/4}\Rightarrow u(x,t)=\frac{b}{t^{N/2}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

Константу $b>0$ выберем так, чтобы имело место равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{b}{t^{N/2}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)=1\Rightarrow b=\frac{1}{(4\pi)^{N/2}}.$$

Итак, с учетом того, что $t\geqslant 0$ мы приходим к фундаментальному решению (1.3).

§ 2. Задача Коши для уравнения теплопроводности

Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения теплопроводности:

$$u_t-\Delta u=0\quad \text{при}\quad (x,t)\in\mathbb{R}^N\otimes(0,+\infty), \tag{2.1}$$

$$u(x,0)=u_0(x)\quad \text{при}\quad x\in\mathbb{R}^N. \tag{2.2}$$

Докажем, что при некоторых условиях на начальную функцию $u_0(x)$ решение задачи (2.1), (2.2) дается следующей формулой:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y)\,dy. \tag{2.3}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть* $u_0(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^N)$ *и* $u(x,t)$ *определено формулой* (2.3). *Тогда*

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty)),$$

$u(x,t)$ *удовлетворяет уравнению* (2.1) *и выполнено предельное свойство*

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0),\ x\in\mathbb{R}^N, t>0} u(x,t) = u_0(x_0) \quad \text{для любой точки} \quad x_0 \in \mathbb{R}^N. \tag{2.4}$$

Доказательство.

Шаг 1. Поскольку функция

$$\frac{1}{t^{N/2}} e^{-|x|^2/(4t)}$$

бесконечное число раз дифференцируема и интегралы от производных в (2.3) равномерно сходятся на любом множестве $\Omega \otimes [\delta,+\infty) \subset \subset \mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty)$ для любого $\delta > 0$ и для любого замкнутого, ограниченного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, имеем $u(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$.

Шаг 2. Кроме того,

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} [\mathcal{E}_t(x-y,t) - \Delta_x \mathcal{E}(x-y,t)]\, u_0(y)\,dy = 0 \tag{2.5}$$

при $x \in \mathbb{R}^N$ и $t > 0$.

Шаг 3. Фиксируем $x_0 \in \mathbb{R}^N$ и $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$|u_0(y) - u_0(x_0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |y - x_0| < \delta, \quad y \in \mathbb{R}^N. \tag{2.6}$$

Если $|x - x_0| < \delta/2$, то поскольку имеет место равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \exp\Big(-|y|^2/(4t)\Big)\,dy = 1,$$

то справедлива следующая цепочка выражений:

$$|u(x,t) - u_0(x_0)| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x-y,t)[u_0(y) - u_0(x_0)]\,dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{B(x_0,\delta)} \mathcal{E}(x-y,t)|u_0(y) - u_0(x_0)|\,dy +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0,\delta)} \mathcal{E}(x-y,t)|u_0(y)-u_0(x_0)|\,dy = I_1 + I_2. \quad (2.7)$$

Прежде всего справедливы неравенства

$$I_1 \leqslant \varepsilon \int\limits_{B(x_0,\delta)} \mathcal{E}(x-y,t) \leqslant \varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x-y,t) = \varepsilon. \quad (2.8)$$

Кроме того, если

$$|x-x_0| \leqslant \delta/2,\ |y-x_0| \geqslant \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y-x_0| \leqslant |y-x| + |x-x_0| \leqslant |y-x| + \delta/2 \leqslant |y-x| + \frac{1}{2}|y-x_0| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}|y-x_0| \leqslant |y-x|.$$

Следовательно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$I_2 \leqslant 2 \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u_0(x)| \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0,\delta)} \mathcal{E}(x-y,t)\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_1}{t^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0,\delta)} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_1}{t^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0,\delta)} \exp\left(-\frac{|y-x_0|^2}{16t}\right) dy =$$

$$= \frac{c_2}{t^{N/2}} \int\limits_{\delta}^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{16t}\right) r^{N-1}\,dr = c_2 \int\limits_{\delta/\sqrt{t}}^{+\infty} \exp(-z^2/16) z^{N-1}\,dz \to +0$$

при $t \to +0$. [1] Таким образом, если

$$|x-x_0| < \frac{\delta}{2} \quad \text{и} \quad t>0 \quad \text{достаточно мало},$$

то

$$|u(x,t)-u_0(x_0)| < 2\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Нелинейное уравнение Бюргерса [**?**]. Существует важная связь между уравнением теплопроводности

$$u_t = \mu u_{xx}, \quad t>0, \quad \mu>0, \quad u(x,t) \geqslant 0 \quad (2.9)$$

[1] Здесь мы сделали замену переменных $z = y - x_0$ и перешли к сферической системе координат.

и уравнением Бюргерса

$$v_t + vv_x = \mu v_{xx}, \tag{2.10}$$

устанавливаемая следующей заменой *Коула–Хопфа*

$$v(x,t) = -2\mu \frac{\partial}{\partial x} \ln u(x,t). \tag{2.11}$$

Действительно, учитывая замену (2.11), получим

$$v_t + vv_x - \mu v_{xx} = -2\mu \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{u} (u_t - \mu u_{xx}) \right] = 0 \tag{2.12}$$

в силу уравнения (2.9). Преобразование Коула–Хопфа позволяет найти решение задачи Коши для уравнения Бюргерса.

Действительно, пусть в начальный момент времени

$$v(x,0) = \varphi(x), \tag{2.13}$$

тогда из (2.11) получаем

$$u(x,0) = \Psi(x) = \exp\left[-\frac{1}{2\mu} \int\limits_0^x \varphi(y)\,dy \right]. \tag{2.14}$$

Решение задачи Коши (2.9), (2.14) как мы уже показали ниже дается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi(z) \exp\left[-\frac{(x-z)^2}{4\mu t} \right] dz. \tag{2.15}$$

Используя (2.15), получаем решение задачи Коши (2.10), (2.13) для уравнения Бюргерса в следующем виде:

$$v(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-z}{t} \exp\left\{ -\frac{G(z,x,t)}{2\mu} \right\} dz \Bigg/ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ -\frac{G(z,x,t)}{2\mu} \right\} dz, \tag{2.16}$$

где

$$G(z,x,t) = \frac{(x-z)^2}{2t} + \int\limits_0^z \varphi(y)\,dy. \tag{2.17}$$

§ 3. Неоднородная задача Коши

Теперь мы рассмотрим следующую задачу:

$$u_t - \Delta u = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty), \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.2}$$

Решение неоднородной задачи Коши (3.1), (3.2) будем искать в виде *интеграла Дюамеля*:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x-y,t-s) f(y,s)\,dy\,ds =$$
$$= \int\limits_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right) f(y,s)\,dy\,ds \tag{3.3}$$

при $x \in \mathbb{R}^N$ и $t > 0$. Справедлива следующая теорема:
Теорема 2. *Пусть* $u(x,t)$ *определена формулой* (3.3) *и функция* $f(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty)) \cap \mathbb{C}_0(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$. *Тогда* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$, $u(x,t)$ *удовлетворяет уравнению* (3.1) *и*

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0),\ x\in\mathbb{R}^N,\ t>0} u(x,t) = 0 \quad \text{для каждой точки} \quad x_0 \in \mathbb{R}^N. \tag{3.4}$$

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего сделаем замену переменных в выражении (3.3):

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) f(x-y,t-s)\,dy\,ds. \tag{3.5}$$

Поскольку $f(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$ и финитна, а функция $\mathcal{E} = \mathcal{E}(y,s)$ гладкая в окрестности $s = t > 0$, получаем

$$u_t(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) f_t(x-y,t-s)\,dy\,ds + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,t) f(x-y,0)\,dy,$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x-y,t-s)\,dy\,ds \quad \text{при} \quad i,j = \overline{1,N}.$$

Таким образом, u, u_t, $D_x u$ и $D_x^2 u$ [1]) принадлежат $\mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$.

Шаг 2. Итак, вычисляем

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) =$$
$$= \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) f(x-y,t-s)\right] dy\,ds +$$

[1]) Символами $D_x u$ и $D_x^2 u$ мы обозначили любую частную производную первого порядка и любую частную производную второго порядка соответственно.

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,t) f(x-y,0)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x-y,t-s) \right] dy\,ds +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,t) f(x-y,0)\,dy =$$

$$= \int\limits_\varepsilon^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x-y,t-s) \right] dy\,ds +$$

$$+ \int\limits_0^\varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x-y,t-s) \right] dy\,ds +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,t) f(x-y,0)\,dy = I_1 + I_2 + J, \quad (3.6)$$

где мы воспользовались интегрированием по частям. Прежде всего имеем

$$|I_2| \leqslant \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\otimes(0,+\infty)} [|f_t(x,t)| + |\Delta_x f(x,t)|] \int\limits_0^\varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s)\,dy\,ds \leqslant c_1\varepsilon. \quad (3.7)$$

Интегрируя по частям, получим

$$I_1 = \int\limits_\varepsilon^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x-y,t-s) \right] dy\,ds =$$

$$= \int\limits_\varepsilon^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x-y,t-s) \left[\left(\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) \mathcal{E}(y,s) \right] dy\,ds +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon)\,dy - \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,t) f(x-y,0)\,dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon)\,dy - J, \quad (3.8)$$

поскольку

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) \mathcal{E}(y,s) = 0, \quad s > 0, \quad y \in \mathbb{R}^N.$$

Кроме того,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,\varepsilon) f(x-y, t-\varepsilon)\, dy \to f(x,t) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Заметим, что с учетом выражения (3.8) из (3.6) мы видим что интеграл J сокращается.

Следовательно, мы доказали, что функция $u(x,t)$, определенная формулой (3.3), удовлетворяет уравнению (3.1).

Шаг 3. Наконец, имеем

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u(x,t)| \leqslant \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\otimes(0,+\infty)} |f(x,t)| \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s)\, dy\, ds = \\ = c_1 t \to +0 \quad \text{при} \quad t \to +0.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Комбинируя результаты этих двух теорем, мы получим, что при указанных условиях на $u_0(x)$ и $f(x,t)$ решение неоднородной задачи Коши

$$u_t - \Delta u = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty), \tag{3.9}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{3.10}$$

дается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y)\, dy + \\ + \int\limits_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right) f(y,s)\, dy\, ds. \tag{3.11}$$

§ 4. Слабый принцип максимума для уравнения теплопроводности

Пусть $U \subset \mathbb{R}^N$ — это открытое ограниченное множество. Тогда положим

$$D = U \otimes (0,T), \quad \partial' D = \overline{B} \cup S, \quad S = \partial U \otimes (0,T],$$

$$B_T = U \otimes \{t = T\}, \quad B = U \otimes \{t = 0\}.$$

Мы в дальнейшем будем использовать следующую терминологию. Множество B_T называется *верхней крышкой*, замкнутое множество $\overline{B}$ называется *нижней крышкой*, а множество S называется *боковой*

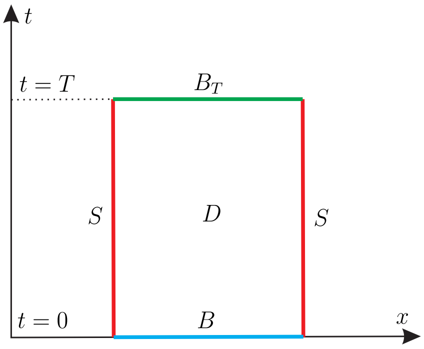

Рис. 1. Область D и множества S, B и B_T.

поверхностью цилиндрической области D. Полная граница ∂D открытого множества D имеет вид

$$\partial D = \overline{B} \cup S \cup B_T,$$

но в дальнейшем (в принципе максимума) важную роль играет только часть $\partial^{'} D \subset \partial D$, имеющая вид

$$\partial^{'} D = \overline{B} \cup S,$$

называемая *параболической границей*. Также введем обозначение

$$\overline{\partial' D} = \overline{B} \cup \overline{S}.$$

Замечание 2. Необходимость в рассмотрении $\overline{\partial' D}$ связано с тем, что боковая граница S не замкнута — она не содержит множество $\{(x,t) \in \partial B \otimes \{t=0\}\}$. Однако, это множество содержит $\overline{B}$. Поэтому как множество точек $\partial D = \overline{\partial' D}$. Тем не менее мы используем это обозначение в связи со следующим примером: например,

$$g(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad \overline{B}, \quad g(x,t) = 1 \quad \text{на} \quad S.$$

Очевидно,

$$\max_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} g(x,t) = \sup_{(x,t)\in\partial' D} g(x,t) = 1 =$$
$$= \sup_{(x,t)\in S} g(x,t) = \max_{(x,t)\in\overline{S}} g(x,t) \neq \max_{(x,t)\in\overline{B}} g(x,t) = 0.$$

Понятно, что в том случае если выполняется условие согласование граничных условий разницы нет.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ — *решение уравнения теплопроводности*

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{4.1}$$

тогда

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} u(x,t) = \max_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} u(x,t), \tag{4.2}$$

$$\min_{(x,t)\in\overline{D}} u(x,t) = \min_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} u(x,t), \tag{4.3}$$

Доказательство.

Прежде всего докажем, что *если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *такое решение уравнения теплопроводности, что*

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \partial' D, \tag{4.4}$$

то отсюда следует, что

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D. \tag{4.5}$$

Шаг 1. Выберем константу $\gamma > 0$ и определим следующую функцию:

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{\gamma}{T-t}. \tag{4.6}$$

Пусть z_γ — это точка в $\overline{D}$, в которой $v(x,t)$ принимает максимальное значение. Прежде всего заметим, что в силу ограниченности решения $u(x,t)$ в D

$$v(z) \to -\infty \quad \text{при} \quad z \to B_T = \{x \in U,\ t = T\}.$$

Поэтому z_γ не может принадлежать верхней крышке B_T, т. е.

$$z_\gamma \in D \cup \partial' D.$$

Шаг 2. Если $v(z_\gamma) \geqslant 0$, то z_γ не может лежать в D, т. е. быть внутренней точкой цилиндрической области D.

□ Действительно, в противном случае имеем

$$\Delta v(z_\gamma) \leqslant 0, \quad v_t(z_\gamma) = 0, \quad i = \overline{1,N}.$$

Поэтому в точке z_γ выполнена следующая цепочка неравенств:

$$0 = \Delta u(x,t) - u_t = \Delta v(z_\gamma) - v_t(z_\gamma) - \frac{\gamma}{(T-t)^2} \leqslant -\frac{\gamma}{(T-t)^2} < 0. \quad \boxtimes$$

Шаг 3. Полученное противоречие доказывает, что либо $v(z_\gamma) < 0$ в D либо $z_\gamma \in \partial' D$ и тогда в силу (4.4) имеем $v(z_\gamma) \leqslant 0$. Итак, в любом случае имеем

$$v(x,t) \leqslant v(z_\gamma) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D \Rightarrow u(x,t) \leqslant \frac{\gamma}{T-t} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D.$$

Поскольку $u(x,t)$ не зависит от произвольного $\gamma > 0$, то для всякого фиксированного $(x,t) \in D$ устремим $\gamma \to +0$ и получим неравенство

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D.$$

Шаг 4. Теперь докажем равенство (4.2). Действительно, пусть

$$M \stackrel{def:}{=} \max_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} u(x,t), \quad v(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t) - M.$$

Тогда функция $v(x,t)$ удовлетворяет тоже уравнению теплопроводности

$$\Delta v - v_t = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \quad \text{и} \quad v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D.$$

Следовательно, по доказанному имеем

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \Rightarrow u(x,t) \leqslant M \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \max_{(x,t)\in\overline{D}} u(x,t) = M = \max_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} u(x,t).$$

Шаг 5. Теперь докажем равенство (4.3). Определим следующую величину:

$$m \stackrel{def:}{=} \min_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} u(x,t).$$

Рассмотрим функцию

$$v(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t) - m \Rightarrow v(x,t) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial' D.$$

Итак, функция $-v(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta(-v(x,t)) - (-v(x,t))_t = 0 \quad \text{в} \quad D,$$
$$-v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial' D.$$

Следовательно, по–доказанному имеем

$$-v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D \Rightarrow v(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D.$$

Итак,

$$u(x,t) \geqslant m \quad \text{в} \quad D.$$

Теорема доказана.

Замечание 3. Отметим, что решение $u(x,t) \neq const$ уравнения теплопроводности

$$u_t = \Delta u$$

может достигать минимального и максимального значения во внутренних точках области D. Действительно, рассмотрим следующий пример:

Пример. [**?**] Рассмотрим область $D = \{|x| < 1\} \otimes (0,T)$, в которой рассматривается уравнение теплопроводности

$$u_t = u_{xx}. \tag{4.7}$$

Пусть $t_0 \in (0,T)$, $x_0 = 2$ и введем следующую функцию:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad (x,t) \in \{|x| \leqslant 1\} \otimes [0,t_0]; \\ \mathcal{E}(x,t;x_0,t_0), & \text{если} \quad (x,t) \in \{|x| \leqslant 1\} \otimes (t_0,T], \end{cases} \tag{4.8}$$

где

$$\mathcal{E}(x,t;x_0,t_0) \stackrel{def:}{=} \frac{\vartheta(t-t_0)}{\sqrt{4\pi(t-t_0)}} \exp\left\{-\frac{|x-x_0|^2}{4(t-t_0)}\right\}, \quad x_0 = 2.$$

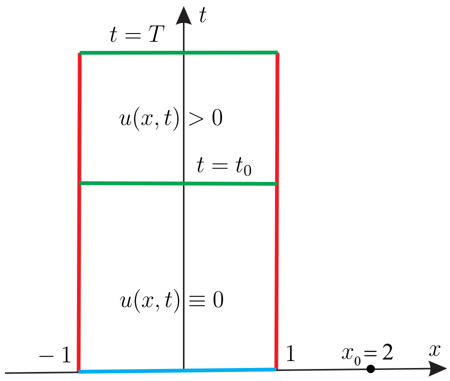

Рис. 2. К примеру.

Ясно, что такая функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности (4.8), поскольку сшивка при $t = t_0$ является бесконечное число раз гладкой, так как $x_0 = 2$. Минимальным значением функции $u(x,t)$ является 0 и это минимальное значение достигается внутри области D. Заметим, однако, что тем не менее при $t \leqslant t_0$ функция $u(x,t) = 0$. И этот результат может быть получен в общем виде и носит название *сильного принципа максимума*.

Замечание 4. Отметим, что этот пример не означает, что нарушена единственность, поскольку при задании граничных условиях при $x = -1$ и $x = 1$ мы получим корректную задачу, единственным решением будет указанная функция (4.8).

Замечание 5. Заметим, что в случае *эллиптического* оператора минимальное и максимальное значения решение $u(x) \not\equiv const$ уравнения Лапласа

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{в} \quad D$$

не может достигаться внутри области D. В этом серьезное отличие эллиптического случая от параболического.

Замечание 6. Фактически, используя методику доказательства на шагах 1–3 может быть доказано следующее первое утверждение: *Если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\Delta u - u_t \geqslant 0 \quad \textit{в} \quad D, \tag{4.9}$$

$$u \leqslant 0 \quad \textit{на} \quad \partial' D, \tag{4.10}$$

то $u \leqslant 0$ *в* D. Применением этого утверждения к функции $-u(x,t)$, получим также следующее второе утверждение: *Если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\Delta u - u_t \leqslant 0 \quad \textit{в} \quad D, \tag{4.11}$$

$$u \geqslant 0 \quad \textit{на} \quad \partial' D, \tag{4.12}$$

то $u \geqslant 0$ *в* D.

Прежде, чем рассматривать ниже следующие задачи, применения принципа максимума, мы предлагаем следующий рисунок цилиндрической области $D = (a,b) \otimes (0,t_0)$, причем

$$S \stackrel{def:}{=} \{x = a\} \otimes \{0 < t \leqslant t_0\} \cup \{x = b\} \otimes \{0 < t \leqslant t_0\},$$

$$\overline{B} \stackrel{def:}{=} \{a \leqslant x \leqslant b\} \otimes \{t = 0\},$$

$$B_{t_0} \stackrel{def:}{=} \{a < x < b\} \otimes \{t = t_0\},$$

причем $\partial D = S \cup \overline{B} \cup B_{t_0}$, а *нормальная граница* или *параболическая граница* $\partial' D = S \cup \overline{B}$. Напомним, что замкнутая область $\overline{B}$ называется *нижней крышкой*, область B_{t_0} называется *верхней крышкой*, а множество S называется *боковой границей*. Множества S, $\overline{B}$ и B_{t_0} попарно непересекаются.

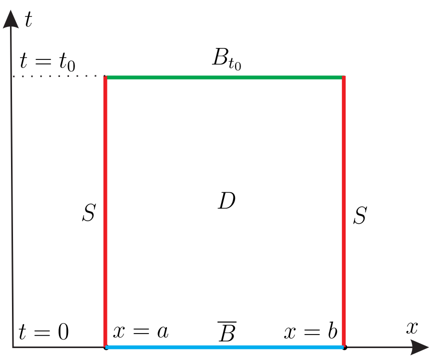

Рис. 3. К задачам.

Замечание 7. Заметим, что множество S не является замкнутым, поскольку множества $\{x = a\} \otimes t = 0 \notin S$, $\{x = b\} \otimes t = 0 \notin S$.

Задача 1. [**?**] Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{D})$ — это решение в $\overline{D} = [0,1] \otimes [0,1]$ задачи

$$u_t = u_{xx} \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{D},$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \quad \text{при} \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} > 0 \quad \text{при} \quad x \in (0,1),$$

причем выполнены условия согласования $u(0,0) = u(1,0) = 0$. Может ли функция

$$f(t) \stackrel{def:}{=} \int\limits_0^1 u^2(x,t)\,dx$$

иметь максимум при $t \in (0,1)$?

Решение. Итак, предположим, что в некоторой точке $t_0 \in (0,1)$ достигается максимум функции $f(t)$. Поскольку $f(t) \geqslant 0$ и решение $u(x,t) \neq 0$, то

$$f(t_0) > 0.$$

Тогда имеет место цепочка выражений

$$f^{'}(t_0) = 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 u(x,t_0)u_t(x,t_0)\,dx = 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 u(x,t_0)u_{xx}(x,t_0)\,dx = 0.$$

Интегрируя по частям в последнем равенстве, мы с учетом граничных условий в рассматриваемом классе гладкости получим равенство

$$-\int\limits_0^1 (u_x(x,t_0))^2\,dx = 0 \Rightarrow u_x(x,t_0) = 0 \Rightarrow u(x,t_0) = const \quad \forall x \in [0,1],$$

из которого опять в силу граничных условий получим $u(x,t_0) = 0$, что в свою очередь означает

$$f(t_0) = \int\limits_0^1 u^2(x,t_0)\,dx = 0.$$

Но это противоречит определению точки $t_0 \in (0,1)$.

Задача 2. [?] Пусть $u(x,t)$ — это регулярное решение в $D = (0,\pi) \otimes (0,+\infty)$ задачи

$$u_t = u_{xx}, \quad u|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{4.13}$$

где $\varphi(0) = \varphi^{'}(\pi) = 0$. Проверить, что

1. Выполнено ли неравенство

$$\sup_{0<x<\pi} |u(x,1)| \leqslant \sup_{0<x<\pi} |\varphi(x)|? \tag{4.14}$$

2. Верно ли, что

$$\sup_{0<x<\pi} |u(x,1)| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{0<x<\pi} |\varphi(x)|? \tag{4.15}$$

Решение. Для того чтобы в дальнейшем воспользоваться принципом максимума, нам нужно получить эквивалентную задачу, но с условиями Коши–Дирихле. С этой целью продолжим функцию $u(x,t)$

четным образом через точку $x = \pi$ на множество $x \in (\pi, 2\pi)$, т.е. положим

$$\widetilde{u}(x,t) = u(2\pi - x, t) \quad \text{при} \quad x \in (\pi, 2\pi) \Rightarrow \widetilde{u}_x(\pi, t) = u_x(\pi, t) = 0.$$

Построенная функция является решением краевой задачи

$$\widetilde{u}_t = \widetilde{u}_{xx}, \quad x \in (0, 2\pi), \quad t > 0, \tag{4.16}$$

$$\widetilde{u}|_{x=0} = \widetilde{u}|_{x=2\pi} = 0, \quad \widetilde{u}|_{t=0} = \widetilde{\varphi}, \tag{4.17}$$

где функция $\widetilde{\varphi}(x)$ четным образом продолженная на интервал $(\pi, 2\pi)$. Задачи (4.13) и (4.16), (4.17) эквивалентны. Теперь мы можем применить принцип максимума и получить, что максимум модуля функции $\widetilde{u}(x,t)$ достигается при $t = 0$, поскольку на боковой границе при $x = 0$ и $x = 2\pi$ $\widetilde{u}(x,t) = 0$. Итак,

$$\sup_{0<x<\pi} |u(x,1)| = \sup_{0<x<2\pi} |\widetilde{u}(x,1)| \leqslant \sup_{0<x<2\pi} |\widetilde{\varphi}(x)| = \sup_{0<x<\pi} |\varphi(x)|. \tag{4.18}$$

Тем самым утверждение (4.14) доказано.

Неравенство (4.15) неверно. Действительно, возьмем

$$\varphi(x) = \sin(x/2),$$

которому соответствует решение [1])

$$u(x,t) = e^{-t/4}\sin(x/2) \Rightarrow \sup_{0<x<\pi} |u(x,1)| = e^{-1/4}, \qquad \sup_{0<x<\pi} |\varphi(x)| = 1.$$

Заметим, что

$$e^{-1/4} > \frac{1}{2},$$

поскольку $e < 2^4$.

З а д а ч а 3. [**?**] Пусть $D = (0,1) \otimes (0,1)$. Существует ли функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ — решение следующей первой краевой задачи:

$$u_t = u_{xx} \quad \text{в} \quad D, \tag{4.19}$$

$$u|_{t=0} = 2\sin\pi x \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4.20}$$

$$u|_{x=0} = \sin\pi t, \quad u|_{x=1} = \sin\pi t + 2\sin\pi t \quad \text{при} \quad 0 < t \leqslant 1, \tag{4.21}$$

$$u|_{t=1} = 3\sin\pi x \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1? \tag{4.22}$$

Р е ш е н и е. Эта задача для самостоятельного решения.

З а д а ч а 4. [**?**] Существует ли решение $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{Q})$ задачи

$$u_t = u_{xx} + 1 \quad \text{в} \quad \overline{Q}, \quad Q = \Big\{(x,t):\ x^2 + t^2 < 1\Big\}, \tag{4.23}$$

$$x u_x = t u \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial Q = \Big\{(x,t):\ x^2 + t^2 = 1\Big\}? \tag{4.24}$$

Р е ш е н и е. Прежде всего заметим, что справедлива следующие

[1]) Полученное методом разделенных переменных.

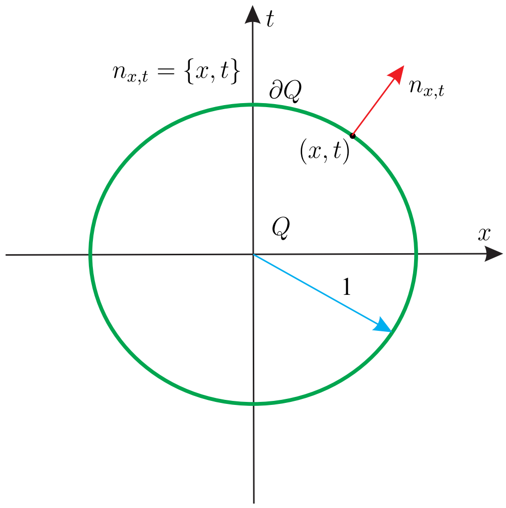

Рис. 4. К задаче 4.

равенства в силу формулы Грина:

$$\int\limits_{Q} u_t \, dx \, dt = \int\limits_{\partial Q} u(x,t) \cos(n_{x,t}, e_t) \, dl, \tag{4.25}$$

$$\int\limits_{Q} u_{xx} \, dx \, dt = \int\limits_{\partial Q} u_x(x,t) \cos(n_{x,t}, e_x) \, dl, \tag{4.26}$$

где $n_{x,t}$ — это внешняя нормаль в точке $(x,t) \in \partial Q$. Легко проверить, что

$$n_{x,t} = (x,t), \quad \cos(n_{x,t}, e_t) = t, \quad \cos(n_{x,t}, e_x) = x.$$

Поэтому интегрируя обе части уравнения (4.23), мы получим равенство

$$\int\limits_{\partial Q} u(x,t) t \, dl = \int\limits_{\partial Q} u_x(x,t) x \, dl + 2\pi,$$

а с учетом граничного условия (4.24) мы получим противоречивое равенство

$$0 = 2\pi.$$

Задача 5. [**?**] Пусть функции $u_k(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D_k) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_k)$, $k = 1, 2$, являются решениями в

$$D_k \stackrel{def:}{=} (-k, k) \otimes (0, T)$$

краевых задач

$$(u_k)_t = (u_k)_{xx}, \quad u_k|_{x=\pm k} = 0, \quad u_k|_{t=0} = \varphi(x), \quad |x| \leqslant k. \tag{4.27}$$

Здесь $\varphi(x) \in \mathbb{C}^{(1)}([-2,2])$, $\varphi(x) \geqslant 0$ при $|x| \leqslant 1$ и $\varphi(x) = 0$ при $1 \leqslant |x| \leqslant 2$, $\varphi(x) \not\equiv 0$. Доказать, что

$$u_1(x,t) \leqslant u_2(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in [-1,1] \otimes (0,T]. \tag{4.28}$$

Решение. Прежде всего заметим, что в силу принципа максимума $u_k(x,t) > 0$ в D_k. Рассмотрим разность

$$v(x,t) \overset{def:}{=} u_2(x,t) - u_1(x,t).$$

Введенная функция удовлетворяет задаче

$$v_t = v_{xx}, \quad v|_{x=\pm 1} > 0, \quad v|_{t=0} = 0. \tag{4.29}$$

В силу принципа максимума имеем $v(x,t) \geqslant 0$ в D, т. е. выполнено неравенство (4.28).

Задача 6*. [1]) [?] Функция $u(x,t) \not\equiv const$ удовлетворяет уравнению

$$u_t = u_{xx}$$

в области $D \equiv \{(x,t): \ 0 < t < T, \ 0 < x < 5 - \exp(-t)\}$. Доказать, что глобальный максимум этой функции на $\overline{D}$ не может достигаться ни во внутренних точках области D, ни при $t = T$.

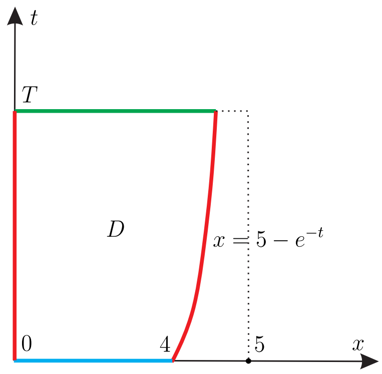

Рис. 5. К задаче 6.

Решение. Эта задача для самостоятельной работы.

Задача 7. [?], [?] Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ является решением уравнения

$$u_t = \Delta u + f(x), \quad f(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D, \tag{4.30}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D. \tag{4.31}$$

Докажите, что $u_t(x,t) \geqslant 0$ в D.

---

[1]) Эта задача повышенной сложности.

Решение. Итак, в области D выполнено неравенство

$$\Delta u - u_t \leqslant 0,$$

тогда с учетом второго утверждения в замечании 6 и равенства (4.31) получим, что выполнено неравенство

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{4.32}$$

Рассмотрим функцию

$$w(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t+\varepsilon) - u(x,t), \quad \varepsilon > 0. \tag{4.33}$$

Эта функция удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$w_t = \Delta w \quad \text{в} \quad D_\varepsilon = U \otimes (0, T-\varepsilon), \tag{4.34}$$

причем

$$w(x,t) = u(x,t+\varepsilon) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D_\varepsilon, \tag{4.35}$$

поскольку

$$u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad \partial' D \supset \partial' D_\varepsilon.$$

Применяя теперь второе утверждение из замечания 6, получим

$$w(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D_\varepsilon \Rightarrow \frac{u(x,t+\varepsilon) - u(x,t)}{\varepsilon} \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D_\varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{u(x,t+\varepsilon) - u(x,t)}{\varepsilon} = u_t(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{4.36}$$

Задача 8. Вариант неравенства Чебышева. [?] Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ является решением дифференциального неравенства

$$\Delta u - u_t \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D = \Omega \otimes (0,T). \tag{4.37}$$

Предположим, что

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S = \partial\Omega \otimes (0,T], \tag{4.38}$$

$$u(x,t) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{B} = \overline{\Omega} \otimes \{t=0\}. \tag{4.39}$$

Пусть $v = v(x)$ — это гладкая неотрицательная функция в $\overline{\Omega}$ такая, что

$$\Delta v(x) \leqslant -1 \quad \text{при} \quad x \in \Omega. \tag{4.40}$$

Доказать, что

$$u(x,t) \leqslant \frac{v(x)}{t} \quad \text{при} \quad (x,t) \in D. \tag{4.41}$$

Решение. Прежде всего заметим, что в силу принципа максимума имеем [1])

$$u(x,t) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D. \tag{4.42}$$

[1]) Нужно применить утверждение 1 замечания 6 к функции $u(x,t) - 1$.

Рассмотрим следующую вспомогательную функцию:

$$w(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t) - \frac{v(x)}{t}. \tag{4.43}$$

Прежде всего применим к этой функции оператор

$$\Delta - \frac{\partial}{\partial t}$$

и получим следующее выражение:

$$\Delta w - w_t = \Delta u - u_t - \frac{\Delta v(x)}{t} - \frac{v(x)}{t^2} \geqslant \\ \geqslant -\frac{\Delta v(x)}{t} - \frac{v(x)}{t^2} \geqslant \frac{1}{t^2}\left(t - v(x)\right). \tag{4.44}$$

Разобьем область D на три части

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3,$$

$$D_1 \stackrel{def:}{=} \{(x,t) \in D: \ v(x) > t\}, \quad D_2 \stackrel{def:}{=} \{(x,t) \in D: \ v(x) < t\},$$

$$D_3 \stackrel{def:}{=} \{(x,t) \in D: \ v(x) = t\}.$$

На множестве D_1 выполнено неравенство

$$\frac{v(x)}{t} > 1 \geqslant u(x,t) \Rightarrow w(x,t) \leqslant 0, \tag{4.45}$$

где последнее неравенство имеет место в силу принципа максимума, примененного к функции $u(x,t)$. На множестве $D_2 \cup D_3$ в силу (4.46) выполнено неравенство

$$v(x) \leqslant t \Rightarrow \Delta w - w_t \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_2 \cup D_3. \tag{4.46}$$

Теперь заметим, что в силу определения (4.43) функции $w(x,t)$ и неравенств (4.38), (4.39) на параболической границе $\partial' D = S \cup \overline{B}$ области D выполнено неравенство

$$w(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D. \tag{4.47}$$

Часть границы множества $D_2 \cup D_3$, не входящая в $\partial' D$ совпадает с $D_3 \backslash D$ и на множестве D_3 имеет место следующее неравенство:

$$w(x,t) = u(x,t) - \frac{v(x)}{t} \leqslant 1 - 1 = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_3. \tag{4.48}$$

Итак, в силу утверждения 1 из замечания 6 мы из неравенств (4.46), (4.47) и (4.48) получим неравенство

$$w(x,t) = u(x,t) - \frac{v(x)}{t} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_2. \tag{4.49}$$

Следовательно, объединяя неравенства (4.45), (4.48) и (4.49), получим неравенство

$$w(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D.$$

З а д а ч а 9. [**?**] Справедлив ли принцип максимума в области $D = \Omega \otimes (0,T)$ для обратно параболического уравнения

$$u_t + \Delta u = 0 \tag{4.50}$$

в том виде, в каком он справедлив для уравнения теплопроводности?

Р е ш е н и е. Заметим, что заменой $t \to -t$ уравнение (4.50) сводится к уравнению теплопроводности

$$u_t = \Delta u.$$

Тем самым, нетрудно догадаться, что максимум и минимум функции $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ может достигаться при $(x,t) \in \overline{B}_T \cup \widehat{S}$, где $\widehat{S} = \partial U \otimes [0,T)$, но не может достигаться при $(x,t) \in D \cup B$. Таким образом, в *принципе максимума* для уравнения (4.50) нужно заменить B на B_T, а S на $\widehat{S}$.

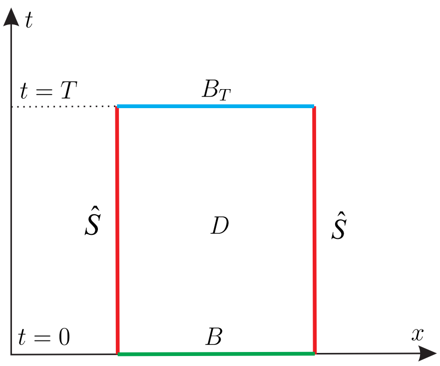

Рис. 6. К задаче 9.

З а д а ч а д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я 1. Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ и, кроме того, $f(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$. Рассмотрите неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t - \Delta u = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей. Докажите, что имеют место неравенства

$$\min_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} u(x,t) - T \max_{(x,t)\in\overline{D}} |f(x,t)| \leqslant u(x,t) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{(x,t)\in\overline{\partial' D}} u(x,t) + T \max_{(x,t)\in\overline{D}} |f(x,t)|.$$

Указание. Необходимо рассмотреть следующие две функции:

$$v_1(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t)+tK, \quad v_2(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t)-tK,$$
$$K \stackrel{def:}{=} \max_{(x,t)\in\overline{D}} |f(x,t)|.$$

§ 5. Слабый принцип максимума для задачи Коши

Сейчас мы докажем важный *слабый принцип максимума* для задачи Коши для уравнения теплопроводности, который позволит доказать, как его следствие, единственность решения задачи Коши. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 4. *Пусть* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,T]) \cap \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes [0,T])$ — *это решение задачи Коши*

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T), \tag{5.1}$$
$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{5.2}$$

удовлетворяющее условию роста

$$u(x,t) \leqslant Me^{\beta|x|^2} \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [0,T], \tag{5.3}$$

где $M > 0$ *и* $\beta > 0$ — *это константы. Тогда*

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\otimes[0,T]} u(x,t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} g(x). \tag{5.4}$$

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего допустим, что

$$4\beta T < 1 \Rightarrow 4\beta(T+\varepsilon) < 1 \tag{5.5}$$

при некотором малом $\varepsilon > 0$. Фиксируем $y \in \mathbb{R}^N$, $\mu > 0$ и определим функцию

$$v(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{N/2}} \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right) \tag{5.6}$$

при $x \in \mathbb{R}^N$ и $t > 0$. Прямым вычислением можно показать, что

$$v_t - \Delta v = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T]. \tag{5.7}$$

Шаг 2. Фиксируем $r > 0$ и положим

$$U \stackrel{def:}{=} B(y,r), \quad D = B(y,r) \otimes (0,T).$$

В силу теоремы 3 имеем

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} v(x,t) = \max_{(x,t)\in\partial' D} v(x,t). \tag{5.8}$$

Шаг 3. Если $x \in \mathbb{R}^N$ и $t = 0$ то

$$v(x,0) = u(x,0) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{N/2}} \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon)}\right) \leqslant u(x,0) = u_0(x). \quad (5.9)$$

Если $(x,t) \in S$, т. е. $|x-y| = r$ и $t \in [0,T]$, то

$$|x| \leqslant |x-y| + |y| = r + |y|$$

и имеет место следующая цепочка неравенств:

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{N/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant M \exp\left(\beta|x|^2\right) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{N/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant M \exp\left(\beta(|y|+r)^2\right) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{N/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}\right). \quad (5.10)$$

В силу неравенства (5.5) при некотором $\gamma > 0$ имеет место равенство

$$\frac{1}{4(T+\varepsilon)} = \beta + \gamma.$$

Пусть

$$c_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u_0(x) \in (-\infty, +\infty). \quad (5.11)$$

Продолжим неравенства (5.10) и получим

$$v(x,t) \leqslant$$
$$\leqslant M \exp\left(\beta(|y|+r)^2\right) - \mu(4(\beta+\gamma))^{N/2} \exp((\beta+\gamma)r^2) \to -\infty \quad (5.12)$$

при $r \to +\infty$. Следовательно, при достаточно большом $r > 0$ будет выполнено неравенство

$$M \exp\left(\beta(|y|+r)^2\right) - \mu(4(\beta+\gamma))^{N/2} \exp((\beta+\gamma)r^2) \leqslant c_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u_0(x).$$

Итак, при некотором таком $r > 0$ будем иметь

$$v(x,t) \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u_0(x). \quad (5.13)$$

Шаг 4. Итак, в силу (5.9), (5.13) и (5.8) имеем

$$v(y,t) \leqslant \max_{(x,t) \in D} v(x,t) \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u_0(x)$$

для всех $y \in \mathbb{R}^N$ и $t \in [0,T]$. Переходя к пределу при $\mu \to +0$ мы получим утверждение теоремы.

Шаг 5. Если условие (5.5) не выполняется, тогда нужно применить схему доказательства на временных интервалах

$$[0, T_1], \quad [T_1, 2T_1], ..., [(n-1)T_1, nT_1], ...,$$

при $T_1 = 1/(8\beta)$.

Теорема доказана.

Задача 10. [?] Пусть функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$ удовлетворяет условию роста (5.3) и является решением задачи Коши

$$u_t = \Delta u \quad \text{в} \quad D = (0,T) \otimes \mathbb{R}^N, \quad u(x,0) = u_0(x) \quad \text{в} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (5.14)$$

причем начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leqslant a|x-y|^\delta, \quad \delta \in (0,1). \quad (5.15)$$

Тогда

$$|u(x,t) - u(y,t)| \leqslant a|x-y|^\delta \quad \text{при} \quad t \in (0,T). \quad (5.16)$$

Кроме того,

$$|u(x,t) - u(x,s)| \leqslant b|t-s|^{\delta/2} \quad \text{при} \quad t,s \in (0,T), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (5.17)$$

Решение. Доказательство проведем за несколько шагов.

Шаг 1. Прежде всего введем функцию

$$w(x,t) \stackrel{def:}{=} u(x+y,t) - u(x,t) \quad (5.18)$$

при фиксированном $y \in \mathbb{R}^N$. Эта функция удовлетоворяет уравнению

$$w_t = \Delta w, \quad w(x,0) = u_0(x+y) - u_0(x), \quad |w(x,0)| \leqslant a|y|^\delta.$$

Введем две функции

$$v_1(x,t) \stackrel{def:}{=} w(x,t) - a|y|^\delta, \quad v_2(x,t) \stackrel{def:}{=} w(x,t) + a|y|^\delta.$$

Эти функции удовлетворяют задачам

$$v_{kt} = \Delta v_k, \quad k = 1,2,$$
$$v_1(x,0) \leqslant 0, \quad v_2(x,0) \geqslant 0.$$

Применяя слабый принцип максимума (теорема 4), мы получим, что

$$v_1(x,t) \leqslant 0, \quad v_2(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D.$$

Следовательно,

$$|w(x,t)| \leqslant a|y|^\delta. \quad (5.19)$$

Шаг 2. Теперь мы можем доказать неравенство (5.17). Действительно, введем следующую функцию:

$$w(x,t;y,s) \stackrel{def:}{=} u(x,t+s) - u(y,s). \quad (5.20)$$

При $t = 0$ по–доказанному имеем

$$|w(x,0;y,s)| = |u(x,s) - u(y,s)| \leqslant a|x-y|^\delta. \quad (5.21)$$

Заметим, что из арифметического неравенства Юнга

$$a_1 a_2 \leqslant \frac{1}{q_1} a_1^{q_1} + \frac{1}{q_2} a_2^{q_2}, \quad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1, \quad a_1, a_2 \geqslant 0$$

вытекает арифметическое трехпараметрическое неравенство Юнга

$$a_1 a_2 \leqslant \varepsilon a_1^{q_1} + \mu(\varepsilon) a_2^{q_2}, \quad \mu(\varepsilon) = \frac{1}{q_2 (q_1 \varepsilon)^{q_2/q_1}}. \tag{5.22}$$

Применяя неравенство (5.22) при

$$q_1 = \frac{2}{\delta}, \quad q_2 = \frac{2}{2-\delta},$$

мы получим следующее неравенство:

$$a|x-y|^{\delta} \leqslant \varepsilon |x-y|^2 + \mu(\varepsilon), \quad \mu = \mu(\varepsilon) = \frac{c_1}{\varepsilon^{\delta/(2-\delta)}}, \quad \delta \in (0,1). \tag{5.23}$$

Используя это неравенство из (5.21), мы получим следующее неравенство:

$$-\varepsilon |x-y|^2 - \mu(\varepsilon) \leqslant u(x,s) - u(y,s) \leqslant \varepsilon |x-y|^2 + \mu(\varepsilon), \tag{5.24}$$

причем тем более выполнено более слабое двустороннее неравенство

$$-\varepsilon(|x-y|^2 + 2Nt) - \mu(\varepsilon) \leqslant w(x,0;y,s) \leqslant \\ \leqslant \varepsilon(|x-y|^2 + 2Nt) + \mu(\varepsilon). \tag{5.25}$$

Заметим, что функция

$$v(x,t;y) = |x-y|^2 + 2Nt$$

при фиксированном $y \in \mathbb{R}^N$ является решением уравнения теплопроводности. Поэтому в силу принципа максимума получим, что имеет место неравенство

$$-\varepsilon(|x-y|^2 + 2Nt) - \mu(\varepsilon) \leqslant w(x,t;y,s) \leqslant \\ \leqslant \varepsilon(|x-y|^2 + 2Nt) + \mu(\varepsilon). \tag{5.26}$$

Положим в этом неравенстве $x = y$ и получим неравенства

$$-\varepsilon 2Nt - \mu(\varepsilon) \leqslant u(x,t+s) - u(x,s) \leqslant \varepsilon 2Nt + \mu(\varepsilon). \tag{5.27}$$

Осталось выбрать оптимальное $\varepsilon > 0$. Возьмем

$$\varepsilon = \frac{1}{t^{\alpha}}.$$

Рассмотрим выражение

$$2Nt^{1-\alpha} + c_1 t^{\alpha\delta/(2-\delta)}, \tag{5.28}$$

в котором мы положим

$$1-\alpha=\alpha\frac{\delta}{2-\delta}\Rightarrow\alpha=\frac{2-\delta}{2}.$$

В результате выражение (5.28) примет следующий вид:

$$(2N+c_1)t^{\delta/2}. \tag{5.29}$$

Итак, неравенства (5.27) примут следующий вид:

$$|u(x,t+s)-u(x,s)|\leqslant bt^{\delta/2},\quad b=2N+c_1. \tag{5.30}$$

З а м е ч а н и е 8. Комбинируя неравенства (5.16) и (5.17) мы приходим к следующему неравенству:

$$|u(x,t)-u(y,s)|\leqslant c_2\left(|x-y|^{\delta}+|t-s|^{\delta/2}\right). \tag{5.31}$$

И это итоговое неравенство является следствием лишь условия (5.15) на начальную функцию $u_0(x)$ и принципа максимума!

§ 6. Единственность решения задачи Коши

Теперь мы можем доказать важный результат, доказанный А. Н. Тихоновым [**?**], о единственности решения задачи Коши при дополнительном условии, которое мы уже ввели, на рост решения при $|x|\to+\infty$, называемым условием Тихонова. Справедливо следующее утверждение:
Т е о р е м а 5. *Пусть* $u_0(x)\in\mathbb{C}(\mathbb{R}^N)$, $f(x,t)\in\mathbb{C}(\mathbb{R}^N\otimes[0,T])$. *Тогда существует не более одного решения* $u(x,t)\in\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N\otimes(0,T])\cap$ $\cap\,\mathbb{C}(\mathbb{R}^N\otimes[0,T])$ *задачи Коши*

$$u_t-\Delta u=f(x,t)\quad \textit{при}\quad (x,t)\in\mathbb{R}^N\otimes(0,T), \tag{6.1}$$

$$u(x,0)=u_0(x)\quad \textit{при}\quad x\in\mathbb{R}^N \tag{6.2}$$

в классе А. Н. Тихонова

$$|u(x,t)|\leqslant M\exp\left(\beta|x|^2\right)\quad \textit{при}\quad x\in\mathbb{R}^N,\quad t\in[0,T], \tag{6.3}$$

где $M>0$ *и* $\beta>0$ *— константы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть утверждение не выполнено и существует два различных решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда рассмотрим функцию

$$w_1(x,t)\stackrel{def:}{=}u_1(x,t)-u_2(x,t),$$

которая удовлетворяет соответствующей однородной задаче Коши и условию

$$w_1(x,t)\leqslant 2M\exp\left(\beta|x|^2\right),$$

причем константа M значения не имеет. Поэтому в силу теоремы 4 имеем

$$w_1(x,t) \leqslant 0.$$

Теперь рассмотрим функцию

$$w_2(x,t) \stackrel{def:}{=} u_2(x,t) - u_1(x,t) = -w_1(x,t)$$

и точно также получим, что

$$w_2(x,t) \leqslant 0.$$

Следовательно,

$$u_1(x,t) = u_2(x,t).$$

Теорема доказана.

Замечание о классе единственности А. Н. Тихонова. Отметим, что есть результаты, которые говорят о том, что существует бесконечно много решений однородной задачи Коши

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T), \tag{6.4}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{6.5}$$

Каждое такое решение, за исключением $u \equiv 0$, растет очень быстро при $|x| \to +\infty$.

Задача 11. [?] Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^1 \otimes (0,T)) \cap \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^1 \otimes [0,T])$ — неотрицательное ограниченное решение уравнения теплопроводности

$$u_t = \Delta u \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \otimes (0,T), \tag{6.6}$$

причем

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in (0,1) \otimes (0,T). \tag{6.7}$$

Доказать, что $u(x,t) = 0$ в слое $\mathbb{R}^3 \otimes (0,T)$.

Решение. Заметим, что в классе ограниченных функций $u(x,t)$ решение задачи Коши дается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,t} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{4t}\right] \varphi(\xi)\,d\xi, \quad \varphi(x) \geqslant 0. \tag{6.8}$$

По условию (6.7) имеем

$$0 = u(1/2,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,t} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \exp\left[-\frac{|1/2-\xi|^2}{4t}\right] \varphi(\xi)\,d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = 0 \Rightarrow u(x,t) = 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \otimes (0,T).$$