Лекция 8

ТЕОРИЯ ЛЮСТЕРНИКА–ШНИРЕЛЬМАНА И ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

§ 1. Теория категорий Люстерника–Шнирельмана

В данном параграфе мы рассмотрим важную в приложениях теорию категорий Люстерника–Шнирельмана и ее применение к дифференцируемым по Фреше на банаховых пространствах функционалам.

Сначала дадим определение *стягиваемого множества*. Пусть $\mathbb{X}$ — это отделимое топологическое пространство, т. е. *хаусдорфово* пространство.

Определение 1. *Подмножество $A \subset X$ называется стягиваемым на X множеством, если найдется такая функция, называемая деформацией*

$$h(t,u) : [0,1] \times A \to X$$

класса $\mathbb{C}([0,1] \times A; X)$ и такая точка $\widehat{u} \in X$, что

$$h(0,u) = u \quad и \quad h(1,u) = \widehat{u} \in X \quad для\ всех \quad u \in A.$$

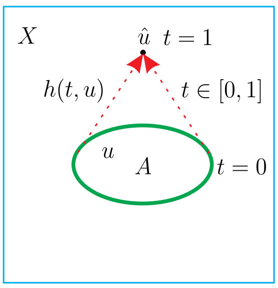

Рис. 1. Стягиваемое множество A.

Теперь мы можем дать определение категории множества $A \subset X$ относительно хаусдорфова пространства X.

Определение 2. *Категорией множества $A \subset X$ как подмножества хаусдорфова пространства X называется отображение*

$$\mathrm{cat}_X(A) : \ 2^X \to \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\},$$

удовлетворяющее следующим свойствам:

(i) $\mathrm{cat}_X(\varnothing) := 0$;

(ii) $\mathrm{cat}_X(A) := \min\left\{k \in \mathbb{N} :\ A \subset \bigcup_{m=1}^{k} \mathrm{A}_m\right\}$, *где каждое множество* $A_m \subset X$ *является замкнутым и стягиваемым в* X;

(iii) $\mathrm{cat}_X(A) := +\infty$, *если нет конечного покрытия.*

Категория $\mathrm{cat}_X(A)$ множества $A \subset X$ по отношению к X обладает следующим набором свойств:

Теорема 1. *Пусть* X *и* Y *— это два хаусдорфовых пространства. Справедливы следующие свойства*:

(i) *если* $A \subset C$, *то* $\mathrm{cat}_X(A) \subset \mathrm{cat}_X(C)$;

(ii) $\mathrm{cat}_X(A \cup C) \leqslant \mathrm{cat}_X(A) + \mathrm{cat}_X(C)$;

(iii) $\mathrm{cat}_{X\times Y}(A \times \{z\}) = \mathrm{cat}_X(A)$ *для каждой точки* $z \in Y$;

(iv) $\mathrm{cat}_X(A) = \mathrm{cat}_X(\overline{A})$ [1];

(v) *если* $\eta : A \to X$ *является гомеоморфизмом, гомотопичным тождественному отображению* id_A *на* $A \subset X$, *тогда имеет место неравенство* $\mathrm{cat}_X(A) \leqslant \mathrm{cat}_X(\eta(A))$.

Доказательство.

Шаг 1. Первое свойство вытекает из тех соображений, что покрытие множества C является покрытием множества A.

Шаг 2. Второе свойство вытекает из того, что объединение покрытий A и C является покрытием и их объединения $A \cup C$.

Шаг 3. Третье свойство доказывается следующим образом. Пусть $\mathrm{cat}_{\mathbb{B}}(A) = k < +\infty$, поскольку в противном случае и $\mathrm{cat}_{X\times Y}(A \times \{z\}) = +\infty$. Пусть

$$\bigcup_{m=1}^{k} A_m$$

— это покрытие множества A. Но тогда, поскольку $\{z\}$ — это замкнутое и стягиваемое множество в Y, имеем

$$\bigcup_{m=1}^{k} (A_m \times \{z\})$$

— это покрытие множества $A \times \{z\}$ и одновременно

$$\bigcup_{m=1}^{k} A_m$$

— это покрытие множества A.

Шаг 4. Доказательство четвертого свойства основано на том, что, во–первых, $A \subset \overline{A}$, а во–вторых, любое покрытие замкнутыми множествами $\{A_m\}_{m=1}^{n}$ множества A являются согласно определению замыкания $\overline{A}$ и покрытиями множества $\overline{A}$.

[1] Символом $\overline{A}$ мы обозначили замыкание множества A.

Шаг 5. Приступим к доказательству пятого свойства. Прежде всего предположим, что множество A замкнуто, поскольку в силу четвертого свойства
$$\mathrm{cat}_X(A) = \mathrm{cat}_X(\overline{A}).$$
Итак, пусть
$$\mathrm{cat}_X(\eta(A)) =: k < +\infty,$$
поскольку в противном случае сразу же приходим к утверждению.

Пусть $\{C_m\}_{m=1}^k$ — это замкнутые и стягиваемые в X множества, покрывающие множество $\eta(A)$ и для которых в силу стягиваемости определены деформации
$$h_m(t,u) \in \mathbb{C}([0,1]\times C_m; X), \quad h_m(0,u) = u, \quad h_m(1,u) = \widehat{u}_m$$
для всех $u \in C_m$.

Поскольку отображение $\eta : A \to X$ гомотопично тождественному отображению id_A, то существует такая деформация $h(t,u) \in \mathbb{C}([0,1] \times \times A; X)$, что
$$h(0,\cdot) = \mathrm{id}_A\cdot, \quad h(1,\cdot) = \eta(\cdot).$$
Рассмотрим множества
$$A_m := \eta^{-1}(C_m) \quad \text{при} \quad m = \overline{1,k}.$$
Множества $\{A_m\}_{m=1}^k$ образуют замкнутое покрытие множества A в силу гомеоморфности отображения η. Ясно, что вместе с семейством замкнутых множеств $\{A_m\}$ семейство $\{A_m \cap A\}$ тоже замкнутое покрытие замкнутого множества A.

Докажем, что множества $A_m \cap A$ при $m = \overline{1,k}$ являются стягиваемыми в X. Действительно, рассмотрим следующую деформацию:
$$\widehat{h}_m(t,u) := \begin{cases} h(2t,u) & \text{при} \quad t \in \left[0,\frac{1}{2}\right]; \\ h_m(2t-1,\eta(u)), & \text{при} \quad t \in \left[\frac{1}{2},1\right]. \end{cases}$$
Понятно, что
$$\widehat{h}_m(t,u) : [0,1] \times A_m \cap A \to X$$
$$\widehat{h}_m(0,\cdot) = \mathrm{id}_{A_m \cap A}, \quad \widehat{h}_m(1,\cdot) = h_m(1,\eta(u)) = \widehat{u}_m \in X.$$
Осталось доказать, что
$$\widehat{h}_m(t,u) \in \mathbb{C}([0,1] \times A_m \cap A; X).$$
Но это сразу же следует из определения деформаций $h(t,u)$ и $h_m(t,u)$ и следующего равенства
$$h(1,u) = \eta(u) = h_m(0,\eta(u)) \quad \text{для всех} \quad u \in A.$$
Тем самым, каждое множество $A_m \cap A$ при $m = \overline{1,k}$ является стягиваемым в X. Следовательно,
$$\mathrm{cat}_X(A) \leqslant k := \mathrm{cat}_X(\eta(A)).$$

Теорема доказана.

Дадим определение *ретракции*. Пусть X — топологическое пространство и $A \subset X$.

Определение 3. *Непрерывное отображение*

$$r : X \supset A \to A$$

называется ретракцией, если [1)]

$$r|_A = \mathrm{id}_A,$$

а множество A называется ретрактом X.

ПРИМЕР 1. Пусть X — топологическое пространство, тогда любая его точка x является ретрактом X. Действительно, проекция

$$r : X \to x$$

является непрерывным отображением топологического пространства X в топологическое пространство X. Проверьте это в терминах окрестностей!

ПРИМЕР 2. Пусть $Z := X \times Y$ и $p \in X$, $q \in Y$ — фиксированные точки. Рассмотрим множества $A := X \times q$ и $B := p \times Y$. Рассмотрим следующие отображения:

$$r_X : (x, y) \to (x, q), \quad r_Y : (x, y) \to (p, y).$$

Эти отображения являются непрерывными отображениями из $X \times Y$ в $X \times Y$ и поэтому, очевидно, являются ретракциями, а множество A и B ретракты $X \times Y$.

Наконец, дадим определение *Абсолютного Окрестностного Ретрактора* или ANR в случае метрического пространства X, которое приведено в работе [**?**] на стр. 691.

Определение 4. *Метрическое пространство X называется ANR, если для всякого метрического пространства Y, каждого замкнутого множества $D \subset Y$ и всякого непрерывного отображения $\varphi \in \mathbb{C}(D; X)$ существует непрерывное продолжение отображения φ на некоторую окрестность* [2)] *$U \supset D$. Если такое продолжение φ можно сделать на все метрическое пространство Y, то мы будем говорить, что X — абсолютный ретракт AR.*

Замечание 1. Имеет место утверждение (см. [**?**]) о том, что всякое выпуклое подмножество нормированного пространства есть AR (тем более ANR).

Справедлива следующая важная теорема. [3)]

[1)] Символом $r|_A$ мы обозначили сужение оператора r на множестве A.

[2)] Т. е открытое множество в метрическом пространстве Y.

[3)] Доказательство этой теоремы сильно зависит от свойства ANR метрического пространства X.

Теорема 2. *Пусть метрическое пространство X является* ANR *и $A \subset X$ — это произвольное замкнутое множество, тогда найдется такая окрестность $U \subset X$ множества A, что имеет место следующее равенство*:

$$\mathrm{cat}_X(A) = \mathrm{cat}_X(\overline{U}).$$

Доказательство. Доказательство проведем за несколько шагов.

Шаг 1. Итак, пусть $\mathrm{cat}_X(A) =: k < +\infty$, поскольку в противном случае утверждение теоремы вытекает из теоремы 2.

Пусть $\{A_m\}_{m=1}^k$ — это замкнутое покрытие множества A, причем каждое A_m является стягиваемым в X, т. е. существует такая деформация

$$h_m(t,u) \in \mathbb{C}([0,1] \times A_m; X), \tag{1.1}$$

что

$$h_m(0,u) = u \quad \text{и} \quad h_m(1,u) = \widehat{u}_m \in X \quad \text{для всех} \quad u \in A_m. \tag{1.2}$$

Шаг 2. Докажем, что для каждого множества A_m найдется такая его окрестность $U_m \supset A$, что ее замыкание $\overline{U}_m$ стягиваемо в X.

□ Действительно, рассмотрим следующее декартово произведение метрических пространств

$$Y \stackrel{\mathrm{def}}{=} [0,1] \times X.$$

Рассмотрим замкнутое подмножество этого метрического пространства:

$$E_m \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{[0,1] \times A_m\} \cup \{\{0\} \times X\} \cup \{\{1\} \times X\}.$$

Замечание 2. Отметим, что замкнутые множества $\{\{0\} \times X\}$ и $\{1\} \times X$ являются ретрактами $[0,1] \times X$. Поскольку A_m стягиваемо в X, то $[0,1] \times A_m$ тоже ретракт в $[0,1] \times X$.

Рассмотрим на этом замкнутом множестве непрерывную функцию

$$u_m(t,u) := \begin{cases} h_m(t,u) & \text{при} \quad t \in [0,1],\ u \in A_m; \\ u & \text{при} \quad t = 0,\ u \in X; \\ \widehat{u}_m & \text{при} \quad t = 1,\ u \in X. \end{cases}$$

Заметим, что в силу свойств (1.1) и (1.2) функции $u_m(t,u)$ непрерывны на Y со значениями в X.

Поскольку X — это ANR, то $[0,1] \times X$ — это тоже ANR. Поэтому найдется такая окрестность $V_m \subset [0,1] \times X$ множества E_m, что функция u_m допускает непрерывное продолжение

$$\overline{u}_m(t,u) \in \mathbb{C}(V_m; X).$$

Поскольку $[0,1]\times X$ является метрическим пространством и поэтому является нормальным можно предположить, что далее функция $\overline{u}_m(t,u)$ продолжается до функции класса

$$\overline{u}_m(t,u)\in\mathbb{C}(\overline{V}_m;X).$$

Следовательно, в силу непрерывности этого отображения найдется такая окрестность U_m множества A_m, что $[0,1]\times\overline{U}_m\subset\overline{V}_m$. ⊠

Шаг 3. Заметим, что

$$\overline{u}_m(0,u)=u \quad \text{и} \quad \overline{u}_m(1,u)=\widehat{u}_m\in X \quad \text{для всех} \quad u\in\overline{U}_m,$$

т. е. замкнутые множества $\overline{U}_m$ при $m=\overline{1,k}$ являются стягиваемыми в X, причем

$$\overline{U}:=\bigcup_{m=1}^{k}\overline{U}_m\supset\bigcup_{m=1}^{k}A_m\supset A.$$

и

$$k=\operatorname{cat}_X(A)\leqslant\operatorname{cat}_X\overline{U}\leqslant k\Rightarrow\operatorname{cat}_X(A)=\operatorname{cat}_X(\overline{U}).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь ряд примеров.

ПРИМЕР 3. Пусть $X=\mathbb{B}$ — это банахово пространство, а

$$A=\overline{B_R(0)}:=\{u\in\mathbb{B}:\ \|u\|\leqslant R\}.$$

Очевидно, что множество A замкнуто в $\mathbb{B}$. Докажем, что оно стягиваемо в $\mathbb{B}$. Действительно, рассмотрим следующую деформацию:

$$h(t,u)=(1-t)u\in\mathbb{C}([0,1]\times A;\mathbb{B}).$$

Ясно, что

$$h(0,u)=u \quad \text{и} \quad h(1,u)=\vartheta\in\mathbb{B} \quad \text{для всех} \quad u\in A.$$

Стало быть,

$$\operatorname{cat}_{\mathbb{B}}\left(\overline{B_R(0)}\right)=1.$$

Следующий пример очень важен нам для дальнейшего.

ПРИМЕР 4. Символом $\mathbb{S}^{N-1}$ обозначим единичную сферу в эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$:

$$\mathbb{S}^{N-1}\stackrel{\text{def}}{=}\left\{x\in\mathbb{R}^N:\ \|x\|_N=1\right\}.$$

Символом $\mathbb{P}^{N-1}$ обозначим следующее множество:

$$\mathbb{P}^{N-1}\stackrel{\text{def}}{=}\left\{(x,-x);\ x\in\mathbb{S}^{N-1}\right\},$$

которое называется $(N-1)$−мерным *проективным пространством*.

Замечание 3. Заметим, что при отображении «склейки» диаметрально противоположных точек относительно точки $0\in\mathbb{R}^N$

$$x\in\mathbb{S}^{N-1}\to(x,-x)\in\mathbb{P}^{N-1}$$

отождествляются все точки, лежащие на пересечении единичной сферы и прямой, проходящей через начало координат.

Справедливо следующее равенство:

$$\mathrm{cat}_{\mathbb{P}^{N-1}}(\mathbb{P}^{N-1}) = N\ ^{1)}\,, \tag{1.3}$$

доказательство которого выходит за рамки настоящей книги.

Пусть теперь $\mathbb{S}^\infty$ — это сфера в банаховом пространстве $\mathbb{B}$:

$$\mathbb{S}^\infty \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \mathbb{B} :\ \|u\| = 1\}$$

и введем соответствующее проективное пространство

$$\mathbb{P}^\infty \stackrel{\text{def}}{=} \{(u, -u);\ u \in \mathbb{S}^\infty\}\,.$$

Заметим, что

$$\mathrm{cat}_{\mathbb{P}^\infty}\,(\mathbb{P}^\infty) = +\infty. \tag{1.4}$$

Отметим, что сфера $\mathbb{S}^\infty$ является метрическим пространством, которое удовлетворяет свойству ANR [2].

§ 2. Вариационные задачи на условный экстремум

Пусть $\mathbb{B}$ — это вещественное и сепарабельное банахово пространство с сопряженным $\mathbb{B}^*$. Пусть, кроме того,

$$\varphi \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1),$$

т. е. вещественный функционал φ является дважды дифференцируемым по Фреше, причем вторая его производная

$$\varphi''_{ff}(u) : \mathbb{B} \to \mathcal{L}(\mathbb{B}; \mathbb{B}^*)$$

является непрерывным отображением

$$\varphi''_{ff}(u) \in \mathbb{C}(\mathbb{B}; \mathcal{L}(\mathbb{B}; \mathbb{B}^*)).$$

Рассмотрим следующее множество:

$$\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in \mathbb{B} :\ \varphi(v) = 1\}\,, \tag{2.1}$$

причем предположим, что

$$\left\|\varphi'_f(v)\right\|_* > 0 \quad \text{для всех} \quad v \in \mathcal{V}. \tag{2.2}$$

В силу последнего условия множество $\mathcal{V} \subset \mathbb{B}$ является неособым многообразием. Из теории гладких многообразий вытекает, что многообразие $\mathcal{V}$ является $\mathbb{C}^2$−многообразием, причем норма банахова пространства

[1] Само проективное пространство $\mathbb{P}^{N-1}$ не является стягиваемым в себе самом.

[2] Смотри работу [?]

$\mathbb{B}$ индуцирует метрику на этом многообразии и относительно этой метрики многообразие $\mathcal{V}$ является метрическим пространством, удовлетворяющее ANR–свойству.

Введем теперь *касательное пространство* в точке $v \in \mathcal{V}$:

$$\mathrm{T}_v\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{u \in \mathbb{B} : \left\langle \varphi'_f(v), u \right\rangle = 0\right\}. \tag{2.3}$$

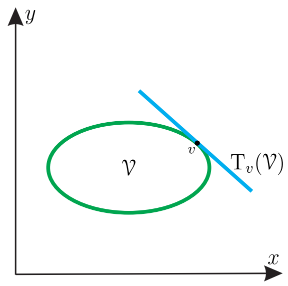

Рис. 2. Касательное многообразие $\mathrm{T}_v\mathcal{V}$.

З а м е ч а н и е 4. Отметим, что это действительно невырожденное касательное пространство, поскольку в силу (2.2) в каждой точке $v \in \in \mathcal{V}$ имеем

$$\varphi'_f(v) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{T}_v\mathcal{V} \neq \mathbb{B}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать условный экстремум функционала ψ на многообразии $\mathcal{V}$, порожденном функционалом φ.

Теперь введем в рассмотрение функционал

$$\psi : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1,$$

относительно которого предположим, что он принадлежит классу $\mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$, т. е. является дифференцируемым по Фреше на $\mathbb{B}$ и его производная Фреше является непрерывным отображением:

$$\psi'_f(u) \in \mathbb{C}(\mathbb{B};\mathbb{B}^*) : u \in \mathbb{B} \to \psi'_f(u) \in \mathbb{B}^*.$$

О п р е д е л е н и е н о р м ы с о г р а н и ч е н и е м. *Норма производной Фреше $\psi'_f(v)$ с ограничением на касательное пространство* $\mathrm{T}_v\mathcal{V}$ *имеет следующий вид*:

$$\left\|\psi'_f(v)\right\|_* (\mathrm{T}_v\mathcal{V}) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|u\|\leqslant 1,\; u\in \mathrm{T}_v\mathcal{V}} \left|\left\langle \psi'_f(v), u\right\rangle\right|, \tag{2.4}$$

где $v \in \mathcal{V}$.

З а м е ч а н и е 5. Имеет место следующее неравенство:

$$\left\|\psi'_f(v)\right\|_* (\mathrm{T}_v\mathcal{V}) \leqslant \left\|\psi'_f(v)\right\|_*, \tag{2.5}$$

поскольку в определении нормы с ограничением supremum берется по меньшему множеству.

В дальнейшем мы будем постоянно пользоваться следующим неравенством:

$$\langle f^*, w\rangle \leqslant \|f^*\|_* \, (\mathrm{T}_v\mathcal{V})\,\|w\| \quad \text{для всех} \quad w \in \mathrm{T}_v\mathcal{V},$$

которое доказывается следующим образом — в силу (2.4) имеет место неравенство

$$\left\langle f^*, \frac{w}{\|w\|}\right\rangle \leqslant \|f^*\|_* \, (\mathrm{T}_v\mathcal{V}) \quad \text{для} \quad w \neq \vartheta, \quad w \in \mathrm{T}_v\mathcal{V},$$

поскольку при $w = \vartheta$ искомое неравенство имеет место.

Дадим определение.

Определение 5. *Точка $v \in \mathcal{V}$ называется критической точкой функционала ψ по отношению к многообразию $\mathcal{V}$, если имеет место равенство*

$$\left\|\psi_f'(v)\right\|_* (\mathrm{T}_v\mathcal{V}) = 0. \tag{2.6}$$

Замечание 6. Заметим, что многообразие $\mathcal{V}$ «искривленно» и является, вообще говоря, не банаховым, а только метрическим пространством. Поэтому и необходимое условие экстремума функционала $\psi(u)$ на нем изменилось. И вместо условия

$$\psi_f'(u_0) = \vartheta^* \in \mathbb{B}^*, \quad \ker(\vartheta^*) = \mathbb{B}$$

мы имеем условие

$$\psi_f'(u_0) = \vartheta^*_{u_0} \in \mathbb{B}^*, \quad \ker(\vartheta^*_{u_0}) = \ker(\varphi_f'(u_0)) \subset \mathbb{B}.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться следующим обозначением:

$$\psi^d \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{v \in \mathcal{V} : \ \psi(v) \leqslant d\}. \tag{2.7}$$

Справедлива следующая *лемма о двойственности*.

Лемма 1. *Пусть $f, g \in \mathbb{B}^*$, тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\|v\|\leqslant 1, \ \langle g,v\rangle = 0} |\langle f, v\rangle| = \min_{\lambda\in\mathbb{R}^1} \|f - \lambda g\|_*. \tag{2.8}$$

Доказательство.

Действительно, с одной стороны

$$\sup_{\|v\|\leqslant 1, \ \langle g,v\rangle = 0} |\langle f, v\rangle| = \sup_{\|v\|\leqslant 1, \ \langle g,v\rangle = 0} |\langle f - \lambda g, v\rangle| \,.$$

С другой стороны, для всех $v \in \mathbb{B}$ при условии $\|v\| \leqslant 1$ имеем

$$|\langle f - \lambda g, v\rangle| \leqslant \|f - \lambda g\|_* \|v\| \leqslant \|f - \lambda g\|_*.$$

Кроме того, по теореме Хана–Банаха существует такое продолжение $\overline{f} \in \mathbb{B}^*$ функционала f, что

$$\langle \overline{f}, v\rangle = \langle f, v\rangle \quad \text{для всех} \quad v \in \ker(g), \tag{2.9}$$

т. е. для таких v, что $\langle g, v\rangle = 0$, и имеет место равенство

$$\sup_{\|v\|\leqslant 1,\ \langle g,v\rangle=0} |\langle f, v\rangle| = \|\overline{f}\|_*.$$

Кроме того, в силу (2.9) имеет место вложение

$$\ker(g) \subset \ker(\overline{f} - f),$$

из которого вытекает существование такого $\lambda_0 \in \mathbb{R}^1$, что [1]

$$\overline{f} - f = \lambda_0 g, \ ^{2)}$$

но отсюда вытекает, что

$$\|\overline{f}\|_* = \|f - \lambda_0 g\|_*.$$

Лемма доказана.

Замечание к лемме 1. Для полноты изложения докажем вспомогательное утверждение, существенно использованное при доказательстве леммы 1 [3].

Утверждение. *Пусть* Λ *и* Λ_i *при* $i = \overline{1, N}$ *— это линейные функционалы на векторном пространстве* X, *и пусть* $\langle\Lambda, x\rangle = 0$ *для всех* $x \in \mathcal{N}$,

$$\mathcal{N} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in X : \ \langle\Lambda_1, x\rangle = 0, \cdots, \langle\Lambda_n, x\rangle = 0\}.$$

Тогда

$$\Lambda = \alpha^1\Lambda_1 + \cdots + \alpha^n\Lambda_n$$

при некоторых $\alpha^1, ..., \alpha^n \in K$, *где* K *— поле скаляров* (*либо* $K = \mathbb{C}$ *либо* $K = \mathbb{R}$).

□ Действительно, определим отображение

$$\pi(x) : \ X \to K^n \stackrel{\mathrm{def}}{=} K \otimes \cdots \otimes K$$

следующим образом:

$$\pi(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\langle\Lambda_1, x\rangle, ..., \langle\Lambda_n, x\rangle).$$

Заметим, что если $\pi(x) = \pi(x')$, то справедлива цепочка импликаций

$$\pi(x) = \pi(x') \Rightarrow \Big(\langle\Lambda_1, x - x'\rangle, ..., \langle\Lambda_n, x - x'\rangle\Big) = (0, ..., 0) \in K^n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x - x' \in N \Rightarrow \langle\Lambda, x - x'\rangle = 0 \Rightarrow \langle\Lambda, x\rangle = \langle\Lambda, x'\rangle.$$

---

1) Смотри лемму 3.9 работы У. Рудина [**?**].

2) В частности, $\ker(\overline{f} - f) = \ker(\lambda_0 g)$.

3) Смотри книгу У. Рудина [**?**].

Таким образом, на K^n существует однозначная функция $F\circ$, определенная следующим образом:

$$\Lambda = F \circ \pi.$$

Докажем, что эта функция является линейной. Заметим, что

$$\alpha^1\pi(x^1) + \alpha^2\pi(x^2) = \pi(\alpha^1 x^1 + \alpha^2 x^2) \quad \text{для всех} \quad \alpha^1,\ \alpha^2 \in K,\ x^1, x^2 \in X$$

поэтому имеем

$$\langle \Lambda, \alpha^1 x^1 + \alpha^2 x^2\rangle = F(\pi(\alpha^1 x^1 + \alpha^2 x^2)) = F(\alpha^1\pi(x^1) + \alpha^2\pi(x^2)) = \\ = \alpha^1\langle\Lambda, x^1\rangle + \alpha^2\langle\Lambda, x^2\rangle = \alpha^1 F(\pi(x^1)) + \alpha^2 F(\pi(x^2)).$$

Следовательно, функция F является линейной на K^n. Значит, имеет следующий вид:

$$F(u_1, ..., u_n) := \alpha^1 u_1 + \cdots + \alpha^n u_n$$

с некоторыми постоянными $\alpha^k \in K$ при $k = \overline{1,n}$. Отсюда сразу же вытекает цепочка равенств

$$\langle\Lambda, x\rangle = F(\pi(x)) = F(\langle\Lambda_1, x\rangle, ..., \langle\Lambda_n, x\rangle) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \langle\Lambda_i, x\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha^i\Lambda_i, x\right\rangle$$

для всех $x \in X$. Тем самым,

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \Lambda_i. \quad \boxtimes$$

Из леммы 1 сразу же вытекает следующее важное утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ *и* $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$, $u \in \mathcal{V}$, *где многообразие* $\mathcal{V}$ *определено формулой* (2.1). *Тогда имеет место равенство*

$$\left\|\psi'_f(u)\right\|_*(\mathrm{T}_u\mathcal{V}) = \min_{\lambda\in\mathbb{R}^1} \left\|\psi'_f(u) - \lambda\varphi'_f(u)\right\|_*. \tag{2.10}$$

В частности, если $u \in \mathcal{V}$ *— это критическая точка функционала* ψ *относительно многообразия* $\mathcal{V}$, *то найдется такое* $\mu \in \mathbb{R}^1$, *что*

$$\psi'_f(u) - \mu\varphi'_f(u) = \vartheta \in \mathbb{B}^*. \tag{2.11}$$

Доказательство.

Достаточно взять в лемме 1 $f = \psi'_f(u) \in \mathbb{B}^*$ и $g = \varphi'_f(u) \in \mathbb{B}^*$ при фиксированном $u \in \mathbb{B}$ и $\mu = \lambda_0$.

Теорема доказана.

Замечание 7. Доказательство теоремы 3 является обещанным доказательством теоремы 1 предыдущей лекции в общем случае для функционалов $\varphi, \psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$.