Лекция 10

СЧЕТНОЕ МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

§ 1. Минимаксный принцип

Теперь мы можем перейти к рассмотрению общего минимаксного принципа для изучения экстремальных точек функционала $\psi \in \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$, ограниченного снизу на многообразии $\mathcal{V}$, задаваемого вещественным функционалом φ следующим образом:

$$\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \mathbb{B}: \; \varphi(u) = 1\}.$$

Приступим к рассмотрению важного приложения теории категорий Люстерника–Шнирельмана к вариационным задачам на условный экстремум. Пусть $X = \mathcal{V} \subset \mathbb{B}$. Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{A}_j \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{A} \subset \mathcal{V}: \; \mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A}) \geqslant j\}, \quad c_j \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_j} \sup_{u \in \mathcal{A}} \psi(u),$$

где $\mathcal{A}$ — это замкнутое множество в топологии метрического пространства $\mathcal{V}$, т. е.

$$\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}.$$

Совершенно понятно, что имеет место вложение

$$\mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{j-1} \Rightarrow c_j \geqslant c_{j-1},$$

т. е. последовательность множеств $\{\mathcal{A}_j\}_{j=1}^{+\infty}$ является убывающей. Кроме того, понятно, что строгое неравенство

$$c_j > c_{j-1}$$

означает, что $\min\max$ в определении этих чисел достигается в различных точках.

Справедлива следующая основная теорема.

Теорема 1. *Предположим, что функционал $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ и ограничен снизу на многообразии $\mathcal{V} \subset \mathbb{B}$. Если*

$$c := c_k = c_{k+1} = \cdots = c_{k+m}, \tag{1.1}$$

тогда для всех $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_{k+m}$ *и замкнутого в топологии метрического пространства* $\mathcal{V}$ *множества* $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ *таких, что*

$$\sup_{u \in \mathcal{A}} \psi(u) \leqslant c + \varepsilon, \quad \mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{B}) \leqslant m \tag{1.2}$$

найдется такая точка $u_0 \in \mathcal{V}$, *что*
(i) $c - 2\varepsilon \leqslant \psi(u_0) \leqslant c + 2\varepsilon$;
(ii) $\mathrm{distance}(u_0, \mathcal{A} \setminus \mathrm{int}\, \mathcal{B}) \leqslant 2\delta$;
(iii) $\left\| \psi'_f(u_0) \right\|_* (\mathrm{T}_{u_0}\mathcal{V}) \leqslant 8\varepsilon/\delta$.

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего отметим, что при условиях теоремы множество точек $u_0 \in \mathcal{V}$, для которых выполнены свойства (i) и (ii) не пусто.

□ Действительно, заметим, что $\mathcal{A} \not\subset \mathcal{B}$, поскольку в противном случае одновременно выполнены два свойства

$$\mathrm{cat}_{\mathcal{V}}\, \mathcal{A} \geqslant m + k \quad \text{и} \quad \mathrm{cat}_{\mathcal{V}}\, \mathcal{A} \leqslant m.$$

Следовательно,

$$\mathcal{A} \supset \mathcal{A} \setminus \mathrm{int}\, \mathcal{B} \neq \varnothing.$$

Заметим, что $\mathrm{int}\, \mathcal{B} \subset \mathcal{B}$ и поэтому

$$\mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\mathrm{int}\, \mathcal{B}) \leqslant \mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{B}) \leqslant m.$$

Поэтому в силу (1.2) имеем

$$\sup_{u \in \mathcal{A} \setminus \mathrm{int}\, \mathcal{B}} \psi(u) \leqslant \sup_{u \in \mathcal{A}} \psi(u) \leqslant c + \varepsilon.$$

Кроме того, $\mathcal{A} \setminus \mathrm{int}\, \mathcal{B} \in \mathcal{A}_k$, поскольку

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} = (\mathcal{A} \setminus \mathrm{int}\, \mathcal{B}) \cup \mathrm{int}\, \mathcal{B} \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow k + m \leqslant \mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A}) \leqslant \mathrm{cat}_{\mathcal{V}}\left(\mathcal{A} \setminus \mathrm{int}\, \mathcal{B}\right) + \mathrm{cat}_{\mathcal{V}}\left(\mathrm{int}\, \mathcal{B}\right) \leqslant \\ &\qquad \leqslant \mathrm{cat}_{\mathcal{V}}\left(\mathcal{A} \setminus \mathrm{int}\, \mathcal{B}\right) + m \Rightarrow k \leqslant \mathrm{cat}_{\mathcal{V}}\left(\mathcal{A} \setminus \mathrm{int}\, \mathcal{B}\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathcal{A} \setminus \mathrm{int}\, \mathcal{B} \in \mathcal{A}_k$$

и поэтому

$$c = c_k = \inf_{\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_k} \sup_{u \in \mathcal{A}} \psi(u) \leqslant \sup_{u \in \mathcal{A} \setminus \mathrm{int}\, \mathcal{B}} \psi(u) \leqslant c + \varepsilon.$$

Но тогда согласно определению supremum мы получим, что заведомо существует такое $u_0 \in \mathcal{V}$, что выполнены свойства (i) и (ii). ⊠

Шаг 2. Теперь предположим, что существуют такие $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_{k+m}$ и замкнутое множество $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$, что

$$\sup_{u \in \mathcal{A}} \psi(u) \leqslant c + \varepsilon, \quad \mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{B}) \leqslant m,$$

но утверждение (iii) не выполнено, т. е.

$$\left\|\psi'_f(u_0)\right\|_* (\mathrm{T}_{u_0}\mathcal{V}) > \frac{8\varepsilon}{\delta}.$$

Тогда введем обозначение

$$\mathcal{S} := \mathcal{A} \setminus \operatorname{int}\mathcal{B}$$

и применим лемму о деформации, которая в этом случае справедлива. Тогда получим существование такой деформации

$$\eta(t,u) \in \mathbb{C}([0,1]\times\mathcal{V};\mathcal{V}),$$

которая стягивает множество $\psi^{c+\varepsilon}\cap\mathcal{S}$ во множество $\psi^{c-\varepsilon}$, но тогда согласно результату теоремы 2 (v) имеет место неравенство

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}\left(\psi^{c+\varepsilon}\cap\mathcal{S}\right) \leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}\left(\eta(1,\psi^{c+\varepsilon}\cap\mathcal{S})\right) \leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\psi^{c-\varepsilon}), \tag{1.3}$$

поскольку

$$\eta(1,\psi^{c+\varepsilon}\cap\mathcal{S}) \subset \psi^{c-\varepsilon}.$$

Шаг 3. Теперь заметим, что в силу условия теоремы

$$\psi^{c+\varepsilon}\cap\mathcal{A} = \mathcal{A},$$

так как

$$\sup_{u\in\mathcal{A}}\psi(u) \leqslant c+\varepsilon,$$

но тогда, поскольку $\mathcal{S} := \mathcal{A}\setminus\operatorname{int}\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, получаем

$$\psi^{c+\varepsilon}\cap\mathcal{S} = \mathcal{S}.$$

Таким образом, приходим к выводу, что

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}\left(\psi^{c+\varepsilon}\cap\mathcal{S}\right) = \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{S}).$$

Следовательно, из (1.3) получаем, что

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{S}) \leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}\left(\psi^{c-\varepsilon}\right).$$

Шаг 4. Теперь наша задача доказать следующее неравенство:

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\psi^{c-\varepsilon}) \leqslant k-1. \tag{1.4}$$

□ Действительно, по условию теоремы имеем

$$c := c_k = \inf_{\mathcal{A}\in\mathcal{A}_k}\sup_{u\in\mathcal{A}}\psi(u).$$

Рассмотрим множество

$$\psi^{c-\varepsilon} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{u\in\mathcal{V}:\ \psi(u)\leqslant c-\varepsilon\right\}.$$

Предположим, что

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}\left(\psi^{c-\varepsilon}\right) \geqslant k,$$

но тогда, в силу замкнутости множества $\psi^{c-\varepsilon}$ в топологии метрического пространства $\mathcal{V}$, это множество принадлежит системе множеств $\mathcal{A}_k$. Следовательно,

$$c := c_k = \inf_{\mathcal{A} \in \mathcal{A}_k} \sup_{u \in \mathcal{A}} \psi(u) \leqslant \sup_{u \in \psi^{c-\varepsilon}} \psi(u) \leqslant c - \varepsilon,$$

т. е. $\varepsilon \leqslant 0$, что противоречит исходному условию $\varepsilon > 0$. Значит, (1.4) доказано. ⊠

Шаг 5. Следовательно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$k + m \leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A}) \leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{A} \setminus \operatorname{int} \mathcal{B}) + \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{B}) \leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{S}) + m \leqslant \leqslant \operatorname{cat}_{\mathcal{V}}\left(\psi^{c-\varepsilon}\right) + m \leqslant k - 1 + m.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Т е о р е м а д о к а з а н а.

Дадим определение.

О п р е д е л е н и е 1. *Будем говорить, что функционал* $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$ *удовлетворяет условию Пале–Смейла* (PS_c) *на замкнутом многообразии* $\mathcal{V} \subset \mathbb{B}$, *если у всякой последовательности* $\{u_n\} \subset \mathcal{V}$, *удовлетворяющей условию*

$$\psi(u_n) \to c \quad \text{и} \quad \left\| \psi_f'(u_n) \right\|_* (\mathrm{T}_{u_n}\mathcal{V}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty \tag{1.5}$$

для $c \in \mathbb{R}^1$, *имеется сильно сходящаяся подпоследовательность*:

$$u_{n_k} \to u \in \mathcal{V} \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$ *является ограниченным снизу на многообразии* $\mathcal{V}$ *функционалом и удовлетворяет на этом многообразии условию* (PS_c) *при некотором* $c \in \mathbb{R}^1$. *Пусть, кроме того, выполнено условие* (1.1). *Тогда для множества*

$$\mathrm{K}_c \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u \in \mathcal{V} : \ \psi(u) = c, \quad \left\| \psi_f'(u) \right\|_* (\mathrm{T}_u\mathcal{V}) = 0 \right\}$$

имеем

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathrm{K}_c) \geqslant m + 1.$$

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что условие $\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathrm{K}_c) \geqslant m + 1$ означает, что это множество (множество условно критических точек) состоит по крайней мере из $m + 1$ точки.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Предположим, что

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathrm{K}_c) \leqslant m.$$

Заметим, что множество K_c замкнуто в метрическом пространстве $\mathcal{V}$ относительно метрики

$$d(u_1, u_2) \stackrel{\text{def}}{=} \|u_1 - u_2\|.$$

☐ Действительно, пусть $\{u_n\} \subset \mathrm{K}_c$ и

$$u_n \xrightarrow{d} u \quad \text{при} \quad n \to +\infty \Rightarrow u_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Докажем, что $u \in \mathrm{K}_c$. Поскольку $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$, то

$$c = \psi(u_n) \to \psi(u) = c \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$
$$0 = \left\|\psi'_f(u_n)\right\|_* (\mathrm{T}_{u_n}\mathcal{V}) \to \left\|\psi'_f(u)\right\|_* (\mathrm{T}_u\mathcal{V}) = 0.$$

Следовательно, $u \in \mathrm{K}_c$. ⊠

Тогда по теореме 2 о ANR восьмой лекции (метрическое пространство $\mathcal{V}$ является ANR) для множества K_c существует замкнутая в топологии $\mathcal{V}$ окрестность $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ множества K_c, что

$$\mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\mathcal{B}) = \mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\mathrm{K}_c) \leqslant m.$$

Шаг 2. Сделаем одно терминологическое замечание. Под окрестностью $\mathcal{B}$ множества K_c мы понимаем, что имеет место следующее вложение:

$$\mathrm{K}_c \subset \operatorname{int}\mathcal{B} \subset \mathcal{B}. \tag{1.6}$$

Теперь мы применим теорему 1, в которой положим $\mathcal{A} = \mathcal{V}$. Тогда из теоремы 1, в которой нужно взять $\varepsilon = 1/n$ и $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, вытекает существование такой последовательности $\{u_n\} \subset \mathcal{V}$, что

$$c - \frac{2}{n} \leqslant \psi(u_n) \leqslant c + \frac{2}{n},$$
$$\left\|\psi'_f(u_n)\right\|_* (\mathrm{T}_{u_n}\mathcal{V}) \leqslant \frac{8}{\sqrt{n}},$$
$$\mathrm{distance}(u_n, \mathcal{V} \setminus \operatorname{int}\mathcal{B}) \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Отметим, что множество $\operatorname{int}\mathcal{B}$ открыто в метрическом пространстве $\mathcal{V}$, которое является замкнутым множеством в $\mathbb{B}$, и поэтому множество $\mathcal{V} \setminus \operatorname{int}\mathcal{B}$ замкнуто в $\mathcal{V}$. Следовательно,

$$\psi(u_n) \to c, \quad \left\|\psi'_f(u_n)\right\|_* (\mathrm{T}_{u_n}\mathcal{V}) \to 0, \quad \mathrm{distance}(u_n, \mathcal{V} \setminus \operatorname{int}\mathcal{B}) \to 0$$

при $n \to +\infty$. Поскольку функционал ψ удовлетворяет условию $(\mathrm{PS_c})$ на многообразии $\mathcal{V}$, то существует подпоследовательность

$$\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\} \subset \mathcal{V},$$

что

$$u_{n_k} \to u_0 \in \mathcal{V} \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}.$$

Шаг 3. Тогда получим, что, во–первых,

$$\psi(u_0) = c, \quad \left\|\psi'_f(u_0)\right\|_* (\mathrm{T}_{u_0}\mathcal{V}) = 0,$$

т. е. $u_0 \in \mathrm{K}_c$, а, во–вторых, в силу замкнутости $\mathcal{V}\setminus \operatorname{int}\mathcal{B}$

$$u_0 \in \mathcal{V}\setminus \operatorname{int}\mathcal{B}.$$

Следовательно,

$$u_0 \in \mathrm{K}_c \cap (\mathcal{V}\setminus \operatorname{int}\mathcal{B}),$$

но в силу (1.6) имеет место вложение

$$\mathrm{K}_c \subset \operatorname{int}\mathcal{B},$$

но тогда

$$\mathrm{K}_c \cap (\mathcal{V}\setminus \operatorname{int}\mathcal{B}) = \varnothing.$$

Полученное противоречие доказывает, что

$$\mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\mathrm{K}_c) \geqslant m + 1.$$

Теорема доказана.

Важным следствием этой теоремы является следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть функционал $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ является ограниченным снизу на $\mathcal{V}$, причем*

$$d \geqslant \inf_{u\in\mathcal{V}} \psi(u).$$

Пусть, кроме того, для всех

$$c \in \left[\inf_{u\in\mathcal{V}} \psi(u), d\right]$$

функционал ψ удовлетворяет условию $(\mathrm{PS_c})$ на многообразии $\mathcal{V}$. Тогда функционал ψ достигает минимума на $\mathcal{V}$, причем ψ имеет по меньшей мере $\mathrm{cat}_{\mathcal{V}}(\psi^d)$ [1] критических точек на $\mathcal{V}$.

Доказательство.

Пусть

$$n := \mathrm{cat}_{\mathcal{V}}\, \psi^d \in \mathbb{N}, \quad \psi^d \neq \varnothing.$$

Напомним определение величины c_j:

$$c_j := \inf_{\mathcal{A}\in\mathcal{A}_j} \sup_{u\in A} \psi(u), \quad \mathcal{A}_j = \{\mathcal{A} \in \mathcal{V} :\ \mathrm{cat}_{\mathcal{V}}\,\mathcal{A} \geqslant j\},$$

где множества $\mathcal{A}$ замкнуты в метрическом пространстве $\mathcal{V}$. Отметим, что

$$c_1 := \inf_{\{u\}\in\mathcal{A}_1} \sup_{u\in\{u\}} \psi(u) = \inf_{u\in\mathcal{V}} \psi(u),$$

где $\{u\}$ — это одноэлементное множество, которое очевидно замкнуто.

[1] Напомним, что $\psi^d := \{u \in \mathbb{B} :\ \psi(u) \leqslant d\}$.

Рассмотрим соответствующие c_j по своему определению имеет место неравенство

$$\inf_{u\in\mathcal{V}}\psi(u) =: c_1 \leqslant c_2 \leqslant \cdots \leqslant c_n \leqslant d,$$

где последнее неравенство связано с тем, что [1]

$$c_n := \inf_{\mathcal{A}\in\mathcal{A}_n}\sup_{u\in A}\psi(u) \leqslant \sup_{u\in\psi^d}\psi(u) \leqslant d.$$

Предположим, что для каких-то $m \in \mathbb{N}$ чисел из c_j имеет место равенство. Например, без ограничения общности, можно считать, что это m чисел, например, [2]

$$c_{k+1} = c_{k+2} = \cdots = c_{k+m} = c,$$

$$c_{k+m} < c_{k+m+1} < \cdots < c_n, \quad c_1 < c_2 < \cdots < c_k < c_{k+1},$$

причем согласно теореме 7 имеем

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}(\mathrm{K}_c) \geqslant m+1. \tag{1.7}$$

С учетом того, что оставшиеся числа c_j различны мы приходим к тому факту, что точки u_j, в которых достигается minmax функционала ψ все различны. Поэтому этих точек $n-m$. С учетом, (1.7) мы приходим к выводу о том, что критических точек не меньше величины $\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}\psi^d$.

Теорема доказана.

Замечание 2. Отметим, что в данной теореме мы не требуем как ранее слабой замкнутости многообразия $\mathcal{V}$. Относительно многообразия $\mathcal{V}$ мы требуем только сильной замкнутости как подмножества банахова пространства $\mathbb{B}$.

§ 2. Пример счетного множества решений.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\Delta u + |u|^{p-2}u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.1}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область при $N \geqslant 3$. Рассмотрим следующие функционалы:

$$\psi(u) := \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|D_x u|^2\,dx, \quad \varphi(u) := \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega}|u|^p\,dx. \tag{2.2}$$

[1] Пересечение $\psi^d \cap \mathcal{A}_n$ не пусто, поскольку по определению $\operatorname{cat}_{\mathcal{V}}\psi^d = n \in \mathbb{N}$ и поэтому $\psi^d \in \mathcal{A}_n$.

[2] Это частный случай, на примере которого понятно, что делать в более общей ситуации.

Рассмотрим соответствующее многообразие в $H_0^1(\Omega)$

$$\mathcal{V} := \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \ \varphi(u) = 1 \right\}. \tag{2.3}$$

Сначала, как и ранее, применим метод доказательства существования нетривиального слабого решения задачи (2.1).

Пункт 1. Докажем, что *многообразие $\mathcal{V}$ является слабо замкнутым.*

□ Действительно, пусть $\{u_n\} \subset \mathcal{V}$, $\varphi(u_n) = 1$,

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega), \quad 1 < p < \frac{2N}{N-2}, \quad N \geqslant 3.$$

Пусть

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty, \quad \varphi(u_n) = 1,$$

тогда в силу вполне непрерывного вложения $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$ и линейности оператора вложения вытекает полная непрерывность оператора вложения

$$\mathrm{J} : H_0^1(\Omega) \to L^p(\Omega) \Rightarrow \mathrm{J}(u_n) \to \mathrm{J}(u) \quad \text{сильно в} \quad L^p(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Стало быть, имеем

$$1 = \varphi(u_n) \to \varphi(u) = 1 \quad \text{при} \quad n \to +\infty \Rightarrow u \in \mathcal{V}. \quad \boxtimes$$

Пункт 2. Функционал $\psi(u)$ является слабо полунепрерывным снизу, потому что

$$\psi(u) := \frac{1}{2}\|D_x u\|_2^2,$$

а норма рефлексивного банахова пространства является полунепрерывным снизу функционалом.

Пункт 3. Функционал $\psi(u)$ является слабо коэрцитивным, потому что

$$\lim_{\|D_x u\|_2 \to +\infty} \psi(u) = \frac{1}{2} \lim_{\|D_x u\|_2 \to +\infty} \|D_x u\|_2^2 = +\infty.$$

Пункт 4. Итак, согласно теореме 1 четвертой лекции функционал $\psi(u)$ достигает минимума на многообразии $\mathcal{V}$ в некоторой точке $u \in \mathcal{V}$, в которой

$$\psi_f'(u_1) - \lambda_1 \varphi_f'(u_1) = \vartheta^* \in \mathbb{B}^*,$$

$$\langle \Delta u_1 - \lambda_1 |u_1|^{p-2} u_1, u_1 \rangle = 0 \Rightarrow \|D_x u_1\|_2^2 = \lambda_1 \|u_1\|_p^p = p\lambda_1 > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \psi(u_1) = \inf_{u \in \mathcal{V}} \psi(u) = \frac{\lambda_1 p}{2}.$$

Однако, для доказательства существования счетного множества линейно независимых слабых решений задачи (2.1) нужно вместо вариационной задачи (2.2), (2.3) рассмотреть следующую вариационную задачу:

$$\inf\left\{\psi_1(u):\ \varphi_1(u)=1,\quad u\in H_0^1(\Omega)\right\}, \tag{2.4}$$

$$\mathcal{V}_1=\left\{u\in H_0^1(\Omega):\ \varphi_1(u)=1\right\},$$

где

$$\psi_1(u):=\frac{1}{p}\int\limits_{\Omega}|u|^p\,dx,\quad \varphi_1(u):=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}|D_xu|^2\,dx. \tag{2.5}$$

Заметим, что в силу неравенства Фридрихса имеют место выражения

$$u\in\mathcal{V}_1\Rightarrow\frac{1}{p}\int\limits_{\Omega}|u|^p\,dx\leqslant\frac{c_p}{p}\left(\int\limits_{\Omega}|D_xu|^2\,dx\right)^{p/2}=\frac{c_p}{p}(2)^{p/2}.$$

Пункт 5. Докажем, что функционал $\psi_1(u)$ удовлетворяет условию $(\mathrm{PS})_c$ на $\mathcal{V}$ при

$$0<c\leqslant d,\quad d=\frac{c_p}{p}(2)^{p/2}.$$

□ Действительно, пусть $\{u_n\}\subset\mathcal{V}_1$ и имеют место свойства
a) последовательность $\psi_1(u_n)\to c$ при $n\to+\infty$;
b) для этой последовательности

$$\|\psi'_{1f}(u_n)\|_*\,(\mathrm{T}_{u_n}\mathcal{V}_1)\to+0\quad\text{при}\quad n\to+\infty.$$

Докажем, что существует такая подпоследовательность $\{u_{n_n}\}\subset\{u_n\}$, что

$$u_{n_n}\to u\quad\text{сильно в}\quad H_0^1(\Omega)\quad\text{при}\quad n\to+\infty. \tag{2.6}$$

Прежде всего отметим, что

$$\varphi_1(u_n)=1\Rightarrow\|D_xu_n\|_2=\sqrt{2}$$

поэтому найдется такая подпоследовательность

$$\{u_{n_n}\}\subset\{u_n\},\quad u_{n_n}\rightharpoonup u\quad\text{слабо в}\quad H_0^1(\Omega)\quad\text{при}\quad n\to+\infty,$$

а в силу вполне непрерывного вложения $H_0^1(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$ имеем

$$u_{n_n}\to u\quad\text{сильно в}\quad L^p(\Omega)\quad\text{при}\quad n\to+\infty.$$

Отсюда вытекает, что

$$|u_{n_n}|^{p-2}u_{n_n}\to|u|^{p-2}u\quad\text{сильно в}\quad L^{p'}(\Omega)\quad\text{при}\quad n\to+\infty.$$

Наконец, из второго условия $(PS)_c$ вытекает, что

$$-\Delta u_{n_n}-\mu|u_{n_n}|^{p-2}u_{n_n}\to\vartheta^*\quad\text{сильно в}\quad H^{-1}(\Omega)\quad\text{при}\quad n\to+\infty.$$

Кроме того, по доказанному

$$-\Delta u_{n_n}-\mu|u_{n_n}|^{p-2}u_{n_n}\rightharpoonup-\Delta u-\mu|u|^{p-2}u\quad\text{слабо в}\quad H^{-1}(\Omega)$$

при $n \to +\infty$. Поэтому

$$-\Delta u - \mu |u|^{p-2} u = \vartheta^*.$$

Таким образом, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}\|D_x(u_{n_n} - u)\|_2 = \|\Delta(u_{n_n} - u)\|_* \leqslant \\ \leqslant \|\Delta u_{n_n} + \mu |u_{n_n}|^{p-2} u_{n_n} - \mu |u_{n_n}|^{p-2} u_{n_n} + \\ + \mu |u|^{p-2} u - \mu |u|^{p-2} u - \Delta u\|_* \leqslant \\ \leqslant \|\Delta u_{n_n} + \mu |u_{n_n}|^{p-2} u_{n_n}\|_* + \|\mu |u_{n_n}|^{p-2} u_{n_n} - \mu |u|^{p-2} u\|_* \to +0\end{aligned}$$

при $n \to +\infty$. Следовательно,

$$u_{n_n} \to u \quad \text{сильно в} \quad H^1_0(\Omega) \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \quad \boxtimes$$

Пункт 6. Докажем, что на самом деле *существует счетное множество линейно независимых в $H^1_0(\Omega)$ слабых решений задачи* (2.1).

Заметим, что функционалы $\varphi_1(w)$ и $\psi_1(w)$ являются четными. Мы можем отождествить диаметрально противоположные точки многообразия $\mathcal{V}$. Поэтому введем в рассмотрение банахово пространство

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x := [w, -w] : \ w \in H^1_0(\Omega) \right\}$$

с нормой $\|x\|_X := \|w\|$. Определим функционалы на X следующим образом:

$$\varphi_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_1(w) \quad \text{и} \quad \psi_2(x) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_1(w) \quad \text{для всех} \quad x = [w, -w] \in X.$$

Рассмотрим теперь многообразие $\mathcal{V}_2 \subset X$:

$$\mathcal{V}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \in X : \ \varphi_2(x) = 1 \}.$$

Сопряженным пространством X^* к банахову пространству X — есть следующее множество:

$$X^* \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x^* := [f^*, -f^*] : \ f^* \in H^{-1}(\Omega) \right\}.$$

Со следующими скобками двойственности между X и X^* :

$$(x^*, x) \stackrel{\text{def}}{=} \langle f^*, w \rangle .$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что функционалы $\psi_2(x)$ и $\varphi_2(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 3, в которой функционал $\psi_2(x)$ рассматривается на многообразии $\mathcal{V}_2$.

Заметим, что (смотри первый параграф лекции 8)

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}_2} \mathcal{V}_2 = +\infty. \tag{2.7}$$

Рассмотрим теперь произвольное число $d > 0$ и соответствующее множество:

$$(\psi_2)^d \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \in X : \ \psi_2(x) = \psi_1(w) \leqslant d \}.$$

Заметим, что имеет место равенство множеств

$$\psi_2^d = (\psi_2)^d \cap \mathcal{V}_2,$$

где напомним

$$\psi_2^d \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{V}_2 : \ \psi_2(x) := \psi_1(w) \leqslant d\}.$$

Кроме того, очевидно, имеет место вложение

$$(\psi_2)^{d_1} \subset (\psi_2)^{d_2} \quad \text{при} \quad d_1 \leqslant d_2.$$

Заметим, что в силу теоремы вложения С. Л. Соболева имеет место неравенство

$$\int\limits_\Omega |u|^p \, dx \leqslant c_p \left(\int\limits_\Omega |D_x u|^2 \, dx \right)^p \quad \text{для всех} \quad H_0^1(\Omega), \quad 1 < p \leqslant 2^*.$$

При этом справедливы следующие выражения:

$$u \in \mathcal{V}_1 \Rightarrow \frac{1}{p} \int\limits_\Omega |u|^p \, dx \leqslant \frac{c_p}{p} \left(\int\limits_\Omega |D_x u|^2 \, dx \right)^{p/2} = \frac{c_p}{p} 2^{p/2}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{V}_1 \subset (\psi_1)^d \quad \text{при} \quad d := \frac{c_p}{p} 2^{p/2} \Rightarrow \mathcal{V}_2 \subset (\psi_2)^d.$$

Заметим, что при таком d имеет место следующее неравенство:

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}_2} \mathcal{V}_2 \subset \operatorname{cat}_{\mathcal{V}_2} \psi_2^d.$$

Отсюда сразу же получаем, что

$$\operatorname{cat}_{\mathcal{V}_2} \psi_2^d = +\infty.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 3 и существует счетное множество линейно независимых слабых решений задачи.

§ 3. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [?], [?], [?], [?], [?], [?], [?] и [?].