Лекция 16

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ШАУДЕРА

§ 1. Введение

В данной лекции мы рассмотрим самый простой, но чрезвычайно распространенный метод, основанный на принципе Шаудера.

§ 2. Принцип сжимающих отображений

Метод сжимающих отображений является, по всей видимости, наиболее широко используемым методом нелинейного анализа. Дадим определение неподвижной точки.

Определение 1. *Точка $f \in \operatorname{dom} A$ называется неподвижной точкой оператора A, если $f = Af$.*

Напомним определение непрерывного по Липшицу оператора A, действующего в банаховом пространстве $\mathbb{B}$ относительно нормы $\|\cdot\|$.

Определение 2. *Оператор $A : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ удовлетворяет условию Липшица на $D \subset \mathbb{B}$, если существует такое $0 < q < +\infty$, что*

$$\|Af - Ag\| \leqslant q\,\|f - g\| \quad \text{для всех} \quad f, g \in D.$$

При этом число $q > 0$ называется постоянной Липшица.

Наконец, введем определение *сжимающего отображения*.

Определение 3. *Оператор A, удовлетворяющий условию Липшица с константой $q \in (0, 1)$, называется сжимающим.*

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Если выполнено неравенство*

$$\|f_{n+1} - f_n\| \leqslant q\,\|f_n - f_{n-1}\| \quad \text{при} \quad n \geqslant 1, \tag{2.1}$$

в котором $q \in (0, 1)$, то при всяком $n \geqslant 1$

$$\|f_{n+k} - f_n\| \leqslant q^n (1 - q)^{-1}\,\|f_1 - f_0\| \quad \text{при} \quad k \geqslant 1.$$

Таким образом, последовательность $\{f_n\}$ — это последовательность Коши в банаховом пространстве $\mathbb{B}$.

Доказательство.

Из (2.1) по индукции получаем, что

$$\|f_{n+1} - f_n\| \leqslant q^n\,\|f_1 - f_0\| \quad \text{при} \quad n \geqslant 1.$$

Следовательно, при $k \geqslant 1$

$$\|f_{n+k} - f_n\| = \left\| \sum_{j=1}^{k} (f_{n+j} - f_{n+j-1}) \right\| \leqslant \sum_{j=1}^{k} \|f_{n+j} - f_{n+j-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant \|f_1 - f_0\| \sum_{j=1}^{k} q^{n+j-1} \leqslant q^n (1-q)^{-1} \|f_1 - f_0\|.$$

Так как $q < 1$, правая часть стремится к нулю при $n \to +\infty$. Значит, $\{f_n\}$ — это последовательность Коши.

Лемма доказана.

Справедлив следующий важный принцип.

Принцип сжимающих отображений. *Предположим, что оператор A отображает замкнутое подмножество D банахова пространства $\mathbb{B}$ в D и является сжимающим на D. Тогда A имеет в D единственную неподвижную точку, скажем f. Далее, при любом начальном значении $f_0 \in D$ последовательные приближения $f_{n+1} = Af_n$ $(n \geqslant 0)$ сходятся к f, и справедлива следующая оценка скорости сходимости*:

$$\|f - f_n\| \leqslant q^n (1-q)^{-1} \|Af_0 - f_0\|. \tag{2.2}$$

Доказательство.

Шаг 1. Поскольку A — сжимающий оператор на $D \subset \mathbb{B}$, то

$$\|f_{n+1} - f_n\| \leqslant q \|f_n - f_{n-1}\| \quad \text{при} \quad n \geqslant 1 \quad \text{и} \quad q \in (0,1). \tag{2.3}$$

Из леммы 1 следует, что при $n > m$

$$\|f_n - f_m\| \leqslant q^n (1-q)^{-1} \|Af_0 - f_0\| \quad \text{при} \quad k \geqslant 1. \tag{2.4}$$

Этим доказано, что построенная по $f_0 \in D$ последовательность $\{f_n\} \subset \subset D$ — это последовательность Коши в банаховом пространстве $\mathbb{B}$.

Шаг 2. В силу (2.4) последовательность $\{f_n\}$ фундаментальна в $\mathbb{B}$ и поэтому сильно сходится в $\mathbb{B}$ к некоторому $\overline{f} \in \mathbb{B}$. В силу замкнутости $D \subset \mathbb{B}$ приходим к выводу о том, что $\overline{f} \in D$.

В силу непрерывности A на замкнутом множестве $D \subset \mathbb{B}$, что вытекает из сжимаемости оператора A на D справедлива следующая цепочка предельных равенств:

$$A\overline{f} = \lim_{n \to +\infty} Af_n = \lim_{n \to +\infty} f_{n+1} = \overline{f},$$

т. е. $\overline{f}$ — неподвижная точка.

Шаг 3. Чтобы доказать единственность, допустим, что $\overline{g}$ — другая неподвижная точка A. Тогда

$$\|\overline{f} - \overline{g}\| = \|A\overline{f} - A\overline{g}\| \leqslant q \|\overline{f} - \overline{g}\|.$$

Поскольку $0 < q < 1$, это означает, что $\overline{f} = \overline{g}$.

Теорема доказана.

§ 3. Принцип неподвижной точки Шаудера

Сначала напомним знаменитую теорему Брауэра о неподвижной точке в конечномерном пространстве.

Теорема Брауэра о неподвижной точке 1. *Пусть D — ограниченное замкнутое выпуклое подмножество конечномерного нормированного векторного пространства. Если A — непрерывное отображение D в себя, то A имеет неподвижную точку в D.*

Имеет место и ослабленный вариант теоремы Брауэра.

Теорема Брауэра о неподвижной точке 2. *Пусть оператор A отображает единичный шар $S := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ n−−мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ в себя. Тогда в S найдется неподвижная точка оператора A.*

Определение 4. *Пусть в банаховом пространстве $\mathbb{B}$ задано множество M из конечного числа элементов*

$$M := \{x_i \in \mathbb{B} : \ i = 1, ..., n\}.$$

Множество всевозможных линейных комбинаций

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \quad \text{и} \quad \lambda_i \geqslant 0$$

называется выпуклой оболочкой $\mathrm{Co}(M)$ множества M.

С помощью теоремы Брауэра можно доказывать различные теоремы о неподвижных точках нелинейных операторов в бесконечномерных банаховых пространствах. Справедлив основной результат этого параграфа.

Теорема о принципе Шаудера. *Пусть оператор A отображает замкнутое ограниченное выпуклое множество D банахова пространства $\mathbb{B}$ в себя. Тогда, если A вполне непрерывен [1] на D, то он имеет на D неподвижную точку.*

Доказательство.

Шаг 1. Будем рассуждать от противного. Пусть оператор A не имеет на D неподвижных точек. Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $x \in D$

$$\|A(x) - x\| \geqslant \varepsilon_0. \tag{3.1}$$

□ Действительно, если это не так, то найдется последовательность $\{x_n\} \subset D$ такая, что

$$\|A(x_n) - x_n\| \to 0, \quad n \to +\infty. \tag{3.2}$$

[1] Т. е. компактен и непрерывен.

Но тогда, вследствие компактности $A(D)$ в $\mathbb{B}$, из последовательности $\{A(x_n)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{A(x_{n'})\}$, что

$$A(x_{n'}) \to x_0 \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n^{'} \to +\infty.$$

Причем $x_0 \in \overline{A(D)}$ в силу компактности A. Заметим, что имеет место неравенство

$$\|x_{n'} - x_0\| \leqslant \|x_{n'} - A(x_{n'})\| + \|A(x_{n'}) - x_0\|$$

В силу (3.2) из этого неравенства вытекает, что

$$x_{n'} \to x_0 \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n^{'} \to +\infty.$$

При этом $x_0 \in D$, ибо $\overline{A(D)} \subset D$, а D замкнуто. Полагая в (3.2) $n = n^{'}$ и переходя к пределу при $n^{'} \to +\infty$ вследствие непрерывности $A(x)$ получаем $A(x_0) = x_0$, что противоречит нашему предположению об отсутствии у A неподвижных точек на D. Итак, выполняется неравенство (3.1). ⊠

Шаг 2. Будем далее считать, что $\vartheta \in D$ [1]. Это условие не является ограничением. В самом деле, пусть $y_0 \in D$. Рассмотрим множество $D_0 := D - y_0$ и оператор

$$A_0 x := A(x + y_0) - y_0.$$

Можно доказать, что D_0 — замкнутое выпуклое множество, A_0 — вполне непрерывный оператор. Если $x_0 \in D$ — неподвижная точка оператора A, то $x_0 + y_0 \in D_0$ — неподвижная точка оператора A_0.

Шаг 3. Зафиксируем любое $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Пусть

$$M_\varepsilon := \{y_i \in \overline{A(D)},\ i = 1, ..., n\}$$

есть конечная $\varepsilon-$сеть компактного множества $\overline{A(D)}$. Выделим во множестве M_ε максимальную линейно независимую систему элементов. Можно считать, что ее образуют элементы множества

$$N_\varepsilon := \{y_i,\ i = 1, ..., m\}, \quad m \leqslant n.$$

Рассмотрим $m-$мерное банахово пространство $\mathbb{B}_m$, натянутое на элементы множества N_ε и, очевидно, являющееся подпространством банахова пространства $\mathbb{B}$. Пусть, далее,

$$K_\varepsilon := \overline{\mathrm{Co}(\vartheta \cup M_\varepsilon)}$$

— выпуклая оболочка множества, состоящего из объединения точки 0 и точек конечной $\varepsilon-$сети M_ε. Очевидно, что $K_\varepsilon \subset \mathbb{B}_m$. Далее, K_ε является согласно его определению выпуклым телом [2] в $\mathbb{B}_m$.

[1] Символом $\vartheta \in \mathbb{B}$ мы обозначаем нулевой элемент пространства $\mathbb{B}$.

[2] Замкнутое выпуклое множество в банаховом пространстве называется выпуклым телом, если оно содержит хотя бы одну внутреннюю точку.

Кроме того, $K_\varepsilon \subset D$, так как по условию теоремы $\overline{A(D)} \subset D$, а D выпукло.

Шаг 4. Рассмотрим оператор A_ε, отображающий D в D и определяемый следующим правилом: для $x \in D$

$$A_\varepsilon(x) := \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x) y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x)}, \tag{3.3}$$

где

$$\mu_i(x) := \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \|A(x) - y_i\| > \varepsilon; \\ \varepsilon - \|A(x) - y_i\|, & \text{если} \quad \|A(x) - y_i\| \leqslant \varepsilon. \end{cases} \tag{3.4}$$

Оператор A_ε часто называют $\varepsilon-$проектором Шаудера.

Шаг 5. Рассмотрим теперь сужение оператора A_ε на множество K_ε. Можно доказать, что

a) A_ε отображает K_ε в себя;

□ Это вытекает, из того, что оператор определен на K_ε и, кроме того, из определения оператора A_ε вытекает, что

$$A_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) y_i \subset \overline{\mathrm{Co}(\vartheta \cup M_\varepsilon)} =: K_\varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in K_\varepsilon,$$

где

$$\lambda_i(x) := \frac{\mu_i(x)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j(x)} \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) = 1 \quad \text{при} \quad x \in K_\varepsilon. \quad \boxtimes$$

b) A_ε непрерывен на K_ε.

□ Действительно, пусть $\{x_k\} \subset K_\varepsilon$ — это произвольная последовательность такая, что

$$x_k \to x \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

В силу замкнутости K_ε имеем $x \in K_\varepsilon$. Согласно определению A_ε имеет место равенство

$$A_\varepsilon(x_k) - A_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[\lambda_i(x_k) - \lambda_i(x)\right] y_i, \quad \lambda_i(x) := \frac{\mu_i(x)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j(x)}. \tag{3.5}$$

Заметим, что имеет место следующее свойство нормы:

$$|\|A(x) - y_i\| - \|A(x_k) - y_i\|| \leqslant \|A(x) - A(x_k)\| \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty,$$

поскольку оператор A непрерывен на D. Отсюда вытекает, что

$$\mu_i(x_k) \to \mu_i(x) \quad \text{при} \quad k \to +\infty, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3.6}$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i(x)-\lambda_i(x_k)| =$$
$$= \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n}\mu_j(x)\sum\limits_{j=1}^{n}\mu_j(x_k)}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_i(x)\sum_{j=1}^{n}\mu_j(x_k)-\mu_i(x_k)\sum_{j=1}^{n}\mu_j(x)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|\mu_i(x)-\mu_i(x_k)|}{\sum\limits_{j=1}^{n}\mu_j(x)}+\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}|\mu_j(x_k)-\mu_j(x)|}{\sum\limits_{j=1}^{n}\mu_j(x)} =$$
$$= 2\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|\mu_i(x)-\mu_i(x_k)|}{\sum\limits_{j=1}^{n}\mu_j(x)} \to +0 \quad \text{при} \quad k\to+\infty. \tag{3.7}$$

Стало быть, из (3.5) с учетом (3.7) мы получим предельное свойство

$$\|A_\varepsilon(x_k)-A_\varepsilon(x)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i(x_k)-\lambda_i(x)|\,\|y_i\| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{i=\overline{1,n}}\|y_i\|\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i(x_k)-\lambda_i(x)| \to +0 \quad \text{при} \quad k\to+\infty.$$

Непрерывность A_ε на K_ε доказана. ⊠

Таким образом, к сужению оператора A_ε на замкнутое выпуклое и ограниченное множество K_ε можно применить теорему Брауэра 1, согласно которой существует неподвижная точка $x_\varepsilon \in K_\varepsilon$ оператора A_ε, т. е.

$$A_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon.$$

Шаг 6. Заметим, что оператор A_ε обладает следующим свойством:

$$\|A(x)-A_\varepsilon(x)\| \leqslant \varepsilon \tag{3.8}$$

для всех $x \in D$, т. е. оператор A_ε аппроксимирует оператор A на D с точностью ε.

□ Действительно,

$$A(x)-A_\varepsilon(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i(x)A(x)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i(x)} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i(x)y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i(x)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i(x)(A(x)-y_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i(x)}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|A(x) - A_\varepsilon(x)\| \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x)\|A(x) - y_i\|}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x)},$$

где суммирование в числителе и знаменателе ведется только по тем индексам i, для которых $\|A(x) - y_i\| < \varepsilon$, поскольку если

$$\|A(x) - y_i\| \geqslant \varepsilon \Rightarrow \mu_i(x) = 0.$$

Следовательно,

$$\|A(x) - A_\varepsilon(x)\| \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x)\varepsilon}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x)} = \varepsilon. \quad \boxtimes$$

Шаг 7. В силу (3.8) имеем

$$\|A(x_\varepsilon) - x_\varepsilon\| = \|A(x_\varepsilon) - A_\varepsilon(x_\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon.$$

Это противоречит неравенству (3.1), ибо мы взяли $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Значит, допущение о том, что A не имеет на D неподвижных точек, неверно, и теорема Шаудера доказана.

Теорема доказана.

В приложениях к нелинейным краевым задачам важным является следующее следствие из принципа Шаудера:

Следствие 1. *Пусть A — это вполне непрерывное отображение банахова пространства $\mathbb{B}$ в себя. Пусть существует постоянная $M > 0$ такая, что для всех пар $(x, \alpha) \in \mathbb{B} \otimes [0, 1]$, удовлетворяющих уравнению*

$$x = \alpha A x,$$

справедливо неравенство

$$\|x\| < M \text{ [1]}. \tag{3.9}$$

Тогда оператор A имеет неподвижную точку.

Доказательство.

Шаг 1. Без ограничения общности можно предположить, что $M = 1$. Определим отображение

$$A^* x := \begin{cases} Ax & \text{если} \quad \|Ax\| \leqslant 1, \\ Ax/\|Ax\|, & \text{если} \quad \|Ax\| \geqslant 1. \end{cases}$$

Докажем, что это отображение переводит единичный шар $D_1 = \{x \in \mathbb{B} : \|x\| \leqslant 1\}$ в единичный шар.

[1] Постоянная M не зависит от выбора пары (x, α).

$\square$ Действительно, пусть $x \in D_1$, тогда возможны два случая:
(i) $\|Ax\| \leqslant 1$,
(ii) $\|Ax\| > 1$.
В обоих случаях получаем, что $\|A^*x\| \leqslant 1$. $\boxtimes$

Шаг 2. Получим теперь оценку по норме разности $A^*x_1 - A^*x_2$ в случае, когда $x_1, x_2 \in D_1$.

$\square$ Действительно, возможны два принципиальных для нас случая:
1) $\|Ax_1\| \leqslant 1$ и $\|Ax_2\| \leqslant 1$;
2) $\|Ax_1\| \geqslant 1$ и $\|Ax_2\| \geqslant 1$.
В первом случае мы сразу же получаем оценку

$$\|A^*x_1 - A^*x_2\| \leqslant \|Ax_1 - Ax_2\|. \tag{3.10}$$

Во втором случае справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned}\|A^*x_1 - A^*x_2\| &\leqslant \left\| \frac{Ax_1}{\|Ax_1\|} - \frac{Ax_2}{\|Ax_2\|} \right\| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\|Ax_1\|\|Ax_2\|} \left\| \|Ax_2\|Ax_1 - \|Ax_1\|Ax_2 \right\| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\|Ax_1\|\|Ax_2\|} \left\| \|Ax_2\| \left[Ax_1 - Ax_2\right] + \left[\|Ax_2\| - \|Ax_1\|\right] Ax_2 \right\| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\|Ax_1\|}\|Ax_1 - Ax_2\| + \frac{1}{\|Ax_1\|} \left| \|Ax_2\| - \|Ax_1\| \right| \leqslant \\ &\leqslant 2\|Ax_1 - Ax_2\|,\end{aligned} \tag{3.11}$$

где мы воспользовались легко проверяемым неравенством

$$\left| \|Ax_2\| - \|Ax_1\| \right| \leqslant \|Ax_1 - Ax_2\|.$$

Из неравенств (3.10) и (3.11) вытекает, что если оператор A непрерывен и вполне непрерывен, то таков соответственно и оператор A^*.

$\square$ Действительно, докажем сначала непрерывность. Пусть $\{x_n\} \subset \subset D_1$ и

$$x_n \to x \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{3.12}$$

В силу замкнутости D_1 имеем $x \in D_1$. В силу непрерывности A справедливо предельное свойство

$$Ax_n \to Ax \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{3.13}$$

Возможны следующие три случая:

$$\|Ax\| < 1, \quad \|Ax\| > 1 \quad \text{и} \quad \|Ax\| = 1. \tag{3.14}$$

В первом случае в силу (3.12) и (3.13) найдется такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что последовательность $\{Ax_n\}_{n=n_0}^{+\infty}$ лежит в единичном шаре

$$\begin{aligned}&\|Ax_n\| < 1 \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|A^*x_n - A^*x\| = \|Ax_n - Ax\| \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.\end{aligned}$$

Во втором случае рассуждения аналогичные нужно только воспользоваться оценкой (3.11) и тоже прийти к выводу о том, что

$$\|A^*x_n - A^*x\| \leqslant 2\|Ax_n - Ax\| \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{3.15}$$

Рассмотри третий случай. В этом случае имеет место либо оценка (3.10) либо оценка (3.11) в зависимости от того куда попадет Ax_n внутрь шара или вне шара. В любом случае имеет место грубая оценка (3.11) и мы снова приходим к выводу, что справедливо предельное свойство (3.15). Непрерывность доказана. ⊠

Таким же образом может быть доказана компактность оператора A^* на D_1.

□ Действительно, пусть $\{x_n\} \subset D_1$ — это произвольная последовательность, тогда в силу компактности A на D_1 найдется такая подпоследовательность $\{x_{n_m}\} \subset \{x_n\}$, что

$$Ax_{n_m} \to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{3.16}$$

Нужно рассмотреть три случая

$$\|v\| < 1, \quad \|v\| > 1 \quad \text{и} \quad \|v\| = 1.$$

В первом случае можно воспользоваться оценкой (3.10) и получить как и ранее предельное свойство

$$\|A^*x_{n_m} - v\| = \|Ax_{n_m} - v\| \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Во втором и третьем случаях нужно воспользоваться оценкой (3.11) и получить предельное свойство

$$\left\|A^*x_{n_m} - \frac{v}{\|v\|}\right\| \leqslant 2\|Ax_{n_m} - v\| \to +0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \quad ⊠$$

Шаг 3. Поэтому в силу теоремы о принципе Шаудера получаем, что оператор A^* имеет неподвижную точку x_0. Покажем, что точка x_0 является неподвижной точкой отображения A.

□ Действительно, предположим, что $\|Ax_0\| \geqslant 1$. Тогда $x_0 = A^*x_0 = \alpha Ax_0$ с $\alpha = 1/\|Ax_0\|$, и поэтому $\|x_0\| = \|A^*x_0\| = 1$. Но это противоречит неравенству (3.9) с постоянной $M = 1$, выбранной таковой в самом начале доказательства теоремы без ограничения общности.

Следовательно, предположение $\|Ax_0\| \geqslant 1$ неверно, т.е.

$$\|Ax_0\| < 1.$$

Тогда

$$x_0 = A^*x_0 = Ax_0.$$

Следствие доказано.

§ 4. Квазилинейное уравнение с p–лапласианом

Рассмотрим следующую задачу

$$\Delta_p u \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div}(|D_x u|^{p-2} Du) = -f(x,u) \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{4.1}$$

$$u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega, \tag{4.2}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0,1]$. Введем обозначение

$$p^* := \begin{cases} Np/(N-p), & \text{если} \quad p < N, \\ \infty, & \text{если} \quad p \geqslant N. \end{cases}$$

Предположим, что функция $f : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ является каратеодориевой и удовлетворяет условию роста

$$|f(x,s)| \leqslant c|s|^{q-1} + b(x), \quad x \in \Omega, \quad s \in \mathbb{R}^1, \quad q \in (1, p^*), \tag{4.3}$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная, $b(x) \in L^{q'}(\Omega)$, $b(x) \geqslant 0$ почти всюду в Ω,

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Ограничение $q \in (1, p^*)$ гарантирует компактность непрерывного вложения $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$.

Теперь сопоставим каратеодориевой функции $f(x,u)$ оператор Немыцкого

$$N_f(u) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, u(x)) : L^q(\Omega) \to L^{q'}(\Omega).$$

Заметим, что справедлива следующая цепочка вложений

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \stackrel{N_f}{\to} L^{q'}(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega),$$

из которой вытекает, что оператор Немыцкого N_f является компактным и непрерывным оператором в силу теоремы М. А. Красносельского

$$N_f : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega).$$

Определение 5. *Слабым решением задачи* (4.1) *называется функция* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *удовлетворяющая уравнению*

$$\langle -\Delta_p u, v \rangle = \langle N_f u, v \rangle \quad \textit{для всех} \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{4.4}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *— скобки двойственности между банаховыми пространствами* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *и* $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Как мы уже установили ранее оператор

$$(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)$$

является ограниченным и непрерывным. Поэтому (4.4) может быть переписано в эквивалентном виде

$$u = (-\Delta_p)^{-1} N_f u, \tag{4.5}$$

с компактным оператором

$$A \stackrel{\text{def}}{=} (-\Delta_p)^{-1} N_f : W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4.6}$$

Докажем, что следующее множество ограничено в $W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$S := \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \middle| \, u = \alpha A(u) \quad \text{для пары} \quad (u, \alpha) \in W_0^{1,p}(\Omega) \otimes [0,1] \right\}.$$

□ Действительно, справедлива следующая цепочка равенств для произвольного $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\|A(u)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|D_x A(u)\|_p^p = \langle (-\Delta_p) A(u), A(u) \rangle = \langle N_f u, A(u) \rangle =$$
$$= \int\limits_\Omega f(x, u(x)) A(u) \, dx \leqslant \int\limits_\Omega \left(c|u|^{q-1} + b(x) \right) |A(u)| \, dx.$$

Более того, для $u \in S$, т.е. $u = \alpha A(u)$ с некоторыми $\alpha \in [0,1]$ и $u(x) \in$ $\in W_0^{1,p}(\Omega)$ мы имеем цепочку неравенств

$$\|A(u)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant c\alpha^{q-1} \|A(u)\|_q^q + \|b\|_{q'} \|A(u)\|_q \leqslant$$
$$\leqslant c c_1^q \alpha^{q-1} \|A(u)\|^q_{W_0^{1,p}(\Omega)} + c_1 \|b\|_{q'} \|A(u)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant c c_1^q \|A(u)\|^q_{W_0^{1,p}(\Omega)} + c_1 \|b\|_{q'} \|A(u)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)},$$

где c_1 — наилучшая постоянная вложения $W_0^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$. Следовательно, для каждого $u \in S$ справедливо неравенство

$$\|A(u)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant K_1 \|A(u)\|^q_{W_0^{1,p}(\Omega)} + K_2 \|A(u)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \tag{4.7}$$

с некоторыми постоянными $K_1, K_2 \geqslant 0$. Заметим, что из (4.7) при $q \in$ $\in (1, p)$ вытекает существование такой постоянной $M > 0$, что

$$\|A(u)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} < M.$$

□ Действительно, в силу трех параметрического неравенства Юнга имеем

$$K_1 \cdot a^q \leqslant \varepsilon a^p + c_2(\varepsilon), \tag{4.8}$$

где мы помимо параметра $\varepsilon > 0$ взяли параметры

$$p_1 := \frac{p}{q} > 1, \quad p_2 := \frac{p}{p-q}, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1.$$

Кроме того, снова в силу трех параметрического неравенства Юнга имеет место неравенство

$$K_2 \cdot a \leqslant \varepsilon a^p + c_3(\varepsilon). \tag{4.9}$$

Из (4.7) в силу (4.8) и (4.9) мы получим при

$$a := \|A(u)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

неравенство

$$\|A(u)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leqslant 2\varepsilon \|A(u)\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} + c_4(\varepsilon),$$

в котором положим $\varepsilon = 1/4$. ⊠

Отсюда вытекает ограниченность S поскольку

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \alpha \|A(u)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} < M. \quad \boxtimes$$

Отметим, что всегда $p < p^*$.

Таким образом, в силу следствия 1 из теоремы Шаудера мы приходим к следующей теореме о разрешимости:

Теорема 1. *Если каратеодориева функция* $f : \Omega \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ *удовлетворяет* (4.3) *с* $q \in (1, p)$, *тогда оператор* $(-\Delta_p)^{-1} N_f$ *имеет неподвижную точку в* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *или, что эквивалентно, задача* (4.4) *имеет решение. Более того, все решения этой задачи образуют ограниченное множество в* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

§ 5. Литературные указания

Материал для этой лекции взят из работ [?], [?], [?], [?], [?], [?], [?] и [?].