Лекция 6

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ГОРНОМ ПЕРЕВАЛЕ

В этой лекции мы применим доказанную в предыдущей лекции теорему о горном перевале к доказательству существования решения одной краевой задачи при некоторых условиях. Кроме того, мы рассмотрим вопрос о не существовании нетривиальных решений той же задачи при выполнении других условий.

§ 1. Теорема о существовании решения

Для иллюстрации применения теоремы о горном перевале рассмотрим следующую нелинейную краевую задачу:

$$-\Delta u = |u|^{q-1}u \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{1.1}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область при $N \geqslant 3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Предположим, что

$$1 < q < (N+2)/(N-2) \quad \text{при} \quad N \geqslant 3, \tag{1.2}$$

Очевидно, что $u \equiv 0$ является тривиальным решением (1.1). Но нас интересуют нетривиальные решения.

Дадим определение слабого решения задачи (1.1).

Определение 1. *Слабым решением задачи* (1.1) *называется функция $u(x) \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющая равенству*

$$\langle \Delta u + |u|^{q-1}u, \varphi \rangle = 0 \tag{1.3}$$

для всех $\varphi(x) \in H_0^1(\Omega)$, где символом $\langle \cdot, \cdot \rangle$ мы обозначаем скобки двойственности между $H_0^1(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$.

Теорема 1. *Краевая задача* (1.1) *имеет хотя бы одно слабое решение $u(x) \in H_0^1(\Omega)$ неравное тождественно нулю.*

Доказательство.

Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Определим функционал Эйлера

$$\psi(u) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\Omega} \left[\frac{1}{2}|D_x u|^2 - \frac{1}{q+1}|u|^{q+1} \right] dx \quad \text{для} \quad u(x) \in H_0^1(\Omega). \tag{1.4}$$

Мы хотим применить теорему о горном перевале к функционалу $\psi(u)$. Будем рассматривать гильбертово пространство $\mathbb{H} := H_0^1(\Omega)$ относительно одной из эквивалентных норм

$$\|u\| \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int\limits_{\Omega} |D_x u|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Тогда

$$\psi(u) := \psi_1(u) - \psi_2(u) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{q+1} \int\limits_{\Omega} |u|^{q+1} \, dx. \tag{1.5}$$

Покажем, что ψ принадлежит классу $\mathcal{F}$.

Шаг 2. Сначала покажем, что ψ_1 принадлежит классу $\mathcal{F}$.

Для этого заметим, что при любых $u, w \in \mathbb{H}$,

$$\psi_1[w] = \frac{1}{2}\|w\|^2 = \frac{1}{2}\|u + w - u\|^2 = \frac{1}{2}\|u\|^2 + (u, w - u) + \frac{1}{2}\|w - u\|^2.$$

Поэтому ψ_1 дифференцируем по Фреше в точке u и $\mathbf{grad}\,\psi_1(u) = u$. В частности, $\mathbf{grad}\,\psi_1(u)$ является липшиц–непрерывным и тем более ограниченно липшиц–непрерывным. Следовательно, $\psi_1 \in \mathcal{F}$.

Шаг 3. Теперь рассмотрим ψ_2. Напомним, что по теореме Браудера–Минти, которую мы рассмотрим позже, в силу равномерной монотонности оператора Лапласа

$$-\Delta : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$

для любого $v^* \in H^{-1}(\Omega)$ задача

$$-\Delta u = v^* \quad \text{в} \quad \Omega, \quad v = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega$$

имеет единственное слабое решение $v \in H_0^1(\Omega)$. Положим $v = Jv^*$, так что

$$J : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \ - \ \text{изометрия Рисса}. \tag{1.6}$$

Заметим, что если $w \in L^{2N/(N+2)}(\Omega)$, то линейный функционал w^*, определенный формулой

$$\langle w^*, u\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\Omega} w(x)u(x) \, dx, \quad u(x) \in H_0^1(\Omega),$$

принадлежит $H^{-1}(\Omega)$. Заметим, что

$$q\frac{2N}{N+2} < \frac{N+2}{N-2}\frac{2N}{N+2} = 2^*$$

и, таким образом,

$$|u|^{q-1}u \in L^{2N/(N+2)}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega),$$

если $u \in H_0^1(\Omega)$.

Теперь покажем, что для $u \in H^1_0(\Omega)$

$$\mathbf{grad}\, \psi_2(u) = J|u|^{q-1}u. \tag{1.7}$$

С одной стороны, при $q > 1$ имеем

$$\psi'_{2f}(u) = |u|^{q-1}u, \quad \psi'_{2f}(\cdot) : \mathbb{B} = L^{q+1}(\Omega) \to \mathbb{B}^* = L^{(q+1)/q}(\Omega). \tag{1.8}$$

С другой стороны, по определению **grad** имеем

$$\mathbf{grad}\, \psi_2(u) \overset{\text{def}}{=} J\psi'_{2f}(u).$$

Теперь докажем, что отображение

$$\mathbf{grad}\, \psi_2 : H^1_0(\Omega) \to H^1_0(\Omega)$$

ограничено липшиц–непрерывно. На самом деле докажем локальную липшиц–непрерывность.

□ Действительно, поскольку $q > 1$ имеет место неравенство

$$\left||u_1|^{q-1}u_1 - |u_2|^{q-1}u_2\right| \leqslant q \max\left\{|u_1|^{q-1}, |u_2|^{q-1}\right\}|u_1 - u_2|$$

для всех $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^1$. Отсюда для функций $u_1(x), u_2(x) \in L^{q+1}(\Omega)$ вытекают неравенства

$$\int\limits_\Omega \left||u_1|^{q-1}u_1 - |u_2|^{q-1}u_2\right|^{(q+1)/q} dx \leqslant$$

$$\leqslant q^{(q+1)/q} \int\limits_\Omega \max\left\{|u_1|^{(q-1)(q+1)/q}, |u_2|^{(q-1)(q+1)/q}\right\}|u_1 - u_2|^{(q+1)/q}\, dx \leqslant$$

$$q^{(q+1)/q} \max\left\{\left(\int\limits_\Omega |u_1|^{q+1}\, dx\right)^{(q-1)/q}, \left(\int\limits_\Omega |u_2|^{q+1}\, dx\right)^{(q-1)/q}\right\} \times$$

$$\times \left(\int\limits_\Omega |u_1 - u_2|^{q+1}\, dx\right)^{1/q}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством Гельдера с параметрами

$$q_1 = q, \quad q_2 = \frac{q}{q-1}, \quad q > 1.$$

Отсюда получим неравенство

$$\left\||u_1|^{q-1}u_1 - |u_2|^{q-1}u_2\right\|_{(q+1)/q} \leqslant$$
$$\leqslant q \max\left\{\|u_1\|^{q-1}_{q+1}, \|u_2\|^{q-1}_{q+1}\right\}\|u_1 - u_2\|_{q+1}. \tag{1.9}$$

Теперь осталось воспользоваться условием (1.2) и получить цепочку плотных и непрерывных вложений

$$H_0^1(\Omega) \overset{ds}{\subset} L^{q+1}(\Omega) \subset L^{(q+2)/q}(\Omega) \overset{ds}{\subset} H^{-1}(\Omega).$$

В силу (1.8) имеет место цепочка неравенств

$$\begin{aligned}\|\psi'_{2f}(u_1) - \psi'_{2f}(u_2)\|_* \leqslant k_1\|\psi'_{2f}(u_1) - \psi'_{2f}(u_2)\|_{(q+1)/q} \leqslant \\ \leqslant qk_1 \max\left\{\|u_1\|_{q+1}^{q-1}, \|u_2\|_{q+1}^{q-1}\right\}\|u_1 - u_2\|_{q+1} \leqslant \\ \leqslant qk_1k_2^q \max\left\{\|u_1\|^{q-1}, \|u_2\|^{q-1}\right\}\|u_1 - u_2\|.\end{aligned}$$

Из этого неравенства получим нужную оценку

$$\begin{aligned}\|\mathbf{grad}\,\psi_2(u_1) - \mathbf{grad}\,\psi_2(u)\| = \|\psi'_{2f}(u_1) - \psi'_{2f}(u_2)\|_* \leqslant \\ \leqslant k_3 \max\left\{\|u_1\|^{q-1}, \|u_2\|^{q-1}\right\}\|u_1 - u_2\|, \quad (1.10)\end{aligned}$$

где $k_3 := qk_1k_2^q$. Следовательно, $\psi_2 \in \mathcal{F}$. ☒

Шаг 4. Проверим условие Пале–Смейла для функционала ψ. Для этого предположим, что последовательность

$$\{u_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset H_0^1(\Omega)$$

такова, что числовая последовательность

$$\{\psi(u_k)\}_{k=1}^{+\infty} \quad - \quad \text{ограничена}, \tag{1.11}$$

а последовательность $\{\mathbf{grad}\,\psi_2(u_k)\} \subset H_0^1(\Omega)$ удовлетворяет предельному свойству

$$\mathbf{grad}\,\psi(u_k) \to 0 \quad \text{сильно в} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{при} \quad k \to +\infty. \tag{1.12}$$

Из предельного свойства (1.12) получим сразу же, что

$$u_k - J[f(u_k)] \to 0 \quad \text{сильно в} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{при} \quad k \to +\infty. \tag{1.13}$$

Заметим, что имеет место равенство

$$\|\psi'_{2f}(u_k)\|_* \overset{\text{def}}{=} \sup_{\|v\|\leqslant 1}\left|\left\langle \psi'_{2f}(u_k), v\right\rangle\right|.$$

Отсюда получим, что

$$\|\mathbf{grad}\,\psi_2(u_k)\| = \sup_{\|v\|\leqslant 1}\left|(\mathbf{grad}\,\psi_2(u_k), v)_{H_0^1(\Omega)}\right|.$$

В силу (1.12) мы получим, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_0 \in \in \mathbb{N}$, что для всех $k \geqslant n_0$ и для всех $v(x) \in H_0^1(\Omega)$, $\|v\| \leqslant 1$ имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\varepsilon \geqslant \|\mathbf{grad}\,\psi_2(u_k)\| \geqslant \left|(\mathbf{grad}\,\psi_2(u_k), v)_{H_0^1(\Omega)}\right|.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\|u_k\| \neq 0$. Поэтому в последнем неравенстве можно положить

$$v := \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

и получить неравенство [1])

$$\left|(\mathbf{grad}\, \psi_2(u_k), u_k)_{H_0^1(\Omega)}\right| \leqslant \varepsilon \|u_k\|. \tag{1.14}$$

Заметим, что $J := (-\Delta)^{-1}$ и поэтому интегрируя по частям, получим, что имеют место равенства

$$\left|(\mathbf{grad}\, \psi[u_k], u_k)_{H_0^1(\Omega)}\right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\Omega} \left[(D_x u_k, D_x u_k) - (D_x J |u_k|^{q-1} u_k, D_x u_k) \right] \, dx \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\Omega} \left(|D_x u_k|^2 - |u_k|^{q+1} \right) \, dx \right|.$$

Имеем

$$\left| \int\limits_{\Omega} \left[|D u_k|^2 - |u_k|^{q+1} \right] \, dx \right| \leqslant \varepsilon \|u_k\|$$

для $\varepsilon > 0$ и $k \geqslant n_0$. При $\varepsilon = 1$, в частности, имеем

$$\int\limits_{\Omega} |u_k|^{q+1} \, dx \leqslant \|u_k\|^2 + \|u_k\| \tag{1.15}$$

для всех достаточно больших $k \in \mathbb{N}$. Но поскольку из (1.11) следует

$$\left(\frac{1}{2} \|u_k\|^2 - \frac{1}{q+1} \int\limits_{\Omega} |u_k|^{q+1} \, dx \right) \leqslant c_1 < +\infty$$

для всех k и некоторой константы c_1, заключаем, что

$$\frac{1}{2} \|u_k\|^2 \leqslant \frac{1}{q+1} \int\limits_{\Omega} |u_k|^{q+1} \, dx + c_1 \leqslant \frac{1}{q+1} \|u_k\|^2 + \frac{1}{q+1} \|u_k\| + c_1.$$

Поскольку $q > 1$, то отсюда используя арифметическое неравенство Гельдера с параметром

$$\frac{1}{q+1} \|u_k\| \leqslant \varepsilon \|u_k\|^2 + c_2(\varepsilon), \quad c_2(\varepsilon) := \frac{1}{4\varepsilon(q+1)^2}, \quad \varepsilon > 0,$$

[1]) В случае $\|u_k\| = 0$ это неравенство тоже выполнено.

получим оценку

$$\|u_k\|^2 \leqslant c_3(\varepsilon) := (c_2(\varepsilon) + c_1)\left(\frac{1}{2}\frac{q-1}{q+1} - \varepsilon\right)^{-1},$$

где

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\frac{q-1}{q+1}.$$

Следовательно, последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно по $k \in \mathbb{N}$ ограничена в $H_0^1(\Omega)$. Поэтому, с одной стороны, существуют подпоследовательность $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{+\infty}$ и функция $u \in H_0^1(\Omega)$ такие, что

$$u_{k_j} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty.$$

С другой стороны, в силу вполне непрерывного вложения

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q+1}(\Omega)$$

при выполнении условия (1.2), которое на самом деле является полностью непрерывным [1]), имеет место предельное свойство

$$u_{k_j} \to u \quad \text{сильно в} \quad L^{q+1}(\Omega) \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty.$$

Поэтому в силу (1.9) имеем

$$|u_{k_j}|^{q-1}u_{k_j} \to |u|^{q-1}u \quad \text{сильно в} \quad L^{(q+1)/q}(\Omega) \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty.$$

Но тогда

$$|u_{k_j}|^{q-1}u_{k_j} \to |u|^{q-1}u \quad \text{сильно в} \quad H^{-1}(\Omega) \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty,$$

откуда

$$J|u_{k_j}|^{q-1}u_{k_j} \to J|u|^{q-1}u \quad \text{сильно в} \quad H_0^1(\Omega).$$

Следовательно, из (1.13) получаем

$$u_{k_j} \to u \quad \text{сильно в} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty. \tag{1.16}$$

Значит, функционал $\psi(u)$ удовлетворяет условию (PS).

Шаг 5. Проверим остальные условия теоремы о горном перевале.

1. Очевидно, что $\psi(\vartheta) = 0$.

2. Пусть $u \in H_0^1(\Omega)$, $\|u\| = r$, где $r > 0$ будет выбрано ниже. Тогда

$$\psi(u) = \psi_1(u) - \psi_2(u) = \frac{r^2}{2} - \psi_2(u). \tag{1.17}$$

В силу (1.2)

$$\psi_2(u) = \frac{1}{q+1}\int\limits_{\Omega} |u|^{q+1}\,dx \leqslant k_2^{q+1}\|u\|^{q+1} \leqslant c_4 r^{q+1}.$$

[1]) Гильбертово пространство в силу теоремы Рисса–Фреше является рефлексивным.

В силу (1.17)

$$\psi(u) \geqslant \frac{r^2}{2} - c_4 r^{q+1} \geqslant \frac{r^2}{4} = a > 0,$$

если $r > 0$ достаточно мало, так как $q + 1 > 2$.

3. Выберем теперь $u \in H_0^1(\Omega)$, неравное тождественно нулю. Положим $v := tu$, где $t > 0$ надлежит выбрать соответствующим образом. Тогда

$$\psi(v) := \psi_1(tu) - \psi_2(tu) = t^2\psi_1(u) - \frac{t^{q+1}}{q+1}\int\limits_\Omega |u|^{q+1}\,dx < 0$$

при достаточно больших $t > 0$.

Шаг 6. Мы проверили все условия теоремы о горном перевале. Поэтому существует функция $u \in H_0^1(\Omega)$, неравная тождественно нулю, такая, что

$$\mathbf{grad}\,\psi(u) = u - J|u|^{q-1}u = \vartheta \in H_0^1(\Omega).$$

В частности, для любой $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega (D_x u, D_x v)\,dx = \int\limits_\Omega |u|^{q-1}uv\,dx,$$

откуда следует, что $u(x) \in H_0^1(\Omega)$ — слабое решение задачи (1.1).

Теорема доказана.

§ 2. Теорема о несуществовании решения. Результат С. И. Похожаева

Рассмотрим в этом параграфе туже нелинейную краевую задачу, что и в первом параграфе

$$-\Delta u = |u|^{q-1}u \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{2.1}$$

В первом параграфе мы доказали, что краевая задача (2.1), понимаемая в слабом смысле, в случае

$$1 < q < \frac{N+2}{N-2} \tag{2.2}$$

имеет нетривиальное решение.

Теперь мы рассмотрим условие

$$\frac{N+2}{N-2} < q. \tag{2.3}$$

Наша цель показать, что при некотором геометрическом условии на область $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ из (2.3) следует, что $u \equiv 0$ будет единственным гладким решением задачи (2.1). Тогда становится ясно, что ограничение в условии (2.2) из предыдущего пункта в определенном смысле естественно и, следовательно,

$$q = \frac{N+2}{N-2}$$

является критическим показателем.

Определение 2. *Открытое множество* Ω *называется звездным относительно* 0, *если для любой точки* $x \in \overline{\Omega}$ *прямолинейный отрезок* $\{\lambda x : \ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ *лежит в* $\overline{\Omega}$.

Очевидно, что если Ω выпукло и $0 \in \Omega$, то Ω звездно относительно точки 0. Однако в общем случае звездная область не обязана быть выпуклой.

Лемма 1. *Пусть* ∂U *класса* $\mathbb{C}^1$ *и* Ω *— звездная область относительно* 0. *Тогда*

$$(x, n_x) \geqslant 0 \quad \textit{для всех} \quad x \in \partial U,$$

где n_x *— единичная внешняя нормаль.*

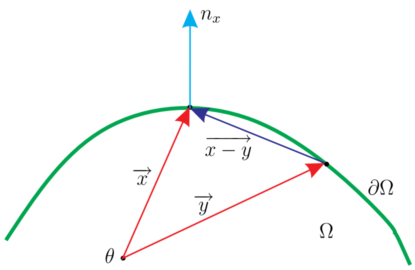

Рис. 1. Пояснения к лемме.

Доказательство.

Поскольку $\partial\Omega$ класса $\mathbb{C}^1$, для $x \in \partial\Omega$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $|x-y| < \delta$ и $y \in \overline{\Omega}$ имеем

$$\left(n_x, \frac{y-x}{|y-x|}\right) \leqslant \varepsilon.$$

В частности,

$$\limsup_{\overline{\Omega} \ni y \to x} \left(n_x, \frac{y-x}{|y-x|}\right) \leqslant 0.$$

Пусть $y = \lambda x$, где $0 < \lambda < 1$. Тогда $y \in \overline{\Omega}$ ввиду звездности Ω. Таким образом,

$$\left(n_x, \frac{x}{|x|}\right) = - \lim_{\lambda \to 1-0} \left(n_x, \frac{\lambda x - x}{|\lambda x - x|}\right) \geqslant 0.$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть* $u \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{\Omega})$ — *решение задачи* (2.1) *и показатель* q *удовлетворяет неравенству* (2.3). *Предположим, что множество* Ω *звездно относительно* 0 *и* $\partial\Omega$ *класса* $\mathbb{C}^1$. *Тогда*

$$u \equiv 0 \quad \textit{внутри} \quad \Omega.$$

Доказательство.

Шаг 1. Умножив уравнение на $(x, D_x u)$ и интегрируя по Ω, находим

$$A := \int\limits_{\Omega} (-\Delta u)(x, D_x u)\, dx = \int\limits_{\Omega} |u|^{q-1} u(x, D_x u)\, dx =: B. \tag{2.4}$$

Шаг 2. Левая часть имеет вид

$$A := -\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int\limits_{\Omega} u_{x_i x_i} x_j u_{x_j}\, dx =$$

$$= \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int\limits_{\Omega} u_{x_i}(x_j u_{x_j})_{x_i}\, dx - \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int\limits_{\partial\Omega} u_{x_i} n^i x_j u_{x_j}\, dS_x =: A_1 + A_2. \tag{2.5}$$

Шаг 3. Имеем

$$A_1 := \sum_{i,j=1,1}^{N,N} \int\limits_{\Omega} \left(u_{x_i} \delta_{ij} u_{x_j} + u_{x_i} x_j u_{x_i x_j} \right) dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left(|D_x u|^2 + \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{|D_x u|^2}{2} \right)_{x_j} x_j \right) dx =$$

$$= \left(1 - \frac{N}{2}\right) \int\limits_{\Omega} |D_x u|^2\, dx + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{|D_x u|^2}{2} (n_x, x)\, dS_x. \tag{2.6}$$

С другой стороны, поскольку $u = 0$ на $\partial\Omega$, градиент $D_x u$ параллелен нормали n_x в каждой точке $x \in \partial\Omega$. Таким образом,

$$D_x u \equiv \pm |D_x u| n_x.$$

С помощью этого неравенства вычисляем

$$\sum_{i=1}^{N} u_{x_i} n_x^i = \pm |D_x u| \sum_{i=1}^{N} n_{xi} n_x^i = \pm |D_x u|,$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_j u_{x_j} = \pm \sum_{j=1}^{N} x_j n_x^j |D_x u| = \pm (x, n_x) |D_x u|.$$

Следовательно,

$$A_2 := -\int\limits_{\partial\Omega} |Du|^2 \, (n_x, x) \, dS_x. \tag{2.7}$$

Из (2.5)–(2.7) следует, что

$$A = \frac{2-N}{2} \int\limits_{\Omega} |D_x u|^2 \, dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\partial\Omega} |D_x u|^2 \, (n_x, x) \, dS_x. \tag{2.8}$$

Шаг 4. Возвращаясь к (2.4) находим

$$B := \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\Omega} |u|^{q-1} u x_j u_{x_j} \, dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{|u|^{q+1}}{q+1} \right)_{x_j} x_j \, dx = -\frac{N}{q+1} \int\limits_{\Omega} |u|^{q+1} \, dx, \tag{2.9}$$

поскольку $u(x) = 0$ на $\partial\Omega$.

Шаг 5. Ввиду (2.8), (2.9) и (2.4) получаем

$$\frac{N-2}{2} \int\limits_{\Omega} |D_x u|^2 \, dx + \frac{1}{2} \int\limits_{\partial\Omega} |D_x u|^2 \, (n_x, x) \, dS_x = \frac{N}{q+1} \int\limits_{\Omega} |u|^{q+1} \, dx. \tag{2.10}$$

В силу леммы 1 приходим к неравенству

$$\frac{N-2}{2} \int\limits_{\Omega} |D_x u|^2 \, dx \leqslant \frac{N}{q+1} \int\limits_{\Omega} |u|^{q+1} \, dx. \tag{2.11}$$

Умножая уравнение $-\Delta u = |u|^{q-1} u$ на u и интегрируя по частям, с учетом граничного условия получим

$$\int\limits_{\Omega} |D_x u|^2 \, dx = \int\limits_{\Omega} |u|^{q+1} \, dx.$$

Подставив в (2.11), находим

$$\left(\frac{N-2}{2} - \frac{N}{q+1} \right) \int\limits_{\Omega} |u|^{q+1} \, dx \leqslant 0.$$

Поэтому, если $u(x)$ неравно тождественно нулю, то

$$\frac{N-2}{2} - \frac{N}{q+1} \leqslant 0,$$

т.е.

$$q \leqslant \frac{N+2}{N-2}.$$

Теорема доказана.

§ 3. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работах [?], [?]–[?], [?], [?], [?]–[?], [?], [?], [?], [?], [?], [?], [?], [?].