ФАЗОВАЯ ПЛОСКОСТЬ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО АВТОНОМНОГО УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА.

**$1^0$. Постановка задачи**.

Рассмотрим автономное уравнение вида

$$y'' = f(y). \tag{1}$$

Как известно, это уравнение эквивалентно следующей нормальной системе ОДУ первого порядка:

$$\frac{dy}{dt} = z, \qquad \frac{dz}{dt} = f(y), \tag{2}$$

Точки покоя этой системы ДУ определяются из системы алгебраических уравнений $\begin{cases} z = 0 \\ f(y) = 0 \end{cases}.$

Пусть уравнение

$$f(y) = 0 \tag{3}$$

имеет $n$ корней $y = y_i^0$ , $i = \overline{1,n}$. Тогда точки $\left(y_i^0, 0\right)$ фазовой плоскости $(y,z)$ являются точками покоя системы (2). Ниже мы будем предполагать, что корни уравнения (3) простые, т.е.

$$f_y\left(y_i^0\right) \neq 0, \ \ i = \overline{1,n}.$$

На практике бывает нужно не только исследовать устойчивость точек покоя, но и знать расположение всего множества траекторий на фазовой плоскости. Напомним, что проекция интегральной кривой на фазовую плоскость называется фазовой траекторией. Фазовые траектории могут быть эффективно использованы для качественного описания поведения решения. Для уравнения вида (1) это описание достаточно простое и полное. Кроме того, оказывается, что расположение фазовых траекторий в малой окрестности точек покоя уравнения (1) полностью аналогично расположению фазовых траекторий для линеаризованного уравнения (1) (линеаризованной системы (2)).

**$2^0$. Система первого приближения.**

Разложим функцию $f(y)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $y = y_i^0$ ($i$ – фиксировано) с точностью до членов первого порядка: $f(y) = \underbrace{f\left(y_i^0\right)}_{=0} + f_y\left(y_i^0\right)\left(y - y_i^0\right) + o\left(y - y_i^0\right)$. В первом приближении система (1) имеет вид $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = z \\ \dfrac{dz}{dt} = f_y\left(y_i^0\right)\left(y - y_i^0\right) \end{cases}.$

Обозначим $y - y_i^0 = \overline{y}$. В новых переменных исследование точки покоя $(y,z) = \left(y_i^0, 0\right)$ свелось к исследованию точки покоя $(\overline{y}, z) = (0,0)$ системы $\begin{cases} \dfrac{d\overline{y}}{dt} = z \\ \dfrac{dz}{dt} = f_y\left(y_i^0\right)\overline{y} \end{cases}$. Найдем характеристические числа этой системы. Корни характеристического уравнения $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ f_y\left(y_i^0\right) & -\lambda \end{vmatrix} = 0$ являются корнями квадратного уравнения $\lambda^2 = f_y\left(y_i^0\right)$. То есть, $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{f_y\left(y_i^0\right)}$. Если $f_y\left(y_i^0\right) > 0$, то характеристические числа действительные и разных знаков, если $f_y\left(y_i^0\right) < 0$, то характеристические числа чисто мнимые. В первом случае из теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению следует, что соответствующая точка покоя системы (2) является неустойчивой. Во втором случае эта теорема ответ об устойчивости не дает. Для системы первого приближения в случае действительных $\lambda$ разных знаков точка покоя является седлом, а в случае чисто мнимых $\lambda$ - центром. Эта классификация переносится и на систему (2) (и на уравнение (1)).

**$3^0$. Фазовая плоскость.**

В области $z > 0$ фазовый портрет уравнения (1) (системы (2)) образуют фазовые траектории, являющиеся интегральными кривыми уравнения

$$\frac{dz}{dy} = \frac{f(y)}{z}, \qquad (4).$$

которое формально получается после почленного деления второго уравнения системы (2) на первое. Переменные в уравнении (4) разделяются. Имеем:

$$zdz = f(y)\,dy,$$

откуда

$$\frac{z^2}{2} = \int f(y)\,dy + C$$

или

$$z = \sqrt{2\int f(y)\,dy + C}\,.$$

Аналогично, в области $z < 0$,

$$z = -\sqrt{2\int f(y)\,dy + C}\,.$$

Очевидно, что при каждом $C$ интегральные кривые, если они существуют, расположены симметрично относительно оси $y$ на фазовой плоскости.

Фазовую траекторию, стремящуюся при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$ к некоторому седлу $\left(y^0, 0\right)$ называют сепаратрисой этого седла.

Уравнения сепаратрис имеют вид:

$$z = \pm\sqrt{2\int_{y^0}^{y} f(y')\,dy'}\,. \qquad (5)$$

Отметим, что в силу автономности уравнения (1) и единственности решения задачи Коши для этого уравнения, через каждую точку $\left(y^0, z^0\right)$ фазовой плоскости может проходить только одна фазовая траектория. Откуда следует, что фазовые траектории уравнения (1) не пересекаются, а также, следует, что точки покоя не могут лежать на фазовых траекториях системы. Фазовые траектории могут лишь стремиться к указанным точкам при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$. Если начальное условие задачи Коши соответствует в точке покоя, то решение не меняется со временем, оставаясь этой точкой покоя.

**$4^0$. Уравнение с квадратичной нелинейностью.**

Рассмотрим уравнение вида $\dfrac{d^2y}{dt^2} = y(a - y) \equiv f(y)$, где $a > 0$. Это уравнение эквивалентно системе ДУ 1-го порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = z \\ \dfrac{dz}{dt} = y(a - y) \end{cases} \qquad (6)$$

Корни уравнения $f(y) = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = a$ определяют две точки покоя системы ДУ: $(y,z) = (0,0)$ и $(y,z) = (a,0)$. Причем, $f_y(0) = a > 0$; $f_y(a) = -a < 0$. Согласно $2^0$, $(0,0)$ - точка покоя типа седло, $(a,0)$ - точка покоя типа центр.

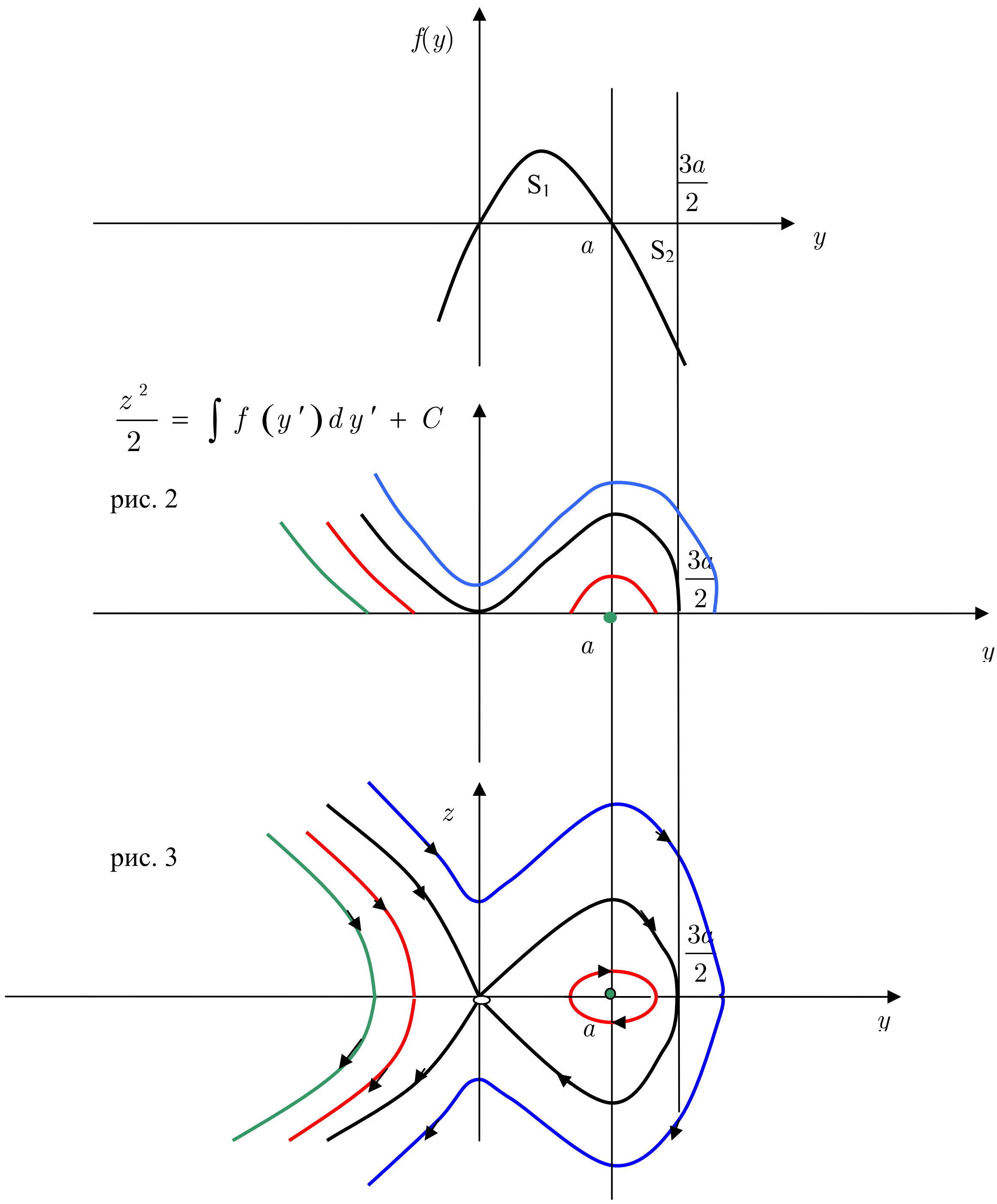
Получим явное выражение для фазовых траекторий системы (6), в соответствии с п. $3^0$.

$$\frac{z^2}{2} = \int y'(a - y')\,dy' + C = \Phi(y) + C,$$

где $\Phi(y) = a\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}$ .

$$z = \pm 2\sqrt{\int y'(a - y')\,dy' + C} = \pm 2\sqrt{\Phi(y) + C}\,. \tag{7}$$

Нарисуем фазовый портрет для системы (6):




На рисунке 1 показана функция $f(y)$. На рисунке 2 показаны различные первообразные $f(y)$: $\dfrac{z^2}{2} = \int f(y')\,dy' + C = \Phi(y) + C$. Черным цветом выделена первообразная, отвечающая сепаратрисе. По графику видно, что значение этой первообразной в каждой точке численно равно площади под кривой $f(y)$, изображенной на рисунке 1. (Будем полагать значение площади положительным при $f(y) > 0$ и отрицательным при $f(y) < 0$). В области положительных значений $y$ функция $\dfrac{z^2}{2}$ возрастает до тех пор, пока $f(y) > 0$, а когда $f(y)$ становится меньше нуля, $\dfrac{z^2}{2}$ начинает убывать ($y = a$). Когда площади $S_1$ и $S_2$ сравняются по абсолютной величине, первообразная $\Phi(y) = \frac{z^2}{2}$ обратится в нуль. Соответствующее значение $y = \tilde{y}$ можно определить из уравнения: $\int\limits_0^a y'(a - y')\,dy' = -\int\limits_a^{\tilde{y}} y'(a - y')\,dy'$ то есть, $\int\limits_0^{\tilde{y}} y'(a - y')\,dy' = 0$. Это значение $\tilde{y} = \frac{3a}{2}$. Дальше в область положительных $y$ сепаратрису продолжить нельзя, так как $\frac{z^2}{2}$ может принимать только неотрицательные значения. В области отрицательных значений $y$, $\frac{z^2}{2} = \int\limits_0^y f(y')\,dy'$ - положительная величина при $f(y) < 0$, и первообразная $\Phi(y) = \frac{z^2}{2}$ существует при всех отрицательных $y$.

На рисунке 3 черным цветом показаны сепаратрисы седла $(0,0)$. На фазовой плоскости (рис.3) сепаратриса, расположенная в правой полуплоскости, образует так называемую петлю.

Стрелками показано направление течения времени. Это направление можно определить, исходя из следующих соображений: если $z = \frac{dy}{dt} > 0$, то $y$–возрастает.

Будем изменять значение $C$. При увеличении $C$ кривая на рисунке 2 приподнимается (синий цвет). Формула (7) определяет незамкнутые фазовые траектории, которые продолжаются вправо до некоторой точки, лежащей правее $\tilde{y}$.

При уменьшении $C$ кривая на рисунке 2 опускается и её положительная часть будет состоять из двух отдельных кривых (красный цвет). (7) определяет в правой полуплоскости замкнутые траектории, стягивающиеся с уменьшением $C$ к точке покоя $(a,0)$. Замкнутые траектории соответствуют периодическим движениям. В левой полуплоскости (7) определяет незамкнутые траектории (см.рис.3).

**Задача:** При каких значениях $y^0$ разрешима краевая задача $\frac{d^2y}{dt^2} = y(a - y)$, $\quad y(0) = y^0$, $\quad y(\infty) = 0$.

**Решение:** Задача разрешима при тех $y^0$, которым соответствует точка фазовой плоскости, лежащая на сепаратрисе, входящей в точку покоя $(0,0)$. Подберем значение $y'(0) = z(0)$ так, чтобы точка $(y^0, z(0))$ фазовой плоскости находилась на сепаратрисе. Тогда, двигаясь по сепаратрисе от точки $(y^0, z(0))$ в направлении $t \to +\infty$, будем стремиться к точке $(0,0)$ при $t \to +\infty$. При $y^0 < 0$ и при $y^0 = \frac{3a}{2}$ задача имеет единственное решение, при $0 < y^0 < \frac{3a}{2}$ - два решения, а при $y^0 > \frac{3a}{2}$ решений нет.

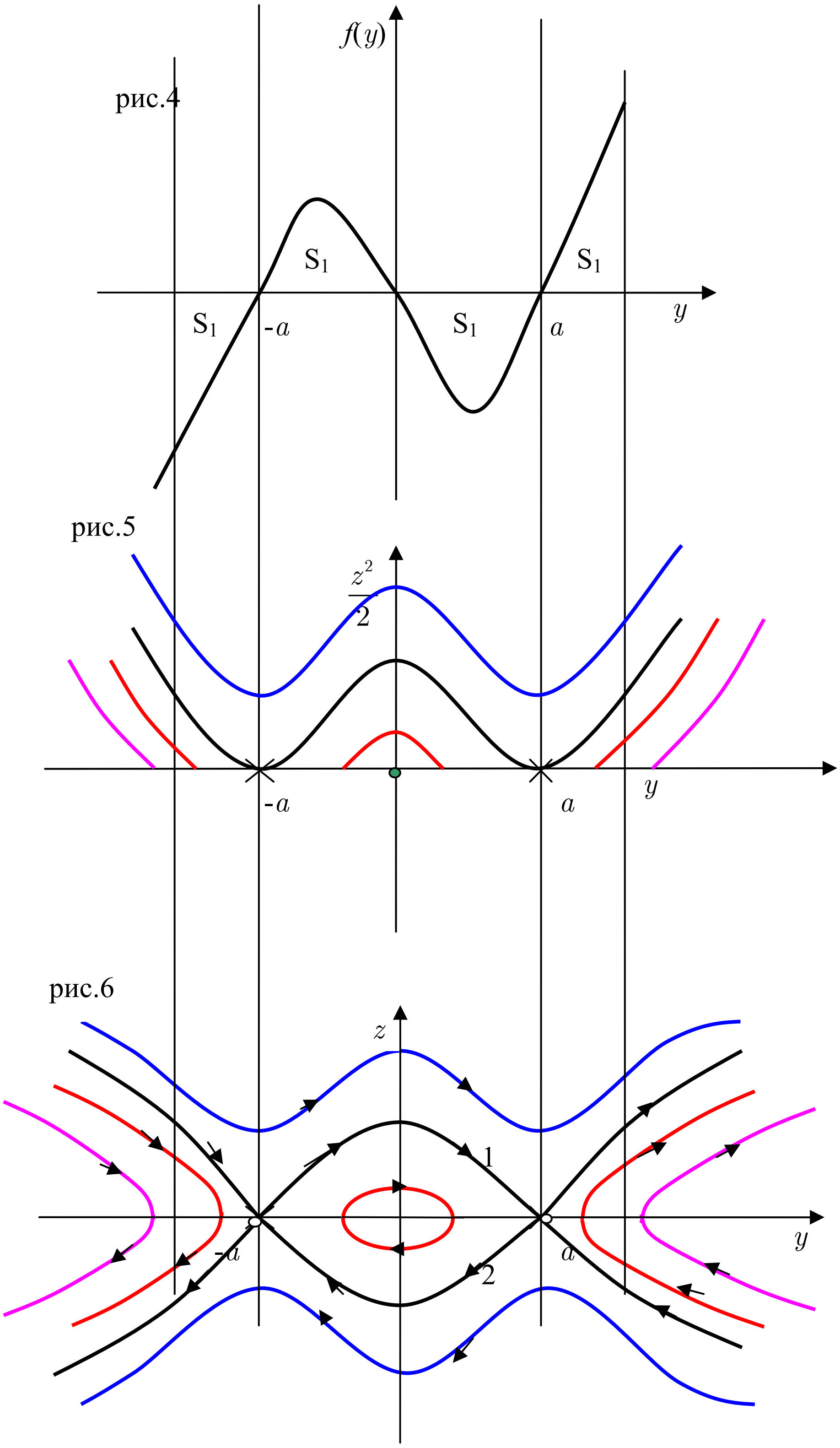
### $5^0$. Уравнение с кубической нелинейностью.

*а) Случай ячейки на фазовой плоскости.*

Нарисуем фазовый портрет уравнения $\frac{d^2y}{dt^2} = y(y^2 - a^2)$. $f(y) = y(y^2 - a^2)$

1. Определяем точки покоя: $f(y) = 0 \Leftrightarrow y\left(y^2 - a^2\right) = 0$. Точки покоя: $y = 0, \quad y = \pm a$.
2. На рис.4 показан график функции $f(y) = y\left(y^2 - a^2\right)$. Определяем по этому графику знак производной $f_y$ для каждого значения $y$, соответствующего точкам покоя: $f_y(0) < 0$, $f_y(\pm a) > 0$. Значит, точка $(0,0)$ - точка покоя типа центра, а точки $(a,0)$ и $(-a,0)$ - сёдла.
3. Запишем неопределённый интеграл $\dfrac{z^2}{2} = \int\limits_a^y f(y')\,dy' = \dfrac{y^4}{4} - a^2\dfrac{y^2}{2} + C$.

   Заметим, что функция $f(y)$ - нечетная, значит, её первообразная - функция четная, и фазовый портрет будет симметричным относительно оси ординат. В силу симметрии, $\int\limits_a^y f(y')\,dy' = \int\limits_{-a}^y f(y')\,dy'$ и уравнения сепаратрис сёдел $(a,0)$ и $(-a,0)$ можно записать в едином виде: $z = \pm\sqrt{2\int\limits_a^y f(y')\,dy'}$. Сепаратрисы выделены на рис. 6 черным цветом. Сепаратрисы 1 и 2 оказываются общими. В этом случае говорят, что сепаратрисы 1 и 2 образуют ячейку на фазовой плоскости.




4. Будем изменять значение $C$. При увеличении $C$ график первообразной приподнимается над осью $OY$. Соответствующая фазовая траектория будет определена на всей вещественной оси (синий цвет). Если уменьшать значение $C$, то график первообразной опускатся относительно оси $OY$, и область неотрицательных значений $\Phi(y) = \dfrac{z^2}{2}$ будет состоять из трех промежутков (рис.5 красный цвет).

Внутри промежутка $-a < y < a$ этим значениям $C$ соответствуют замкнутые фазовые траектории (рис.6). При достаточно больших по абсолютной величине отрицательных значениях $C$ первообразная $\Phi(y) = \dfrac{z^2}{2}$ принимает неотрицательные значения только при достаточно больших значениях $|y|$. Этим значениям $C$ соответствуют незамкнутые фазовые траектории, обозначенные на рисунке 6 сиреневым цветом.

*б) Несимметричный случай.*

Нарисуем фазовый портрет уравнения $\dfrac{d^2y}{dt^2} = y(y + a_1)(y - a_2), \quad 0 < a_2 < a_1$.

$f(y) = y(y + a_1)(y - a_2)$

1. Точки покоя этого уравнения: $y = 0, \quad y = -a_1, \quad y = a_2$.
2. На рисунке 7 показан график функции $f(y) = y(y + a_1)(y - a_2)$. Определяем по этому графику знак производной $f_y$ для каждого значения $y$, соответствующего точкам покоя: $f_y(0) < 0, \quad f_y(-a_1) > 0, \quad f_y(a_2) > 0$. Значит, точка $(0,0)$ - точка покоя типа центра, а точки $(-a_1, 0)$ и $(a_2, 0)$ - сёдла.
3. На рисунке 8 показан график первообразной $\dfrac{z^2}{2} = \int f(y')\,dy' + C$. Выражение $z = \pm\sqrt{2\int\limits_{-a_1}^{y} F(y')\,dy'}$ определяет сепаратрисы седла $(-a_1, 0)$ на фазовой плоскости (рис.9, черный цвет).
4. При достаточно больших $C > 0$ график первообразной приподнимется над осью $OY$ (синий цвет). Если значение $C$ уменьшается, то график первообразной опускается. На рисунке 8 сиреневым цветом показана первообразная $\dfrac{z^2}{2} = \int\limits_{a_2}^{y} F(y')\,dy'$. Она касается оси $OY$ в точке $(a_2, 0)$. На фазовой плоскости (рис.9) ей соответствуют сепаратрисы седла $(a_2, 0)$. В остальном, рассмотрение аналогично рассмотрению фазового портрета с квадратичной нелинейностью.

рис.7

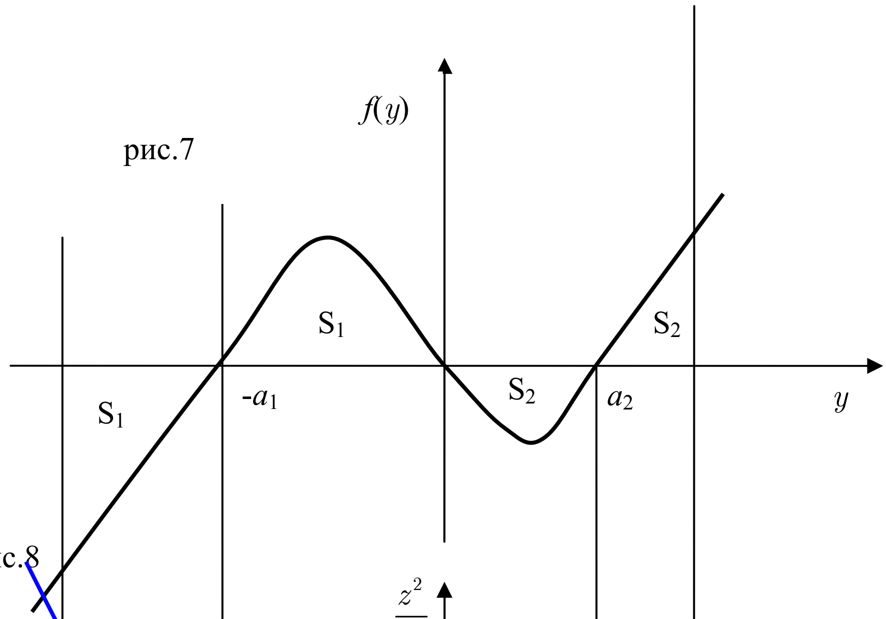



рис.8

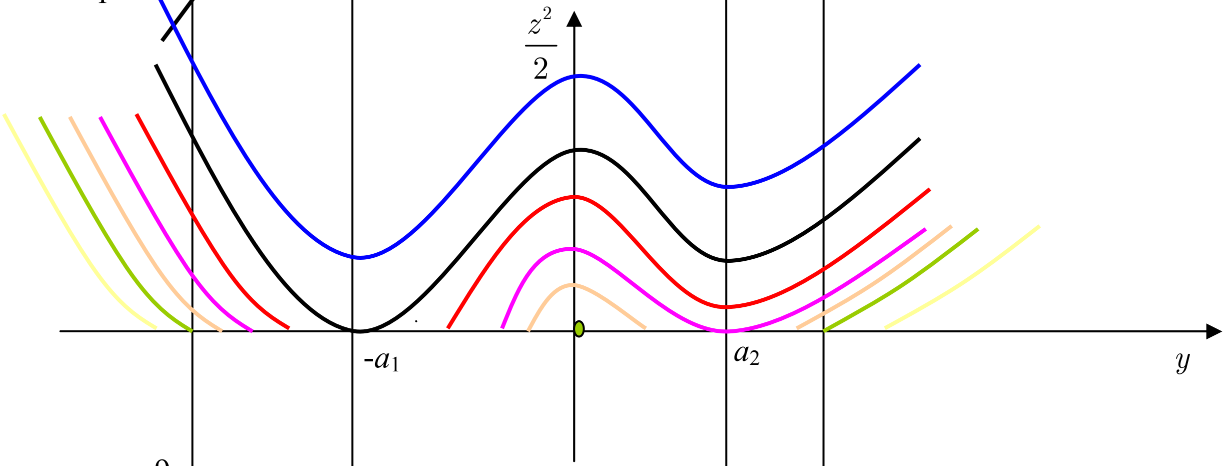



рис.9