Лекция 14

МЕТОД ГАЛЕРКИНА И КОМПАКТНОСТИ. ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

В данной лекции мы рассмотрим один из самых мощных методов нелинейного анализа — метод компактности. Данный метод применим ко всем трем классическим классам дифференциальных уравнений в частных производных, а также к нелинейным уравнениям соболевского типа. Мы рассмотрим некоторые конкретные нелинейные краевые задачи и на их примере проследим как применяется метод компактности.

§ 1. Введение

Метод компактности формально заключается в том, что при доказательстве сходимости приближенного решения, построенного по методу Галеркина, *существенно* используются вполне непрерывные вложения пространств С. Л. Соболева. Какой-то особой теории метода компактности нет, поэтому, как правило, метод компактности иллюстрируется на ряде примеров.

§ 2. Нелинейное гиперболическое уравнение

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$, $\delta \in (0,1]$.

Приведем классическую постановку рассматриваемой в дальнейшем задачи.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + |u|^q u = 0 \quad \text{в} \quad (x,t) \in \Omega \otimes (0,T), \quad q > 0, \tag{2.1}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial\Omega \otimes (0,T), \tag{2.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u^{'}(x,0) = u_1(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{2.3}$$

где

$$\Delta u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}, \quad x = (x_1, x_2, x_3).$$

Сейчас мы приведем обобщенную постановку задачи (2.1)–(2.3). Дадим следующее определение:

Определение 1. *Слабым решением задачи* (2.1)–(2.3) *назовем функцию* $u(x)(t)$ *класса* $u(x)(t) \in L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega))$, $u^{'}(x)(t) \in \in L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))$, $u^{''}(x)(t) \in L^{\infty}(0,T;H^{-1}(\Omega))$, *удовлетворяющую равенству*

$$\int\limits_0^T dt \left\langle u^{''} - \Delta u + |u|^q u, v \right\rangle = 0 \tag{2.4}$$

для всех $v(x)(t) \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$ *при* $q \in (0,4]$,

$$u(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad u^{'}(0) = u_1 \in L^2(\Omega), \tag{2.5}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *— скобки двойственности между гильбертовыми пространствами* $H_0^1(\Omega)$ *и* $H^{-1}(\Omega)$.

Задача (2.4)–(2.5) эквивалентна следующей

$$\int\limits_0^T dt\varphi(t) \left\langle u^{''} - \Delta u + |u|^q u, w \right\rangle = 0 \tag{2.6}$$

для всех $w \in H_0^1(\Omega)$ и всех $\varphi(t) \in L^1(0,T)$,

$$u(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad u^{'}(0) = u_1 \in L^2(\Omega). \tag{2.7}$$

Справедлив следующий основной результат.

Теорема 1. *Пусть* $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ *и* $q \in (0,2]$. *Тогда существует единственное слабое обобщенное решение задачи* (2.1), (2.2) *в смысле определения* 1.

Доказательство.

Шаг 1. Приближенные решения.

Рассмотрим теперь «приближенную» к задаче (2.6)–(2.7) следующую задачу

$$\int\limits_0^{T_m} dt\varphi(t) \left\langle u_m^{''} - \Delta u_m + |u_m|^q u_m, w_j \right\rangle = 0 \tag{2.8}$$

для всех $\varphi(t) \in L^1(0,T)$ при $j = \overline{1,m}$, где

$$u_m := \sum_{k=1}^{m} c_{mk}(t) w_k$$

— это галеркинские приближения, а $\{w_j\} \subset H_0^1(\Omega)$ — это базис этого гильбертова пространства, составленный из собственных функций оператора Лапласа

$$\Delta w_j + \lambda_j w_j = 0, \quad w_j \in H_0^1(\Omega).$$

Система уравнений (2.8) дополняется следующими начальными условиями:

$$u_m(0) = u_{m0} \in H_0^1(\Omega), \quad u_m^{'}(0) = u_{m1} \in L^2(\Omega), \tag{2.9}$$

где

$$u_{m0} := \sum_{i=1}^{m} \alpha_{mi} w_i \to u_0 \quad \text{сильно в} \quad H_0^1(\Omega), \tag{2.10}$$

$$u_{m1} := \sum_{i=1}^{m} \beta_{mi} w_i \to u_1 \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega). \tag{2.11}$$

Решение системы уравнений (2.8) ищется в следующем классе:

$$c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, T_m]. \tag{2.12}$$

Шаг 2. Локальная разрешимость.

Поскольку $\mathbb{C}_0^\infty[0, T_m] \subset L^1(0, T_m)$, то в (2.6) возьмем функцию $\varphi(t) \in \mathbb{C}_0^\infty[0, T_m]$. В классе $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, T_m]$ имеем

$$\left\langle u_m^{''} - \Delta u_m + |u_m|^q u_m, w_j \right\rangle \in \mathbb{C}[0, T_m].$$

Отсюда в силу основной леммы вариационного исчисления получим поточечную по $t \in [0, T_m]$ систему m обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left\langle u_m^{''} - \Delta u_m + |u_m|^q u_m, w_j \right\rangle = 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{2.13}$$

Поскольку $w_j \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, поэтому

$$\langle w_k, w_j \rangle = (w_k, w_j)_2, \quad \langle -\Delta w_k, w_j \rangle = (D_x w_k, D_x w_j)_2.$$

Кроме того, поскольку по построению $u_m \in L^\infty(0, T_m; H_0^1(\Omega)) \subset$ $\subset L^\infty(0, T_m; L^{q+2}(\Omega))$ при $q \in [0, 4]$ имеем

$$|u_m|^q u_m \in L^\infty(0, T_m; L^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)).$$

С другой стороны, $w_j \in H_0^1(\Omega) \subset L^{q+2}(\Omega)$. Поэтому

$$\langle |u_m|^q u_m, w_j \rangle = \left(|u_m|^q u_m, w_j\right)_2.$$

В силу этого систему уравнений (2.13) можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{m} (w_k, w_j)_2\, c_{mk}^{''}(t) + \sum_{l=1}^{m} (D_x w_k, D_x w_j)_2\, c_{mk}(t) + \\ + \left(|u_m|^q u_m, w_j\right)_2 = 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{2.14}$$

В силу линейной независимости системы $w_1, ..., w_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\det\,(w_k, w_j)_2 \neq 0.$$

Поэтому система (2.14) после обращения матрицы $||a_{kj}|| = ||\,(w_k, w_j)_2\,||$ примет вид системы типа Коши–Ковалевской, а, значит, найдется такое $T_m > 0$, что система (2.14) с соответствующими начальными условиями имеет решение $c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, T_m]$.

Шаг 3. Априорные оценки.

Умножим уравнение (2.13), отвечающее индексу j, на c'_{mj} и просуммируем по j. Тогда получим равенство

$$\left(u''_m, u'_m\right)_2 + (D_x u_m, D_x u'_m)_2 + \left(|u_m|^q u_m, u'_m\right)_2 = 0. \tag{2.15}$$

Откуда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u'_m\|_2^2 + \|D_x u_m\|_2^2\right] + \frac{1}{q+2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{q+2}^{q+2} = 0. \tag{2.16}$$

Интегрируя (2.16) по времени, получим

$$\frac{1}{2}\left[\|u'_m\|_2^2 + \|D_x u_m\|_2^2\right] + \frac{1}{q+2}\|u_m\|_{q+2}^{q+2} = \\ = \frac{1}{2}\left[\|u_{m1}\|_2^2 + \|D_x u_{m0}\|_2^2\right] + \frac{1}{q+2}\|u_{m0}\|_{q+2}^{q+2}. \tag{2.17}$$

В силу (2.10) и (2.11) имеем

$$u_{m0} \to u_0 \quad \text{сильно в} \quad H_0^1(\Omega), \qquad u_{m1} \to u_1 \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega).$$

Это означает, что правая часть равенства (2.17) ограничена константой $c_1 > 0$, независящей от $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, имеем

$$\frac{1}{2}\left[\|u'_m\|_2^2 + \|D_x u_m\|_2^2\right] + \frac{1}{q+2}\|u_m\|_{q+2}^{q+2} \leqslant \mathrm{c}_1. \tag{2.18}$$

Из (2.18) вытекает, что последовательности

$$\{u_m\} \quad \text{ограничена в} \quad L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \tag{2.19}$$

$$\{u'_m\} \quad \text{ограничена в} \quad L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \tag{2.20}$$

Отсюда в частности следует что $T_m = T > 0$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Шаг 4. Предельный переход.

Пространство

$$L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$$

является сопряженным [1)] к

$$L^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$$

[1)] Смотри том II часть 1 курса лекций М. О. Корпусова, А. А. Панина «Линейный и нелинейный функциональный анализ».

и поэтому из последовательности u_m можно выделить такую последовательность u_μ, что

$$u_\mu \rightharpoonup u \ *\text{-слабо в } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.21}$$

$$u'_\mu \rightharpoonup v \ *\text{-слабо в } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.22}$$

при $\mu \to +\infty$. Из (2.21) вытекает, что

$$u'_\mu \rightharpoonup u' \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(0,T;H_0^1(\Omega)) \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty. \tag{2.23}$$

Следовательно, в силу (2.22) имеем $v = u'$.

Кроме того, из (2.18) вытекает, что последовательность $\{D_x u_m\}$ ограничена в $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(D)$, $D := \Omega \otimes (0,T)$, а последовательность $\{u'_m\}$ ограничена в $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(D)$. Следовательно, последовательность $\{u_m\}$ принадлежит ограниченному множеству в $H^1(D)$. Однако, как известно вложение $H^1(D)$ в $L^2(D)$ вполне непрерывно, а значит, полностью непрерывно.Здесь мы применяем метод компактности.

Дальнейшие наши рассуждения таковы. Поскольку последовательность $\{u_m\}$ ограничена в $H^1(D)$, то можно выделить подпоследовательность $\{u_\mu\} \subset \{u_m\}$ такую, что

$$u_\mu \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad H^1(D) \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty.$$

В силу полностью непрерывного вложения $H^1(D)$ в $L^2(D)$ имеем

$$u_\mu \to u \quad \text{сильно в} \quad L^2(D) \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty.$$

Итак, мы можем считать, что подпоследовательность u_μ, удовлетворяет условию

$$u_\mu \to u \quad \text{сильно в} \quad L^2(D) \quad \text{и почти всюду в} \quad D := \Omega \otimes (0,T) \tag{2.24}$$

при $\mu \to +\infty$. Поскольку последовательность $\{|u_m|^q u_m\}$ ограничена в $L^\infty(0,T;L^{(q+2)/(q+1)}(\Omega))$, то можно еще предположить, что

$$|u_m|^q u_m \rightharpoonup g \quad *\text{-слабо в} \quad L^\infty(0,T;L^{(q+2)/(q+1)}(\Omega)). \tag{2.25}$$

Существенно важный момент — здесь мы сталкиваемся с одной из наиболее типичных трудностей нелинейных задач — доказательство того, что

$$g = |u|^q u. \tag{2.26}$$

На этот вопрос отвечает следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}_+^{N+1} := \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$, g_m и g — такие функции из $L^p(D)$, $1 < p < +\infty$, что*

$$\|g_m\|_{L^p(D)} \leqslant C, \quad g_m \to g \quad \textit{почти всюду в} \quad D \quad \textit{при} \quad m \to +\infty.$$

Тогда

$$g_m \rightharpoonup g \quad \textit{слабо в} \quad L^p(D) \quad \textit{при} \quad m \to +\infty.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что мы не можем сразу же воспользоваться теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла Лебега, поскольку у нас есть лишь условие

$$\|g_m\|_{L^p(D)} \leqslant C,$$

а не условие

$$|g_m(x,t)| \leqslant h(x,t), \quad h(x,t) \in L^p(D).$$

Поэтому для доказательства утверждения нам нужно выделить плотное в $L^q(D)$ при $q = p/(p-1)$ семейство функций Φ, что для любой функции $\varphi(z) \in \Phi$ можно было бы воспользоваться теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла и тогда

$$|\langle \varphi, g_m - g\rangle| = \left| \int\limits_D (g_m(z) - g(z))\, \varphi(z)\, dz \right| \to +0$$

при $m \to +\infty$. Итак,

Пункт 1. Пусть M — возрастающая последовательность чисел, стремящихся к $+\infty$. Положим

$$E_M := \{z | z \in D,\ |g_m(z) - g(z)| \leqslant 1 \quad \text{для} \quad m \geqslant M\}, \quad z = (x,t).$$

Пункт 2. Измеримые множества E_M растут с ростом M и

$$\operatorname{meas}(E_M) \to \operatorname{meas}(D) \quad \text{при} \quad M \to +\infty.$$

Пункт 3. Пусть Φ_M — множество функций $\varphi(z)$ из $L^q(D)$

$$\operatorname{supp}\{\varphi\} \subset E_M, \quad \Phi := \bigcup_M \Phi_M.$$

Ясно, что

$$\Phi \overset{ds}{\subset} L^q(D), \quad q = \frac{p}{p-1}.$$

Если мы возьмем $\varphi \in \Phi$, то в силу теоремы Лебега

$$\int\limits_D \varphi\,(g_m - g)\; dz \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty \tag{2.27}$$

□ Действительно, $\varphi \in \Phi_{M_0}$, и если взять $m \geqslant M_0$, то $|\varphi(g_m - g)| \leqslant |\varphi|$ и левая часть этого неравенства стремится к нулю почти всюду. ⊠

Пункт 4. Так как Φ плотно в $L^q(D)$, то (2.27) доказывает лемму.

Лемма доказана.

Мы применим эту лемму в случае, когда

$$g_\mu := |u_\mu|^q u_\mu, \quad p = \frac{q+2}{q+1}.$$

Поскольку

$$g_\mu \to |u|^q u = g \quad \text{почти всюду} \quad Q \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty,$$

то отсюда в силу леммы 1 имеем

$$g_\mu \rightharpoonup g \quad \text{слабо в} \quad L^p(Q) \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty.$$

Итак, мы доказали равенство $g = |u|^q u$.

Таким образом, равенство (2.26) доказано, и можно перейти к пределу в (2.13), полагая $m = \mu$. В силу (2.21) и (2.22) имеем

$$(D_x u_\mu, D_x w_j)_2 \rightharpoonup (D_x u, D_x w_j)_2 \quad *\text{-слабо в} \quad L^\infty(0,T), \tag{2.28}$$

$$\left(u'_\mu, w_j\right)_2 \rightharpoonup \left(u', w_j\right)_2 \quad *\text{-слабо в} \quad L^\infty(0,T), \tag{2.29}$$

$$(|u_\mu|^q u_\mu, w_j)_2 \rightharpoonup (|u|^q u, w_j)_2 \quad *\text{-слабо в} \quad L^\infty(0,T) \tag{2.30}$$

при $\mu \to +\infty$. Следовательно,

$$\left(u''_\mu, w_j\right)_2 = \frac{d}{dt}\left(u'_\mu, w_j\right)_2 \to \left(u'', w_j\right)_2 \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(0,T). \tag{2.31}$$

С другой стороны, в силу (2.13) имеем

$$\left(u''_m, w_j\right)_2 = \left\langle u''_m, w_j\right\rangle = \\ = (D_x u_m, D_x w_j)_2 - (|u_m|^q u_m, w_j)_2 \in L^\infty(0,T). \tag{2.32}$$

Значит,

$$\left(u''_m, w_j\right)_2 \to (v, w_j)_2 \quad *\text{-слабо в} \quad L^\infty(0,T). \tag{2.33}$$

В силу (2.31) получаем равенство

$$v = u''.$$

Теперь мы можем перейти к пределу при $m = \mu \to +\infty$ в равенстве (2.8) при $T_m = T$ и с учетом (2.28)– (2.33) получить следующее выражение:

$$\int_0^T dt \varphi(t) \left\langle u'' - \Delta u + |u|^q u, w_j \right\rangle = 0 \tag{2.34}$$

для всех $\varphi(t) \in L^1(0,T)$ при $j \in \mathbb{N}$.

В силу того, что $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$ — это базис в $H_0^1(\Omega)$ мы получим из (2.34) равенство (2.6).

Шаг 5. Начальные условия.

Нам осталось доказать, что построенная функция $u(x)(t)$ удовлетворяет начальным условиям (2.7).

□ Действительно, по построению имеем

$$u_\mu(0) = u_{\mu 0} \to u_0 \quad \text{сильно в} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty.$$

С другой стороны, в силу (2.21)–2.23 после возможного исправления на $[0,T]$ на множестве нулевой меры Лебега получим

$$u_\mu(0) \to u(0) \quad \text{слабо в} \quad L^2(\Omega) \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty.$$

Отсюда следует, что имеет место начальное условие $u(0) = u_0$ [1].

Теперь в силу (2.33) имеем

$$\left(u''_\mu, w_j\right)_2 \to (v, w_j)_2 \quad *\text{-слабо в} \quad L^\infty(0,T) \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty. \tag{2.35}$$

Следовательно, после возможного изменения на множестве нулевой меры Лебега из $[0,T]$ функции (u', w_j) непрерывны на $[0,T]$ для любого фиксированного $j \in \mathbb{N}$.

$$\left(u'_\mu(0), w_j\right)_2 \to \left(u', w_j\right)_2\Big|_{t=0} = (u'(0), w_j)_2 \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty, \tag{2.36}$$

а поскольку

$$\left(u'_\mu(0), w_j\right)_2 \to (u_1, w_j)_2 \quad \text{при} \quad \mu \to +\infty, \tag{2.37}$$

то имеем

$$\left(u'(0), w_j\right)_2 = (u_1, w_j)_2 \quad \text{для всех} \quad j \in \mathbb{N} \Rightarrow u'(0) = u_1. \tag{2.38}$$

Шаг 6. Единственность.

Сначала докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $v \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$, $v' \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$, *тогда имеет место следующее равенство для почти всех* $t \in (0,T)$

$$\|v\|_2^2(t) - \|v\|_2^2(0) = 2\int_0^t ds \left(v', v\right)_2(s).$$

Доказательство.

Шаг 1. Регуляризируя функцию $\widehat{v}$ с помощью операции срезки, действующую из $\mathbb{R}$ в $L^2(\Omega)$ и равную v на $[0,T]$ и 0 вне этого интервала, мы легко получаем последовательность функций v_m, удовлетворяющую условиям

$$v_m \in \mathbb{C}^\infty([0,T]; L^2(\Omega)), \quad v_m \to v \quad \text{сильно в} \quad L^2_{loc}(0,T; L^2(\Omega))$$

при $m \to +\infty$.

Шаг 2. Совершенно очевидно, что для функций v_m выполнено равенство

$$\frac{d}{dt}(v_m, v_m)_2 = 2\left(v_m, v'_m\right)_2. \tag{2.39}$$

---

[1] $u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$ в силу наших предположений.

Далее имеем

$$\|v_m\|_2^2 \to \|v\|_2^2, \quad \left(v_m^{'}, v_m\right)_2 \to \left(v^{'}, v\right)_2 \quad \text{сильно в} \quad L^1_{loc}(0,T)$$

при $m \to +\infty$.

Шаг 3. Отсюда переходя к пределу при $m \to +\infty$ в равенстве (2.39) в смысле $\mathcal{D}^{'}(0,T)$, получим равенство в смысле $\mathcal{D}^{'}(0,T)$:

$$\frac{d}{dt}(v,v)_2 = 2\left(v, v^{'}\right)_2. \tag{2.40}$$

Теперь заметим, что

$$(v,v)_2 \in L^1(0,T), \quad \left(v, v^{'}\right)_2 \in L^1(0,T),$$

откуда в силу (2.40) следует, что

$$(v,v)_2 \in \mathbb{AC}[0,T].$$

Таким образом, интегрируя (2.40) по $t \in (0,T)$ приходим к утверждению леммы.

Лемма доказана.

Справедлива следующая лемма:

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того,* $q \in \in (0,2]$. *Тогда решение* u, *полученное в теореме 1, единственно.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть u_1 и u_2 — два слабых обобщенных решения задачи в смысле определения 1 и $w = u_1 - u_2$. Пусть $s \in (0,T)$. Положим

$$\psi(t) := \left\{ -\int\limits_t^s w(\sigma)\,d\sigma, \quad t \leqslant s; \quad 0 \quad \text{при} \quad t > s \right\}.$$

Отсюда имеем

$$\psi(t) = w_1(t) - w_1(s), \quad \text{если} \quad t \leqslant s,$$

где

$$w_1(t) := \int\limits_0^t w(\sigma)\,d\sigma.$$

Шаг 2. Тогда из (2.4) положив $v = \psi(t)$ получим

$$\int\limits_0^T dt \left\langle w^{''} - \Delta w + |u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2, \psi(t) \right\rangle = 0, \tag{2.41}$$

где

$$w(0) = 0, \quad w^{'}(0) = 0. \tag{2.42}$$

Откуда, интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_0^s (w''(t), \psi(t))_2\, dx = (w'(t), \psi(t))_2\Big|_{t=0}^{t=s} - \int\limits_0^s \left(w', \psi'\right)_2\, dt = -\int\limits_0^s \left(w', \psi'\right)_2\, dt,$$

поскольку $\psi(s) = 0$ и $w'(0) = 0$. Следовательно,

$$-\int\limits_0^s \left(w', \psi'\right)_2\, dt + \int\limits_0^s (D_x w, D_x \psi)_2\, dt = -\int\limits_0^s (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2, \psi)_2\, dt,$$

а поскольку $\psi'(t) = w(t)$, в силу леммы 2 имеем

$$-\int\limits_0^s \left(w', w\right)_2\, dt = -\frac{1}{2}\|w\|_2^2(s),$$

так как $w(0) = 0$.

Шаг 3. Поскольку $w_1(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; H_0^1(\Omega))$, $w(t) = \psi'(t)$ и $w(t) = w_1'(t)$ справедлива цепочка равенств

$$\int\limits_0^s (D_x w(t), D_x \psi(t))_2 = \int\limits_0^s (D_x \psi'(t), D_x \psi(t))_2\, dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^s \frac{d}{dt}(D_x \psi(t), D_x \psi(t))_2\, dt =$$
$$= \frac{1}{2}(D_x \psi(s), D_x \psi(s))_2 - \frac{1}{2}(D_x \psi(0), D_x \psi(0))_2 = -\frac{1}{2}\|D_x w_1(s)\|_2^2,$$

поскольку $\psi(0) = -w_1(s)$. Тогда приходим к равенству

$$\frac{1}{2}\|w\|_2^2(s) + \frac{1}{2}\|D_x w_1\|_2^2(s) = \int\limits_0^s (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2, \psi)_2\, dt. \tag{2.43}$$

Шаг 4. Рассмотрим отдельно выражение в правой части

$$\mathrm{I} = \int\limits_0^s (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2, \psi)_2\, dt =$$
$$= \int\limits_0^s (|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2, w_1(t) - w_1(s))_2\, dt \leqslant$$
$$\leqslant (q+1)\int\limits_0^s \int\limits_\Omega dx\, |w(t)|\, [|w_1(t)| + |w_1(s)|] \max\{|u_1|^q, |u_2|^q\}\, dt. \tag{2.44}$$

Теперь воспользуемся обобщенным неравенством Гельдера со следующими соответствующими показателями:

$$p_1 = 2, \quad p_2 = r, \quad p_3 = N, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1 \Rightarrow r = \frac{2N}{N-2}.$$

При этом имеет место непрерывное вложение

$$H_0^1(\Omega) \subset L^r(\Omega).$$

Кроме того, имеем

$$qN \leqslant \frac{2N}{N-2} \Rightarrow q \leqslant \frac{2}{N-2} \quad \text{при} \quad N \geqslant 3,$$

поэтому имеем

$$\| |u_k|^q \|_N = \|u_k\|_{qN}^q \leqslant c_1 \|D_x u_k\|_2^q \leqslant c_2 \quad \text{при} \quad k = 1, 2.$$

Итак, из (2.44) получим следующее неравенство

$$\begin{aligned} \mathrm{I} \leqslant (q+1) \int\limits_0^s dt\, \|w\|_2(t)\, [\|w_1\|_r(t) + \|w_1\|_r(s)] \times \\ \times \max\{\| |u_1|^q \|_N(t), \| |u_2|^q \|_N(t)\} \leqslant \\ \leqslant c_3 \int\limits_0^s \|w\|_2(t)\, [\|D_x w_1\|_2(t) + \|D_x w_1\|_2(s)]\, dt. \quad (2.45) \end{aligned}$$

Справедливы следующие неравенства:

$$\|w\|_2(t) \|D_x w_1\|_2(t) \leqslant \frac{1}{2} \|w\|_2^2(t) + \frac{1}{2} \|D_x w_1\|_2^2(t),$$

$$\|D_x w_1\|_2(s) \|w\|_2(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{2T} \|D_x w_1\|_2^2(s) + \frac{T}{2\varepsilon} \|w\|_2^2(t)$$

при любом $\varepsilon > 0$. С учетом этих неравенств из (2.43) получим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|w\|_2^2(s) + \frac{1}{2}\|D_x w_1\|_2^2(s) \leqslant \frac{c_3}{2} \int\limits_0^s \left[\|w\|_2^2(t) + \|D_x w_1\|_2^2(t) \right] dt + \\ + \frac{c_3}{2} \varepsilon \|D_x w_1\|_2^2(s) + \frac{T}{2\varepsilon} c_3 \int\limits_0^s \|w\|_2^2(t)\, dt, \end{aligned}$$

в котором положим

$$\varepsilon = \frac{1}{2c_3}.$$

Отсюда приходим к следующему неравенству:

$$\|w\|_2^2(s)+\|D_x w_1\|_2^2(s)\leqslant c_4(T)\int\limits_0^s dt\,\left[\|w\|_2^2(t)+\|D_x w_1\|_2^2(t)\right]$$

при $s\in[0,T]$. Отсюда в силу леммы Гронуолла–Белмана [?] приходим к выводу, что $u_1=u_2$ почти всюду.

Лемма доказана.

Теорема доказана.

§ 3. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [?], [?], [?], [?], [?], [?], [?] и [?].