Лекция 13

МЕТОД ГАЛЕРКИНА И КОМПАКТНОСТИ. ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

§ 1. Параболическое уравнение с p—лапласианом

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для уравнения параболического типа следующего вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|D_x u|^{p-2} D_x u) = f(x,t), \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T), \tag{1.1}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad (x,t) \in \partial\Omega \otimes (0,T),$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad p > 2.$$

Определение 1. *Слабым обобщенным решением задачи* (1.1) *назовем функцию* $u(x)(t)$, *удовлетворяющую условию*

$$\int\limits_0^T \langle \mathbb{D}(u), w \rangle \, dt = \int\limits_0^T \langle f, w \rangle \, dt \tag{1.2}$$

для любого $w(x,t) \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$,

$$\mathbb{D}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|D_x u|^{p-2} D_x u),$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — *это скобки двойственности между банаховыми пространствами* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *и* $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Замечание 1. Пусть $\mathbb{B}$ — это рефлексивное пространство Банаха, содержащееся в пространстве Гильберта $\mathbb{H}$, $\mathbb{B} \subset \mathbb{H}$, причем соответствующее вложение непрерывно и $\mathbb{B}$ плотно в $\mathbb{H}$. Отождествляя $\mathbb{H}$ с его сопряженным и обозначая через $\mathbb{B}^*$ сопряженное к $\mathbb{B}$, мы, таким образом, можем отождествить $\mathbb{H}$ с подпространством в $\mathbb{B}^*$:

$$\mathbb{B} \overset{ds}{\subset} \mathbb{H} \overset{ds}{\subset} \mathbb{B}^*.$$

Если задана такая функция $u \in L^p(0,T;\mathbb{B})$, что $u' \in L^{p'}(0,T;\mathbb{B}^*)$, то функция $u : [0,T] \to \mathbb{H}$ непрерывна (после, быть может, изменения на множестве меры нуль), и отображение $u \to u(0)$ является сюръективным отображением на $\mathbb{H}$.

Справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а 1. *Пусть заданы функции $f(x,t)$ и $u_0(x)$, удовлетворяющие условиям*

$$f(x,t) \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)), \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,$$
$$u_0(x) \in L^2(\Omega).$$

Тогда существует, и притом только одна, функция $u(x)(t)$,

$$u(x)(t) \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), \quad u'(x)(t) \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)), \quad (1.3)$$

удовлетворяющая (1.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Положим

$$\mathbb{A}(v) := -\operatorname{div}(|D_x v|^{p-2} D_x v). \quad (1.4)$$

Без труда проверяется, что $\mathbb{A}$ отображает $W^{1,p}(\Omega)$ в $W^{-1,p'}(\Omega)$, и если $u(x)(t) \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, то

$$\mathbb{A}(u) \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)). \quad (1.5)$$

Тогда из (1.1) следует, что

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t} \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)). \quad (1.6)$$

Из (1.6) следует, что после возможного изменения на множестве нулевой меры функция u является непрерывным отображением $[0,T] \to \to L^2(\Omega)$, так что начальное условие имеет смысл.

Шаг 2. Пусть $w_1, ..., w_n, ...$ — это «галеркинский» базис в $W_0^{1,p}(\Omega)$. Определим «приближенное решение» $u_m(t)$ задачи (1.2)

$$u_m(t) := \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(t) w_k, \quad c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}[0,T_m].$$

Тогда из (1.2) в силу основной леммы вариационного исчисления получим, что $c_{mk}(t)$ являются решениями следующей системы уравнений

$$\left(u_m'(t), w_j\right)_2 + \langle \mathbb{A}(u_m(t)), w_j\rangle = \langle f(t), w_j\rangle, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad (1.7)$$

$$u_m(0) = u_{0m} = \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(0) w_k, \quad u_{0m} \to u_0 \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega)$$

при $m \to +\infty$, где $(\cdot,\cdot)_2$ — это скалярное произведение в $L^2(\Omega)$.

Если ввести матрицу

$$a_{kj} := (w_k, w_j)_2,$$

то можно переписать систему обыкновенных дифференциальных уравнений (1.7) в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{m} a_{kj} \frac{dc_{mk}(t)}{dt} = f_j(c_{m1}, ..., c_{mm}, t) :=$$
$$= - \langle \mathbb{A}(u_m(t)), w_j \rangle + \langle f(t), w_j \rangle, \quad j = \overline{1, m}, \quad (1.8)$$

вместе с начальными условиями

$$c_{mk}(0) := \alpha_{mk}, \quad \sum_{k=1}^{m} \alpha_{mk} w_k \to u_0 \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega). \qquad (1.9)$$

Отметим, что матрица (a_{kj}) размера $m \otimes m$ в силу линейной независимости базисных элементов $\{w_k\}_{k=1}^m$ для всякого $m \in \mathbb{N}$ невырожденная. Поэтому в силу классической теорема Пеано приходим к выводу о существовании такого $t_m > 0$, что существует решение $c_{mk}(t) \in \in \mathbb{C}^{(1)}([0, t_m])$ задачи Коши (1.9) системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.8).

Итак, для каждого $m \in \mathbb{N}$ найдется такое $t_m > 0$, что существует галеркинские приближения $u_m(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, t_m]; W_0^{1,p}(\Omega))$.

Шаг 3. Займемся выводом априорных оценок. Заметим, что

$$\langle \mathbb{A}(u), u \rangle = \langle -\Delta_p u, u \rangle = \|u\|^p, \qquad (1.10)$$

где $\|\cdot\|$ — это «стандартная» норма на $W_0^{1,p}(\Omega)$, т. е.

$$\|v\| \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_{\Omega} |D_x v|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Символом $|\cdot|$ обозначим норму в $L^2(\Omega)$. Тогда умножим (1.7) на $c_{mj}(t)$, просуммируем по $j = \overline{1, m}$ и получим следующее равенство:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \langle \mathbb{A}(u_m), u_m \rangle = \langle f(t), u_m \rangle,$$
$$\langle \mathbb{A}(u_m), u_m \rangle = \|u_m\|^p, \quad \langle f(t), u_m \rangle \leqslant \|f\|_* \|u_m\|.$$

Откуда после интегрирования по времени получим неравенство

$$\frac{1}{2} |u_m(t)|^2 + \int_0^t \|u_m(s)\|^p \, ds \leqslant \int_0^t \|f(s)\|_* \|u_m(s)\| \, ds + \frac{1}{2} |u_{0m}|^2. \qquad (1.11)$$

Напомним вид трех параметрического неравенства Юнга

$$a \cdot b \leqslant \varepsilon a^p + c(\varepsilon) b^{p'}, \quad p' = \frac{p}{p-1}, \quad c(\varepsilon) := \frac{1}{p' (p\varepsilon)^{1/(p-1)}}.$$

Используя это неравенство, из неравенства (1.11) получим априорную оценку

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2 + (1-\varepsilon)\int\limits_0^t \|u_m(s)\|^p\,ds \leqslant c(\varepsilon)\int\limits_0^t \|f(s)\|_*^{p'}\,ds + \frac{1}{2}|u_{0m}|^2 \text{ [1]}. \tag{1.12}$$

Отсюда следует, что $t_m = T$ и последовательность

$$\{u_m\}_{m=1}^{+\infty} \quad \text{ограничена в} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)). \tag{1.13}$$

Кроме того, поскольку

$$\|\mathbb{A}(u)\|_* = \|u\|^{p-1},$$

где $\|\cdot\|_*$ — норма банахова пространства $W^{-1,p'}(\Omega)$, то последовательность

$$\{\mathbb{A}(u_m)\}_{m=1}^{+\infty} \quad \text{ограничена в} \quad L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)). \tag{1.14}$$

Шаг 4. В силу (1.13) и (1.14), мы можем выделить такую подпоследовательность $\{u_\mu\}$, что

$$u_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{в} \quad L^\infty(0,\mathrm{T};L^2(\Omega)) \quad *-\text{слабо}, \tag{1.15}$$

$$u_\mu \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \quad \text{слабо}, \tag{1.16}$$

$$u_\mu(T) \rightharpoonup \xi \quad \text{в} \quad L^2(\Omega) \quad \text{слабо}, \tag{1.17}$$

$$\mathbb{A}(u_\mu) \rightharpoonup \chi \quad \text{в} \quad L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)) \quad \text{слабо} \tag{1.18}$$

при $\mu \to +\infty$.

Шаг 5. Продолжим $u_m(t)$, $\mathbb{A}(u_m(t))$, f и χ на $\mathbb{R}$ нулем вне $[0,T]$; соответствующие продолжения обозначим через $\overline{u}_m(t)$, $\overline{\mathbb{A}(u_m(t))}$, $\overline{f}$ и $\overline{\chi}$. Из (1.7) следует, что

$$\begin{aligned}\left(\overline{u}_m'(t), w_j\right)_2 + \left(\overline{\mathbb{A}(u_m(t))}, w_j\right)_2 &= \\ = \left(\overline{f}(t), w_j\right)_2 + (u_m(0), w_j)_2\,\delta(t-0) &- (u_m(T), w_j)_2\,\delta(t-T).\end{aligned} \tag{1.19}$$

Здесь мы воспользовались известными формулами связи классической производной с производной в смысле распределений, которая в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\overline{u}_m(t), w_j\right)_2 = \\ &\qquad = \left(\overline{u}_m'(t), w_j\right)_2 + (u_m(0), w_j)_2\,\delta(t-0) - (u_m(T), w_j)_2\,\delta(t-T),\end{aligned}$$

поскольку $\left(\widetilde{u}_m(t), w_j\right)_2 \in \mathbb{C}^{(1)}([0,T])$.

[1] Это уравнение рассматривается и при $t = T$.

Теперь можно перейти к пределу в (1.19) [1] при $m = \mu \to +\infty$ и фиксированном j. В результате получим равенство

$$\left(\frac{d}{dt}\overline{u}, w_j\right)_2 + (\overline{\chi}, w_j)_2 = \left(\overline{f}, w_j\right)_2 + \\ + (u_0, w_j)_2\,\delta(t-0) - (\xi, w_j)_2\,\delta(t-T) \quad (1.20)$$

для всех $j \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\frac{d\overline{u}}{dt} + \overline{\chi} = \overline{f} + u_0\delta(t-0) - \xi\delta(t-T). \quad (1.21)$$

Сужая (1.21) на $(0,T)$, получим равенство

$$u' + \chi = f \Rightarrow u' = f - \chi \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)). \quad (1.22)$$

Следовательно, $u(0)$ и $u(T)$ имеют смысл, и, сравнивая с (1.21), получим, что $u(0) = u_0$ и $u(T) = \xi$.

Шаг 6. Итак, мы докажем существование решения, если покажем, что

$$\chi = \mathbb{A}(u). \quad (1.23)$$

Из свойства монотонности оператора $\mathbb{A}$ следует, что

$$X_\mu := \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_\mu) - \mathbb{A}(v(t)), u_\mu(t) - v(t)\rangle\, dt \geqslant 0 \quad (1.24)$$

для всех

$$v \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)).$$

Умножим (1.7) на c_{mj}, просуммируем по $j = \overline{1,m}$, проинтегрируем по $t \in (0,T)$ и в результате получим равенство

$$\int_0^T \langle \mathbb{A}(u_\mu), u_\mu\rangle\ dt = \int_0^T \langle f, u_\mu\rangle\ dt + \frac{1}{2}|u_{0\mu}|^2 - \frac{1}{2}|u_\mu(T)|^2.$$

Следовательно,

$$\mathbb{X}_\mu = \int_0^T \langle f, u_\mu\rangle\ dt + \frac{1}{2}|u_{0\mu}|^2 - \frac{1}{2}|u_\mu(T)| - \\ - \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_\mu), v\rangle\ dt - \int_0^T \langle \mathbb{A}(v), u_\mu - v\rangle\ dt. \quad (1.25)$$

---

[1] Уравнение (1.19) при этом рассматривается в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$.

Поскольку норма рефлексивного банахова пространства слабо полунепрерывна снизу, то в силу (1.17) имеем

$$\liminf_{\mu\to+\infty} |u_\mu(T)|^2 \geqslant |u(T)|^2 \quad \text{при} \quad \mu\to+\infty.$$

В силу этого предельного неравенства имеем

$$0 \leqslant \limsup_{\mu\to+\infty} X_\mu \leqslant \int\limits_0^T \langle f, u\rangle\, dt + \frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 - \\ - \int\limits_0^T \langle \chi, v\rangle\, dt - \int\limits_0^T \langle \mathbb{A}(v), u - v\rangle\, dt. \quad (1.26)$$

Из (1.22) можно заключить, что

$$\langle u' + \chi - f, u\rangle = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \langle \chi, u\rangle = \langle f, u\rangle,$$

$$\int\limits_0^T \langle f, u\rangle\, dt + \frac{1}{2}|u_0|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 = \int\limits_0^T \langle \chi, u\rangle\, dt. \quad (1.27)$$

Шаг 7. Сопоставляя равенство (1.27) с (1.26), получим, что

$$\int\limits_0^T \langle \chi - \mathbb{A}(v), u - v\rangle\, dt \geqslant 0. \quad (1.28)$$

Положим $v := u - \lambda w$, $\lambda > 0$, $w \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$ и произвольно. Тогда из (1.28) следует, что

$$\lambda \int\limits_0^T \langle \chi - \mathbb{A}(u - \lambda w), w\rangle\, dt \geqslant 0. \quad (1.29)$$

Откуда

$$\int\limits_0^T \langle \chi - \mathbb{A}(u - \lambda w), w\rangle\, dt \geqslant 0. \quad (1.30)$$

устремляя $\lambda \to +0$ в (1.30), получим

$$\int\limits_0^T \langle \chi - \mathbb{A}(u), w\rangle\, dt \geqslant 0 \quad (1.31)$$

для всех $w \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$. Следовательно,

$$\chi = \mathbb{A}(u).$$

Шаг 8. Докажем теперь единственность слабого решения задачи. Пусть u_1 и u_2 — два решения задачи класса $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$. Тогда разность $w=u_1-u_2$ удовлетворяет уравнению

$$w^{'}+\mathbb{A}(u_1)-\mathbb{A}(u_2)=0, \quad w(0)=0,$$

откуда

$$\langle w^{'},w\rangle+\langle\mathbb{A}(u_1)-\mathbb{A}(u_2),u_1-u_2\rangle=0.$$

Благодаря монотонности, имеем

$$\langle w^{'},w\rangle\leqslant 0.$$

Итак,

$$\langle w^{'},w\rangle=(w^{'},w)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2\leqslant 0\Rightarrow|w|^2(t)\leqslant|w(0)|^2=0.$$

Откуда $w=0$.

Теорема доказана.

§ 2. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [**?**], [**?**].