Лекция 2

ПРОСТРАНСТВО $\mathbb{AC}$ И ПРОСТРАНСТВА ГЕЛЬДЕРА.

§ 1. Определение пространства абсолютно непрерывных функций

Определение 1. *Будем говорить, что функция $f(x) \in \mathbb{AC}[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любой системы непересекающихся интервалов $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{+\infty}$ из отрезка $[a, b]$ таких, что*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - a_k) < \delta$$

вытекает неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Заметим, что множество $\mathbb{AC}[a, b]$ является линейным.

□ Действительно, возьмем произвольные функции $f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{AC}[a, b]$ и произвольные постоянные $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^1$. Тогда для функции $f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ имеет место неравенство

$$|f(b_k) - f(a_k)| \leqslant \alpha_1 |f_1(b_k) - f_1(a_k)| + \alpha_2 |f_2(b_k) - f_2(a_k)|,$$

откуда сразу же получаем неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |f(b_k) - f(a_k)| \leqslant \alpha_1 \sum_{k=1}^{+\infty} |f_1(b_k) - f_1(a_k)| + \alpha_2 \sum_{k=1}^{+\infty} |f_2(b_k) - f_2(a_k)|.$$

Из этого неравенства и вытекает линейность множества $\mathbb{AC}[a, b]$. ⊠

Можно дать эквивалентное определение множества абсолютно непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций.

Определение 2. *Будем говорить, что функция $f(x) \in \mathbb{AC}[a, b]$, если найдется функция $g(x) \in L^1(a, b)$ и такая* *постоянная* $c \in \mathbb{R}^1$, *что имеет место представление*

$$f(x) = c + \int\limits_a^x g(y)\,dy. \tag{1.1}$$

Вопрос. Первый вопрос, который возникает: как связаны пространства $\mathbb{AC}[a,b]$ и $\mathbb{BV}[a,b]$? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1. *Имеет место вложение* $\mathbb{AC}[a,b] \subset \mathbb{BV}[a,b]$.

Доказательство.

Пусть T — это произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. Тогда в силу определения 2 абсолютно непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} g(y)\,dy \right| \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |g(y)|\,dy \leqslant \int\limits_a^b |g(y)|\,dy < +\infty.$$

Теорема доказана.

Справедлива формула интегрирования по частям.

Теорема 2. *Для любых функций* $f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{AC}[a,b]$ *справедлива формула интегрирования по частям*

$$\int\limits_a^b f_1(x) f_2^{'}(x)\,dx = f_1(b)f_2(b) - f_1(a)f_2(a) - \int\limits_a^b f_1(x) f_2^{'}(x)\,dx. \tag{1.2}$$

Доказательство.

1. В третьей семинаре-лекции будет доказано, что функция $f(x) \in \mathbb{AC}[a,b]$ почти всюду имеет классическую производную $f^{'}(x) \in L^1(a,b)$.

2. Докажем, что произведение двух абсолютно непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций является абсолютно непрерывной на отрезке $[a,b]$ функцией.

□ Во-первых, в силу теоремы 1 имеем, что для $f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{AC}[a,b] \subset \mathbb{BV}[a,b]$. Докажем, что $\mathbb{BV}[a,b] \subset \mathbb{B}[a,b]$ [1]. Из неравенства

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(a)| + |f(a)|$$

[1] Символом $\mathbb{B}[a,b]$ мы обозначили линейное пространство ограниченных на отрезке $[a,b]$ функций.

вытекает неравенство

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \leqslant V_a^b(f) + |f(a)| < +\infty.$$

Поэтому

$$c_1 := \sup_{x\in[a,b]} |f_1(x)| < +\infty, \quad c_2 := \sup_{x\in[a,b]} |f_2(x)| < +\infty.$$

Тогда согласно определению абсолютно непрерывных функций для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из условия

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - a_k) < \delta$$

вытекают неравенства

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |f_1(b_k) - f_1(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2c_2} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |f_2(b_k) - f_2(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2c_1}.$$

Теперь заметим, что имеет место цепочка неравенств

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |f_1(b_k)f_2(b_k) - f_1(a_k)f_2(a_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |f_1(b_k) - f_1(a_k)|\,|f_2(b_k)| +$$
$$+ \sum_{k=1}^{+\infty} |f_2(b_k) - f_2(a_k)|\,|f_1(a_k)| \leqslant c_2 \sum_{k=1}^{+\infty} |f_1(b_k) - f_1(a_k)| +$$
$$+ c_1 \sum_{k=1}^{+\infty} |f_2(b_k) - f_2(a_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

⊠

Шаг 3. Стало быть, имеем $(f_1(x)f_2(x))' \in L^1(a,b)$ и в силу определения 2, в котором нужно положить $g(x) = (f_1(x)f_2(x))'$, получим равенство

$$f_1(b)f_2(b) - f_1(a)f_2(a) = \int_a^b (f_1(x)f_2(x))'\, dx.$$

Для окончания доказательства достаточно заметить, что почти всюду имеет место равенство

$$(f_1(x)f_2(x))' = f_1(x)f_2'(x) + f_1'(x)f_2(x).$$

Теорема доказана.

§ 2. Функция «шапочка»

Введем функцию «шапочка»:

$$\omega(t) = c \begin{cases} \exp\left\{\frac{1}{|t|^2-1}\right\} & \text{при} \quad |t| < 1; \\ 0, & \text{при} \quad |t| \geqslant 1. \end{cases}, \tag{2.1}$$

причем постоянная $c > 0$ выбирается из условия нормировки «шапочки»:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} dt\, \omega(t) = 1.$$

Из определения «шапочки» вытекает, что $\omega(t) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ и $\operatorname{supp}\{\omega\} = [-1, 1]$.

Теперь рассмотрим функцию $u(x) \in L^1(\mathbb{R}^1)$ и введем срезку этой функции $u_\varepsilon(x)$:

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)\, dy. \tag{2.2}$$

Функция $u_\varepsilon(x)$ обладает следующими свойствами:
(i) $u_\varepsilon(x) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^1)$;
(ii) $\|u_\varepsilon\|_{L^1} \leqslant \|u\|_{L^1}$;
(iii) $\|u - u_\varepsilon\|_1 \to 0$ при $\varepsilon \to +0$.

Справедлива следующая важная лемма.

Лемма 1. *Пусть $u(x) \in L^1(\mathbb{R}^1)$, тогда справедливо следующее выражение*:

$$\sup_{h(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(a,b),\ |h| \leqslant 1} \int\limits_a^b u(x) h(x)\, dx = \int\limits_a^b |u(x)|\, dx. \tag{2.3}$$

Доказательство.

Шаг 1. Определим новую функцию

$$w(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} u(x)/|u(x)|, & \text{если} \quad u(x) \neq 0; \\ 0, & \text{если} \quad u(x) = 0. \end{cases}$$

Теперь по этой функции построим функцию

$$v(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} w(x), & \text{если} \quad x \in [a+\delta, b-\delta]; \\ 0, & \text{если} \quad x \in (a, a+\delta) \cup (b-\delta, b). \end{cases}$$

Шаг 2. Понятно, что построенная функция $v(x)$ измерима на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяет неравенству $|v(x)| \leqslant 1$, а значит, принадлежит пространству $L^{\infty}(a,b) \subset L^{1}(a,b)$. [1] Поэтому для функции $v(x)$, которую можно продолжить нулем вне отрезка $[a,b]$, определена срезка

$$h_n(x) = v_\varepsilon(x) \in \mathbb{C}_0^{\infty}(a,b), \quad \varepsilon = \frac{1}{n} < \delta \quad \text{для всех} \quad n \geqslant N_0 \in \mathbb{N}.$$

□ Действительно, принадлежность построенной срезки пространству $\mathbb{C}_0^{\infty}(a,b)$ следует из формулы (2.2):

$$v_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{a+\delta}^{b-\delta} \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) v(y)\,dy,$$

причем это выражение равно нулю при $x \geqslant b-\delta+\varepsilon$ и $x \leqslant a+\delta-\varepsilon$, значит это финитная функция вместе со всеми своими производными на интервале (a,b), поскольку по условию $\varepsilon < \delta$. ⊠

Шаг 3. По построению последовательность $\{h_n(x)\}$ обладает следующими свойствами:

$$|h_n(x)| \leqslant 1, \quad h_n(x) \in \mathbb{C}_0^{\infty}(a,b).$$

Таким образом, построенная последовательность является допустимой, т. е. принадлежит классу, по которому берется supremum в выражении (2.3). Из вида левой части этого выражения следует, что она не превышает выражение

$$\int\limits_a^b |u(x)|\,dx. \tag{2.4}$$

Шаг 4. Докажем, что на допустимом множестве достигается величина (2.4). Для построенной последовательности $\{h_n(x)\}$ по свойству (iii) срезки имеет место следующее предельное равенство:

$$h_n(x) \to v(x) \quad \text{сильно в} \quad L^1(a,b) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Следовательно, найдется такая подпоследовательность $\{h_{n_k}(x)\} \subset$ $\subset \{h_n(x)\}$, что

$$h_{n_k}(x) \to v(x) \quad \text{почти всюду в} \quad x \in (a,b) \quad \text{при} \quad n_k \to +\infty,$$

а значит,

$$h_{n_k}(x)u(x) \to |u(x)| \quad \text{п.в. в} \quad x \in [a+\delta, b-\delta] \quad \text{при} \quad n_k \to +\infty,$$

и

$$h_{n_k}(x)u(x) \to 0 \quad \text{п.в. в} \quad x \in (a, a+\delta) \cup (b-\delta, b) \quad \text{при} \quad n_k \to +\infty.$$

[1] Указанное вложение выполнено поскольку $[a,b]$ — это ограниченное множество.

Поэтому имеет место равенство

$$\sup_{h(x)\in\{h_{n_k}(x)\}} \int\limits_a^b u(x)h(x)\,dx = \int\limits_{a+\delta}^{b-\delta} |u(x)|\,dx.$$

В силу произвольности $\delta > 0$ приходим к утверждению леммы.

Лемма доказана.

Теперь введем на линейном пространстве $\mathbb{AC}[a,b]$ норму:

$$\|u\|_{ac} \equiv \|u\|_{L^1} + \left\|\frac{du}{dx}\right\|_{L^1}. \tag{2.5}$$

Справедливо следующее основное утверждение этого параграфа.

Теорема 3. *Линейное пространство* $\mathbb{AC}[a,b]$ *является банаховым относительно нормы* (2.5).

§ 3. Основная лемма вариационного исчисления

Основная лемма вариационного исчисления. *Пусть* $f(x) \in L^1(a,b)$ *и для каждой функции* $h(x) \in \mathbb{C}_0^\infty(a,b)$ *имеет место равенство*:

$$\int\limits_a^b f(x)h(x)\,dx = 0,$$

тогда $f(x) = 0$ *для почти всех* $x \in (a,b)$.

Доказательство.

В силу условий леммы имеем

$$\sup_{h(x)\in\mathbb{C}_0^\infty(a,b)\ |h(x)|\leqslant 1} \int\limits_a^b f(x)h(x)\,dx = 0.$$

Тогда в силу результата леммы 1 имеем

$$\int\limits_a^b |f(x)|\,dx = 0,$$

откуда сразу же получаем требуемый результат.

Лемма доказана.

§ 4. Класс функций Гельдера

Рассмотрим следующий класс функций при $\alpha > 0$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant c_\alpha |x-y|^\alpha \quad \text{для всех} \quad x, y \in [a,b]. \tag{4.1}$$

Предположим сначала, что $\alpha > 1$, тогда

$$\left|f^{'}(x)\right| = \left|\lim_{y\to x}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leqslant \lim_{y\to x}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leqslant$$
$$\leqslant c_1\lim_{y\to x}|x-y|^{\alpha-1} = 0 \quad \text{для всех} \quad x\in[a,b].$$

Следовательно, при $\alpha > 1$ класс функций состоит из произвольных постоянных.

Поэтому имеет смысл рассматривать только функции, указанного класса, при $\alpha \in (0,1]$.

§ 5. Определение пространства Гельдера $\mathbb{C}^{k+\delta}$

Пусть Ω — область пространства $\mathbb{R}^N$,

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) \in \mathbb{Z}^N_+$$

— мультииндекс длины N с целыми неотрицательными координатами,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N$$

— длина мультииндекса,

$$\partial^\alpha = \partial^{\alpha_1}_{x_1}\partial^{\alpha_2}_{x_2}\cdots\partial^{\alpha_N}_{x_N}$$

— композиция частных производных по соответствующим переменным и соответствующие мультииндексу

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N), \quad x = (x_1, ..., x_N)\in\Omega, \quad \delta\in(0,1].$$

Определение 3. *Посредством $\mathbb{C}^k(\overline{\Omega})$ обозначим пространство функций, имеющих все частные производные $\partial^\alpha f(x)$ до порядка $|\alpha| \leqslant k$, которые непрерывны в $\overline{\Omega}$.*

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Линейное пространство $\mathbb{C}^k(\overline{\Omega})$ является банаховым относительно следующей нормы*

$$\|f\|_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|\alpha|\leqslant k}\sup_{x\in\Omega}|\partial^\alpha f(x)|. \tag{5.1}$$

Определение 4. *Будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\delta\in(0,1]$, если конечна следующая полунорма*:

$$[f]_\delta \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x,y\in\Omega,\, x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\delta}. \tag{5.2}$$

Дадим определение пространства $\mathbb{C}^{k,\delta}(\overline{\Omega})$.

Определение 5. *Определим пространство $\mathbb{C}^{k,\delta}(\overline{\Omega})$ как подпространство пространства функций $f(x)\in\mathbb{C}^k(\overline{\Omega})$ таких, что*

$\partial^\alpha f(x)$ удовлетворяет условию Гельдера (5.2) *для всех мультииндексов α длины $k : |\alpha| = k$.*

Теперь введем норму на линейном пространстве $\mathbb{C}^{k,\delta}(\overline{\Omega})$ (проверьте линейность этого пространства!):

$$\|f\|_{k,\delta} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|\alpha|\leqslant k} \sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha f(x)| + \sum_{|\alpha|=k} [\partial^\alpha f]_\delta\,. \tag{5.3}$$

Теорема 5. *Линейное пространство $\mathbb{C}^{k,\delta}(\overline{\Omega})$ является банаховым относительно нормы* (5.3).

Доказательство.

Шаг 1. Итак, пусть $\{f_n\} \subset \mathbb{C}^{k,\delta}(\overline{\Omega})$ фундаментальная последовательность относительно нормы (5.3). Поскольку пространство $\mathbb{C}^k(\overline{\Omega})$ банахово относительно нормы (5.1), то последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна также относительно нормы (5.1) и, значит, имеем

$$\partial^\alpha f_n(x) \rightrightarrows \partial^\alpha f(x) \quad \text{равномерно по} \quad x \in \overline{\Omega} \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

для всех мультииндексов α длины $|\alpha| \leqslant k$.

Шаг 2. Для любого $\varepsilon > 0$ в силу фундаментальности последовательности $\{f_n\}$ найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $n, m \geqslant n_0$ имеет место неравенство

$$[\partial^\alpha f_n - \partial^\alpha f_m]_\delta \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех мультииндексов} \quad |\alpha| = k. \tag{5.4}$$

Отсюда вытекает неравенство

$$|[\partial^\alpha f_n(x) - \partial^\alpha f_m(x)] - [\partial^\alpha f_n(y) - \partial^\alpha f_m(y)]| \leqslant \\ \leqslant |x-y|^\delta [\partial^\alpha f_n - \partial^\alpha f_m]_\delta \leqslant \varepsilon |x-y|^\delta.$$

Перейдем в получившемся неравенстве к по точечному пределу при $m \to +\infty$ и получим неравенство

$$|[\partial^\alpha f_n(x) - \partial^\alpha f(x)] - [\partial^\alpha f_n(y) - \partial^\alpha f(y)]| \leqslant \varepsilon |x-y|^\delta.$$

Отсюда сразу же получим

$$[\partial^\alpha f_n - \partial^\alpha f]_\delta \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда, во-первых, в силу неравенства треугольника получаем неравенство

$$[\partial^\alpha f]_\delta \leqslant [\partial^\alpha f_n - \partial^\alpha f]_\delta + [\partial^\alpha f_n]_\delta,$$

которое означает, что $f(x) \in \mathbb{C}^{k,\delta}(\overline{\Omega})$, а во-вторых, получаем, что

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^{k,\delta}(\overline{\Omega}).$$

Теорема доказана.

§ 6. Интерполяционное неравенство

Лемма 2. *Справедливо следующее неравенство*:

$$[f]_\delta \leqslant [f]_{\delta_1}^{1-\nu}[f]_{\delta_2}^{\nu}, \tag{6.1}$$

где

$$\delta = (1-\nu)\delta_1 + \nu\delta_2, \quad \nu \in [0,1], \quad 0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta \leqslant \delta_2 \leqslant 1.$$

Доказательство.

Справедливо следующее соотношение:

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\delta} = \frac{|f(x)-f(y)|^{1-\nu}}{|x-y|^{(1-\nu)\delta_1}}\frac{|f(x)-f(y)|^{\nu}}{|x-y|^{\nu\delta_2}} \leqslant [f]_{\delta_1}^{1-\nu}[f]_{\delta_2}^{\nu},$$

где

$$\delta = (1-\nu)\delta_1 + \nu\delta_2, \quad 0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta \leqslant \delta_2 \leqslant 1, \quad \nu \in [0,1].$$

Взяв supremum по $x, y \in \Omega$ от обеих частей указанного соотношения получим требуемое неравенство.

Лемма доказана.

Справедлива следующая теорема вложения.

Теорема 6. *Имеет место непрерывное вложение банаховых пространств*:

$$\mathbb{C}^{k,\delta_1}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{k,\delta_2}(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{C}^{k,\delta}(\overline{\Omega}), \tag{6.2}$$

где

$$\delta = (1-\nu)\delta_1 + \nu\delta_2, \quad 0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta \leqslant \delta_2 \leqslant 1, \quad \nu \in [0,1].$$

Доказательство.

Утверждение теоремы вытекает из следующей цепочки несложных рассуждений. Пусть

$$f(x) \in \mathbb{C}^{k,\delta_1}(\overline{\Omega}) \cap \mathbb{C}^{k,\delta_2}(\overline{\Omega}),$$

тогда, во-первых, $f(x) \in \mathbb{C}^k(\overline{\Omega})$, а во-вторых, для каждого мультииндекса α длины $|\alpha| = k$ имеем

$$[\partial^\alpha f]_{\delta_1} \leqslant c_1 < +\infty, \quad [\partial^\alpha f]_{\delta_2} \leqslant c_2 < +\infty,$$

поэтому в силу интерполяционного неравенства (6.1) получаем

$$[\partial^\alpha f]_{\delta} \leqslant c_3 < +\infty.$$

Отсюда приходим к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

§ 7. Параболические пространства Гельдера

Пусть D — есть область пространства $\mathbb{R}^{N+1}$. Точки этого пространства будем записывать как $z = (x,t)$, где $t \in \mathbb{R}^1$ и $x \in \mathbb{R}^N$. Введем параболическое расстояние между различными точками $z_1 = (x_1, t_1)$ и $z_2 = (x_2, t_2)$ как

$$\rho(z_1, z_2) \stackrel{\text{def}}{=} |t_1 - t_2|^{1/2} + |x_1 - x_2|.$$

Дадим следующее определение.

Определение 6. *Назовем параболическим пространством Гельдера множество всех функций, для которых конечна следующая величина*:

$$[f]_{\delta/2,\delta} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{z_1,z_2\in D,\, z_1\neq z_2} \frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{\rho^{\delta}(z_1,z_2)} \tag{7.1}$$

при некотором $\delta \in (0,1]$.

Определение 7. *Посредством* $\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{D})$ *мы обозначаем класс функций, которые один раз непрерывно дифференцируемы по* t *и два раза непрерывно дифференцируемы по* x *в замыкании* $\overline{D}$ *области* D.

Введем на линейном пространстве $\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{D})$ норму следующим образом

$$\|f\|_{2,1} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{(x,t)\in D}|f(x,t)| + \sup_{(x,t)\in D}|f_t(x,t)| + \sum_{i=1}^{N}\sup_{(x,t)\in D}|f_{x_i}(x,t)| + \sum_{i=1}^{N}\sup_{(x,t)\in D}|f_{x_ix_i}(x,t)|. \tag{7.2}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Линейное пространство* $\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{D})$ *является банаховым относительно нормы* (7.2).

На практике необходимость введения параболических пространств Гельдера обусловлена рассмотрением линейных и квазилинейных параболических уравнений в цилиндрических областях вида $D=(0,T)\times\Omega$, $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ — некоторая область. В связи с чем необходимо рассматривать следующий класс функций — $\mathbb{C}^{2+\delta,1+\delta/2}(\overline{D})$. Дадим определение.

Определение 8. *Линейное пространство* $\mathbb{C}^{2+\delta,1+\delta/2}(\overline{D})$ *определяется как класс функций* $f(x,t)$, *которые один раз непрерывно дифференцируемы по* t, *два раза непрерывно дифференцируемы по* x, *причем соответствующие частные производные* $f_t(x,t)$ *и* $f_{x_ix_i}(x,t)$ *принадлежат параболическому классу Гельдера с соответствующим* $\delta\in(0,1]$.

Теперь введем на линейном пространстве $\mathbb{C}^{2+\delta,1+\delta/2}(\overline{D})$ норму следующим образом

$$|f|_{2+\delta,1+\delta/2} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{(x,t)\in D}|f(x,t)| + \sup_{(x,t)\in D}|f_t(x,t)| + \sum_{i=1}^{N}\sup_{(x,t)\in D}|f_{x_i}(x,t)| + \sum_{i=1}^{N}\sup_{(x,t)\in D}|f_{x_ix_i}(x,t)| + [f_t]_{\delta,\delta/2} + \sum_{i=1}^{N}[f_{x_ix_i}]_{\delta,\delta/2}\,. \tag{7.3}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 8. *Линейное пространство* $\mathbb{C}^{2+\delta,1+\delta/2}(\overline{D})$ *является банаховым относительно нормы* (7.3).

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\{f_n\} \in \mathbb{C}^{2+\delta,1+\delta/2}(\overline{D})$ фундаментальная последовательность относительно нормы (7.3). Тогда она является фундаментальной последовательностью банахова пространства $\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{D})$ относительно нормы (7.2). Значит, она сходится сильно в $\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{D})$. В частности, имеем

$$f_{nt}(x,t) \rightrightarrows f_t(x,t) \quad \text{равномерно по} \quad (x,t) \in \overline{D},$$
$$f_{nx_ix_i}(x,t) \rightrightarrows f_{x_ix_i}(x,t) \quad \text{равномерно по} \quad (x,t) \in \overline{D}.$$

Шаг 2. Поскольку f_{nt} и $f_{nx_ix_i}$ принадлежат параболическому пространству Гельдера, то в силу фундаментальности последовательности $\{f_n\}$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n, m \geqslant n_0$ имеют место следующие оценки

$$\left[f'_{nt} - f'_{mt}\right]_{\delta,\delta/2} \leqslant \varepsilon, \tag{7.4}$$

$$\left[f_{nx_ix_i} - f_{mx_ix_i}\right]_{\delta,\delta/2} \leqslant \varepsilon. \tag{7.5}$$

Стало быть, имеют место следующие неравенства

$$\left|\left[f'_{nt}(z_1) - f'_{mt}(z_1)\right] - \left[f'_{nt}(z_2) - f'_{mt}(z_2)\right]\right| \leqslant \\ \leqslant \rho^\delta(z_1,z_2)\left[f'_{nt} - f'_{mt}\right]_{\delta,\delta/2} \leqslant \varepsilon\rho^\delta(z_1,z_2), \tag{7.6}$$

$$\left|\left[f_{nx_ix_i}(z_1) - f_{mx_ix_i}(z_1)\right] - \left[f_{nx_ix_i}(z_2) - f_{mx_ix_i}(z_2)\right]\right| \leqslant \\ \leqslant \rho^\delta(z_1,z_2)\left[f_{nx_ix_i} - f_{mx_ix_i}\right]_{\delta,\delta/2} \leqslant \varepsilon\rho^\delta(z_1,z_2). \tag{7.7}$$

Теперь перейдем к поточечным пределам в неравенствах (7.6) и (7.7) при $m \to +\infty$. Затем разделим обе части получившихся предельных неравенств на

$$\rho^\delta(z_1,z_2)$$

и перейдем к supremum от обеих частей неравенств по всем $z_1, z_2 \in D$ и $z_1 \neq z_2$.

Шаг 3. В результате получим неравенства

$$\left[f'_{nt} - f'_t\right]_{\delta,\delta/2} \leqslant \varepsilon,$$
$$\left[f_{nx_ix_i} - f_{x_ix_i}\right]_{\delta,\delta/2} \leqslant \varepsilon.$$

Из которых, во-первых, в силу неравенства треугольника получим

$$\left[f'_t\right]_{\delta,\delta/2} \leqslant \left[f'_{nt} - f'_t\right]_{\delta,\delta/2} + \left[f'_{nt}\right]_{\delta,\delta/2},$$
$$\left[f_{x_ix_i}\right]_{\delta,\delta/2} \leqslant \left[f_{nx_ix_i} - f_{x_ix_i}\right]_{\delta,\delta/2} + \left[f_{nx_ix_i}\right]_{\delta,\delta/2},$$

откуда вытекает, что предельные функция $f_t(t,x)$ и $f_{x_ix_i}(t,x)$ принадлежат к классу параболических пространств Гельдера. А во-вторых, получим, что

$$f_n(t,x) \to f(t,x) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{C}^{2+\delta,1+\delta/2}(\overline{D}).$$

Теорема доказана.

§ 8. Интерполяционное неравенство в параболических пространствах

Лемма 3. *Справедливо следующее неравенство*:

$$[f]_{\delta,\delta/2} \leqslant [f]^{1-\nu}_{\delta_1,\delta_1/2}[f]^{\nu}_{\delta_2,\delta_2/2}, \tag{8.1}$$

где

$$\delta = (1-\nu)\delta_1 + \nu\delta_2, \quad \nu \in [0,1], \quad 0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta \leqslant \delta_2 \leqslant 1.$$

Доказательство.

Справедливы следующие соотношения:

$$\frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{\rho^{\delta}(z_1,z_2)} =$$

$$= \frac{|f(z_1)-f(z_2)|^{1-\nu}}{\rho^{(1-\nu\delta_1)}(z_1,z_2)} \frac{|f(z_1)-f(z_2)|^{\nu}}{\rho^{\nu\delta_2}(z_1,z_2)} \leqslant M[f]^{1-\nu}_{\delta_1,\delta_1/2}[f]^{\nu}_{\delta_2,\delta_2/2},$$

где

$$\delta = (1-\nu)\delta_1 + \nu\delta_2, \quad 0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta \leqslant \delta_2 \leqslant 1, \quad \nu \in [0,1].$$

Взяв supremum по $z_1, z_2 \in D$ от обеих частей указанного соотношения получим требуемое неравенство.

Теорема доказана.

Справедлива следующая теорема об интерполяции.

Теорема 9. *Имеет место следующее непрерывное вложение*:

$$\mathbb{C}^{2+\delta_1,1+\delta_1/2,}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{2+\delta_2,1+\delta_2/2,}(\overline{D}) \subset \mathbb{C}^{2+\delta,1+\delta/2}(\overline{D}), \tag{8.2}$$

где

$$\delta = (1-\nu)\delta_1 + \nu\delta_2, \quad \nu \in [0,1], \quad 0 \leqslant \delta_1 \leqslant \delta \leqslant \delta_2 \leqslant 1.$$