Лекция 9

ОБЩАЯ ЛЕММА О ДЕФОРМАЦИИ

§ 1. Псевдоградиентное векторное поле

Теперь дадим определение псевдоградиентного векторного поля на многообразии $\mathcal{V} = \{u \in \mathbb{B} : \varphi(u) = 1\}$. С этой целью рассмотрим следующее подмножество $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$:

$$\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u \in \mathcal{V} : \left\| \psi_f'(u) \right\|_* (\mathrm{T}_u \mathcal{V}) > 0 \right\} \neq \varnothing.$$

Замечание 1. Это множество в силу результата (**??**), является дополнительным ко множеству условно критических точек функционала $\psi(u)$ относительно многообразия $\mathcal{V}$. В частности, это множество открыто в метрическом пространстве $\mathcal{V}$.

Замечание 2. В дальнейшем мы будем изучать функционалы ψ класса $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$, Поэтому, если в некоторой точке $v \in \mathcal{V}$ имеет место неравенство

$$\left\| \psi_f'(u) \right\|_* (\mathrm{T}_u \mathcal{V}) > 0,$$

то и в некоторой малой окрестности из топологии метрического пространства $\mathcal{V}$ будет иметь место это неравенство.

Множества $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$ является метрическими пространствами относительно следующей метрики:

$$d(u_1, u_2) \stackrel{\text{def}}{=} \|u_1 - u_2\|, \quad u_1, u_2 \in \mathcal{V}.$$

Определение 1. *Ограниченно липшиц–непрерывное на* $\mathcal{M} \subset \subset \mathcal{V} \subset \mathbb{B}$ *отображение*

$$g(u) : \mathcal{M} \subset \mathcal{V} \to \mathrm{T}_u \mathcal{V}$$

называется <u>псевдоградиентным векторным полем</u> на $\mathcal{M}$, *если для этого отображения выполнены следующие свойства*:

$$\|g(u)\| \leqslant 2 \left\| \psi_f'(u) \right\|_* (\mathrm{T}_u \mathcal{V}), \tag{1.1}$$

$$\left\langle \psi_f'(u), g(u) \right\rangle \geqslant \left\| \psi_f'(u) \right\|_*^2 (\mathrm{T}_u \mathcal{V}) \tag{1.2}$$

для всех $u \in \mathcal{M}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ *и* $\varphi \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$, *тогда на* $\mathcal{M}$ *существует псевдоградиентное поле* $g(u) : \mathcal{M} \to \mathbb{B}$.

Доказательство. Доказательство проведем за несколько шагов.

Шаг 1. Итак, пусть $v \in \mathcal{M} \subset \mathcal{V}$ — это произвольная точка и $\mathrm{T}_v\mathcal{V}$ — это касательное пространство в этой точке. Напомним, что $x \in \mathrm{T}_v\mathcal{V}$, если

$$\left\langle \varphi_f'(v), x \right\rangle = 0.$$

Поскольку $\psi_f'(v) \neq \vartheta \in \mathbb{B}^*$ для всех $v \in \mathcal{M}$, то найдется такое $x \in \mathrm{T}_v(\mathcal{V})$, что $\|x\| = 1$ и

$$\left\langle \psi_f'(v), x \right\rangle > \frac{2}{3} \left\| \psi_f'(v) \right\|_* (\mathrm{T}_v\mathcal{V}). \tag{1.3}$$

□ Действительно,

$$\psi_f'(v) \neq \vartheta \quad \text{для} \quad v \in \mathcal{M}.$$

Поэтому по следствию из теоремы Хана–Банаха найдется такое $x \in \in \mathrm{T}_v(\mathcal{V})$, что выполнены следующие равенства

$$\|x\| = 1 \quad \text{и} \quad \left\langle \psi_f'(v), x \right\rangle = \left\| \psi_f'(v) \right\|_* (\mathrm{T}_v\mathcal{V}) \, \|x\| =$$
$$= \left\| \psi_f'(v) \right\|_* (\mathrm{T}_v\mathcal{V}) > \frac{2}{3} \left\| \psi_f'(v) \right\|_* (\mathrm{T}_v\mathcal{V}).$$

Тем самым, неравенство (1.3) доказано. ⊠

Шаг 2. По определению многообразия $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$ в каждой его точке $v \in \mathcal{M}$ имеет место неравенство

$$\varphi_f'(v) \neq \vartheta \in \mathbb{B}^*,$$

но тогда в силу того же следствия из теоремы Хана–Банаха вытекает существование такого $z \in \mathbb{B}$, что

$$\left\langle \varphi_f'(v), z \right\rangle = 1. \tag{1.4}$$

□ Действительно, найдется такое $z_1 \in \mathbb{B}$, что имеет место следующее равенство:

$$\left\langle \varphi_f'(v), z_1 \right\rangle = \left\| \varphi_f'(v) \right\|_* \|z_1\| \quad \text{при} \quad \|z_1\| = 1,$$

т.е.

$$\left\langle \varphi_f'(v), z_1 \right\rangle = \left\| \varphi_f'(v) \right\|_*.$$

Откуда следует, что если положить

$$z = \frac{z_1}{\left\| \varphi_f'(v) \right\|_*},$$

то получим требуемое равенство. $\boxtimes$

З а м е ч а н и е 3. Заметим, что эти найденные элементы $x, z \in \mathbb{B}$, естественно, зависят от $v \in \mathcal{M}$.

Шаг 3. Отметим, что $\varphi \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$, поэтому в окрестности (из топологии метрического пространства $\mathcal{M}$) точки $v \in \mathcal{M} \subset \mathcal{V}$ имеет место следующее разложение:

$$\left\langle \varphi'_f(u), z \right\rangle - \left\langle \varphi'_f(v), z \right\rangle = \left\langle \varphi''_{ff}(v)(u-v), z \right\rangle + \omega(z, v, u-v),$$

где

$$\lim_{\|u-v\|\to 0} \frac{\omega(z, v, u-v)}{\|u-v\|} = 0, \quad u, v \in \mathcal{M}, \quad z \in \mathbb{B},$$

но в силу (1.4) отсюда приходим к равенству

$$\left\langle \varphi'_f(u), z \right\rangle = 1 + \left\langle \varphi''_{ff}(v)(u-v), z \right\rangle + \omega(z, v, u-v),$$

из которого вытекает, что для близких точек $u, v \in \mathcal{M}$ в топологии метрического пространства $\mathcal{M}$ справедливо неравенство

$$\left\langle \varphi'_f(u), z \right\rangle > 0. \tag{1.5}$$

Шаг 4. Теперь введем следующие обозначения:

$$y := \frac{3}{2} x \left\| \psi'_f(v) \right\|_* (\mathrm{T}_v \mathcal{V}), \quad g_v(u) := y - \frac{\left\langle \varphi'_f(u), y \right\rangle}{\left\langle \varphi'_f(u), z \right\rangle} z,$$

$$g_v(u) \in \mathrm{T}_v \mathcal{V}, \quad x \in \mathrm{T}_v \mathcal{V},$$

причем второе равенство рассматривается из достаточно малой окрестности точки $v \in \mathcal{M}$, существование которой следует из (1.5). Заметим, что

$$x \in \mathrm{T}_v \mathcal{V} \Leftrightarrow \left\langle \varphi'_f(v), x \right\rangle = 0.$$

Следовательно, $y \in \mathrm{T}_v \mathcal{V}$ и

$$\left\langle \varphi'_f(v), y \right\rangle = 0 \Rightarrow g_v(v) = y.$$

Шаг 5. Теперь заметим, что в точке $u = v$ отображение $g_v(u)$ удовлетворяет условиям (1.1) и (1.2).

$\square$ Действительно, имеют место следующие выражения

$$\|g_v(v)\| = \|y\| = \frac{3}{2} \|x\| \left\| \psi'_f(v) \right\|_* (\mathrm{T}_v \mathcal{V}) =$$
$$= \frac{3}{2} \left\| \psi'_f(v) \right\|_* (\mathrm{T}_v \mathcal{V}) < 2 \left\| \psi'_f(v) \right\|_* (\mathrm{T}_v \mathcal{V}),$$

кроме того,

$$\left\langle \psi'_f(v), g_v(v) \right\rangle = \frac{3}{2} \left\langle \psi'_f(v), x \right\rangle \left\| \psi'_f(v) \right\|_* (\mathrm{T}_v \mathcal{V}) > \left\| \psi'_f(v) \right\|_*^2 (\mathrm{T}_v \mathcal{V}),$$

поскольку

$$\|x\| = 1, \quad x \in \mathrm{T}_v\mathcal{V}, \quad \left\langle \psi'_f(v), x \right\rangle = \left\| \psi'_f(v) \right\|_* (\mathrm{T}_v\mathcal{V}). \quad \boxtimes$$

Шаг 6. Теперь заметим, что поскольку $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ и $\varphi \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$, то отображение $g_v(u)$ является ограничено липшиц–непрерывным в некоторой окрестности точки $u = v$.

□ Действительно, для этого достаточно доказать локальную непрерывность скалярных функций

$$\left\langle \varphi'_f(u), y \right\rangle \quad \text{и} \quad \left\langle \varphi'_f(u), z \right\rangle, \quad \left\langle \varphi'_f(u), z \right\rangle = 1$$

в некоторой малой окрестности точки $u = v \in \mathcal{M}$ из топологии метрического пространства $\mathcal{M}$. Это следствие того, что $\varphi \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$ и следующего разложения:

$$\left\langle \varphi'_f(u), w \right\rangle = \left\langle \varphi'_f(v), w \right\rangle + \left\langle \varphi''_{ff}(v)(u-v), w \right\rangle + \omega(w, v, u-v),$$

где

$$\lim_{\|u-v\|\to 0} \frac{|\omega(w, v, u-v)|}{\|u-v\|} = 0, \quad u, v \in \mathcal{M}, \quad w \in \mathbb{B}.$$

Теперь поскольку

$$\varphi''_{ff}(v) \in \mathcal{L}\left(\mathbb{B};\mathbb{B}^*\right),$$

т. е. при фиксированном $v \in \mathcal{M}$ отображение $\varphi''_{ff}(v)$ является линейным и непрерывным отображением и, значит, ограниченным, поэтому имеет место следующее неравенство:

$$\left| \left\langle \varphi'_f(u), w \right\rangle - \left\langle \varphi'_f(v), w \right\rangle \right| \leqslant K(v, w)\|u-v\|, \quad 0 < K(v, w) < +\infty$$

при достаточно малой величине $\|u-v\|$ и при условии

$$\|v\| \leqslant R, \quad \|w\| \leqslant R,$$

т. е. функция $\left\langle \varphi'_f(u), w \right\rangle$ является ограничено липшиц–непрерывной в некоторой малой окрестности точки $v \in \mathcal{V}$. ⊠

Шаг 7. С другой стороны, $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$. Значит, отображение

$$\psi'_f(\cdot) \in \mathbb{C}(\mathbb{B};\mathbb{B}^*),$$

т. е. непрерывно в некоторой окрестности точки $u = v \in \mathcal{V}$. Следовательно, найдется такая окрестность $\mathcal{N}(v) \supset u$ точки $v \in \mathcal{M}$ из топологии метрического пространства $\mathcal{M}$, что будут иметь место следующие неравенства:

$$\|g_v(u)\| \leqslant 2 \left\| \psi'_f(u) \right\|_* (\mathrm{T}_u\mathcal{V}), \tag{1.6}$$

$$\left\langle \psi'_f(u), g_v(u) \right\rangle \geqslant \left\| \psi'_f(u) \right\|_*^2 (\mathrm{T}_u\mathcal{V}) \tag{1.7}$$

для всех $u \in \mathcal{N}(v)$.

Шаг 8. Рассмотрим теперь семейство

$$\mathcal{W} := \{\mathcal{N}(v);\ v \in \mathcal{M}\}.$$

Это семейство является открытым покрытием метрического пространства $\mathcal{M}$. Заметим, что существует локально конечное открытое покрытие метрического пространства $\mathcal{M}$

$$\mathcal{U} := \{\mathcal{N}_i,\ i \in \mathbb{N}\},$$

что для всякого $i \in \mathbb{N}$ найдется такое $v_i \in \mathcal{V}$, что [1])

$$\overline{\mathcal{N}}_i \subset \mathcal{N}(v_i).$$

Теперь сопоставим каждому $i \in \mathbb{N}$ некоторое $v_i \in \mathcal{V}$ и соответствующее $\mathcal{N}_i$ и $\mathcal{N}(v_i)$. Тогда введем функцию

$$g_i(u) := \begin{cases} g_{v_i}(u), & \text{при} \quad u \in \mathcal{N}(v_i); \\ 0, & \text{при} \quad u \notin \mathcal{N}(v_i). \end{cases}$$

Шаг 9. Наконец, введем весовую функцию

$$\rho_i(u) := \mathrm{distance}(u, \mathbb{B}\backslash\mathcal{N}_i), \quad \mathbb{B}\backslash\mathcal{N}_i - \text{замкнуто}.$$

Теперь рассмотрим отображение $g(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, определенное формулой

$$g(u) := \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i(u) g_i(u) \Bigg/ \sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j(u).$$

Теперь осталось проверить, что оно удовлетворяет условиям определения 1 псевдоградиентного векторного поля на $\mathcal{M}$.

□ Действительно, для каждого $i \in \mathbb{N}$ и всякого $u \in \mathcal{N}(v_i)$ в силу (1.6) имеет место неравенство

$$\|g_{v_i}(u)\| \leqslant 2 \left\|\psi'_f(u)\right\|_* (\mathrm{T}_u\mathcal{V}).$$

Следовательно,

$$\|g(u)\| \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i(u) \, \|g_i(u)\| \Bigg/ \sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j(u) \leqslant 2 \left\|\psi'_f(u)\right\|_* (\mathrm{T}_u\mathcal{V}).$$

Теперь в силу (1.7) имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left\langle \psi'_f(u), g(u) \right\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i(u) \left\langle \psi'_f(u), g_i(u) \right\rangle \Bigg/ \sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j(u) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i(u) \left\|\psi'_f(u)\right\|_*^2 (\mathrm{T}_u\mathcal{V}) \Bigg/ \sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j(u) = \left\|\psi'_f(u)\right\|_*^2 (\mathrm{T}_u\mathcal{V}). \quad \boxtimes$$

[1]) Смотри работу [?] леммы 6.4.16 и 4.3.75.

Кроме того, для произвольного $j \in \mathbb{N}$, с одной стороны, имеет место неравенство

$$|\rho_j(u_1) - \rho_j(u_2)| \leqslant \|u_1 - u_2\| \quad \text{для всех} \quad u_1, u_2 \in \mathbb{B},$$

а, с другой стороны, в силу локальной конечности покрытия $\mathcal{N}_i$ имеем

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j(u) \geqslant \delta(R) > 0 \quad \text{для всех} \quad \|u\| \leqslant R < +\infty.$$

Поэтому отображение $g(u)$ ограниченно липшиц–непрерывно на $\mathcal{M}$.

Теорема доказана.

§ 2. Лемма о деформации

Теперь докажем следующую важную лемму о деформации.

Лемма о деформации. *Пусть* $\psi \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{B}; \mathbb{R}^1)$ *и множество* $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$. *Постоянные* $c \in \mathbb{R}^1$ *и* $\varepsilon, \delta > 0$ *таковы, что*

$$\left\| \psi'_f(u) \right\|_* (\mathrm{T}_u \mathcal{V}) \geqslant \frac{8\varepsilon}{\delta} \tag{2.1}$$

для всех

$$u \in \mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \psi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap \mathcal{S}_{2\delta} \cap \mathcal{V},$$

где

$$\mathcal{S}_{2\delta} \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \mathbb{B} : \ \text{distance}(u, \mathcal{S}) \leqslant 2\delta\}.$$

Тогда существует такая деформация $\eta(t, u) \in \mathbb{C}([0, 1] \times \mathcal{V}; \mathcal{V})$, *что выполнены следующие свойства*:

(i) *либо* $u \in \mathcal{A}$ *и тогда* $\eta(t, u) = u$ *при* $t = 0$ *либо* $u \notin \mathcal{A}$;

(ii) $\eta(1, \psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{S}) \subset \psi^{c-\varepsilon}$, *где*

$$\psi^{c \pm \varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \mathbb{B} : \ \psi(u) \leqslant c \pm \varepsilon\};$$

(iii) $\psi(\eta(t, u))$ *является убывающей функцией по* $t \in [0, 1]$ *для всех* $u \in \mathcal{V}$.

Доказательство.

Шаг 1. В силу теоремы 5 на многообразии

$$\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u \in \mathcal{V} : \ \psi'_f(u) \neq \vartheta \in \mathbb{B}^* \right\}, \quad \mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \mathbb{B} : \ \varphi(u) = 1\}$$

существует псевдоградиентное векторное поле $g(u) : \mathcal{M} \subset \mathcal{V} \to \mathrm{T}_u \mathcal{V}$, которое по его определению удовлетворяет условиям:

$$\|g(u)\| \leqslant 2 \left\| \psi'_f(u) \right\|_* (\mathrm{T}_u \mathcal{V}), \quad \left\langle \psi'_f(u), g(u) \right\rangle \geqslant \left\| \psi'_f(u) \right\|_*^2 (\mathrm{T}_u \mathcal{V})$$

для всех $u \in \mathcal{M}$. В частности, на $\mathcal{S} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{V} \subset \mathbb{B}$.

Шаг 2. Теперь определим следующие замкнутые множества на $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \psi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]) \cap \mathcal{S}_{2\delta} \cap \mathcal{V},$$

$$\mathcal{B} \overset{\text{def}}{=} \psi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]) \cap \mathcal{S}_\delta \cap \mathcal{V},$$

где

$$\mathcal{S}_\delta \overset{\text{def}}{=} \{u \in \mathbb{B} : \ \mathrm{distance}(u, \mathcal{S}) \leqslant \delta\}.$$

Ясно, что $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Поэтому

$$(\mathbb{B} \backslash \mathcal{A}) \cap \mathcal{B} = \varnothing.$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$\rho(u) := \frac{\mathrm{distance}(u, \mathbb{B}\backslash\mathcal{A})}{\mathrm{distance}(u, \mathbb{B}\backslash\mathcal{A}) + \mathrm{distance}(u, \mathcal{B})}.$$

Понятно, что введенная функция удовлетворяет условию:

$$\rho(u) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad u \in \mathcal{B}; \\ 0, & \text{при} \quad u \in \mathbb{B}\backslash\mathcal{A}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Рассмотрим векторное поле на $\mathbb{B}$:

$$f(u) := \begin{cases} -\rho(u) g(u) \Big/ \|g(u)\|^2, & \text{при} \quad u \in \mathcal{A}; \\ 0, & \text{при} \quad u \in \mathbb{B}\backslash\mathcal{A}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Шаг 3. Теперь нам надо доказать, что это векторное поле является ограниченно липшиц–непрерывным на $\mathbb{B}$.

По определению псевдоградиентного векторного поля $g(u) : u \in \mathcal{M} \subset \mathcal{V} \to \mathrm{T}_u\mathcal{V}$ является ограниченно липшиц–непрерывным, поэтому нам достаточно доказать, что функция $\rho(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ является ограниченно липшиц–непрерывной.

☐ Действительно, для любых u_1, u_2 из ограниченного множества $\{u \in \mathbb{B} : \ \|u\| \leqslant R\}$ банахова пространства $\mathbb{B}$ имеет место неравенство [1)]

$$\mathrm{distance}(u_k, \mathbb{B}\backslash\mathcal{A}) + \mathrm{distance}(u_k, \mathcal{B}) \geqslant \delta(R) > 0 \quad \text{при} \quad k = 1, 2,$$

поэтому имеет место следующая цепочка неравенств:

$$|\rho(u_1) - \rho(u_2)| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\delta} \left|\mathrm{distance}(u_1, \mathbb{B}\backslash\mathcal{A}) - \mathrm{distance}(u_2, \mathbb{B}\backslash\mathcal{A})\right| + \\ + \frac{1}{\delta} \left|\mathrm{distance}(u_1, \mathcal{B}) - \mathrm{distance}(u_2, \mathcal{B})\right|.$$

Кроме того, справедливо следующее неравенство:

$$|\mathrm{distance}(\mathcal{C}, u_1) - \mathrm{distance}(\mathcal{C}, u_2)| \leqslant \|u_1 - u_2\|$$

для всех $u_1, u_2 \in \mathbb{B}$.

[1)] Смотри шаг 2 теоремы 1 лекции 5.

Следовательно, приходим к выводу об ограниченной липшиц–непрерывности функции

$$\rho(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1.$$

тем самым, ограниченная липшиц–непрерывность функции $f(u) : \mathbb{B} \to \to \mathbb{B}$ доказана. ⊠

Шаг 4. Теперь заметим, что справедливо неравенство

$$\|f(u)\| \leqslant \frac{\delta}{8\varepsilon} \quad \text{для всех} \quad u \in \mathcal{A}.$$

□ Действительно, по условию теоремы

$$\left\|\psi_f'(u)\right\|_* (\mathrm{T}_u \mathcal{V}) \geqslant \frac{8\varepsilon}{\delta} \quad \text{для всех} \quad u \in \mathcal{A}$$

и, кроме того, по определению псевдоградиентного векторного поля на $\mathcal{M}$ имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left\|\psi_f'(u)\right\|_*^2 (\mathrm{T}_u \mathcal{V}) \leqslant \left\langle \psi_f'(u), g(u) \right\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \left\|\psi_f'(u)\right\|_* (\mathrm{T}_u \mathcal{V}) \, \|g(u)\| \Rightarrow \|g(u)\| \geqslant \left\|\psi_f'(u)\right\|_* (\mathrm{T}_u \mathcal{V}) \geqslant \frac{8\varepsilon}{\delta}.$$

Теперь из определения (2.3) векторного поля $f(u)$ имеет место неравенство

$$\|f(u)\| \leqslant \frac{\rho(u)}{\|g(u)\|} \leqslant \frac{1}{\|g(u)\|} \leqslant \frac{\delta}{8\varepsilon}. \quad ⊠$$

Шаг 5. Давайте теперь рассмотрим задачу Коши для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения на многообразии $\mathcal{V}$:

$$\frac{d\sigma}{dt} = f(\sigma), \quad \sigma(0) = u \in \mathcal{V}. \tag{2.4}$$

Поскольку нелинейная функция $f(\cdot)$ по–доказанному является ограниченно липшиц–непрерывным и ограниченным отображением на $\mathcal{V}$, то согласно общей теории нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений задача Коши (2.4) имеет единственное классическое решение класса $\sigma(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, 8\varepsilon]; \mathcal{V})$, лежащее на многообразии $\mathcal{V}$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$.

Шаг 6. Теперь мы определим искомую деформацию $\eta(t, u)$ и докажем, что она удовлетворяет условиям (i)–(iii). Действительно, пусть

$$\eta(t, u) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sigma(8\varepsilon t, u) \in \mathbb{C}([0, 1] \times \mathcal{V}; \mathcal{V}).$$

Заметим, что всякое классическое решение задачи (2.4) удовлетворяет следующему интегральному уравнению

$$\sigma(t, u) - u = \int\limits_0^t f(\sigma(\tau, u)) \, d\tau,$$

поэтому мы отсюда получаем следующую оценку:

$$\|\sigma(t,u)-u\| \leqslant \int\limits_0^t \|f(\sigma(\tau,u))\|\,d\tau \leqslant \frac{\delta}{8\varepsilon}t \leqslant \delta \quad \text{при} \quad t \in [0, 8\varepsilon].$$

Но тогда отсюда приходим к неравенству

$$\|\eta(t,u)-u\| \leqslant \delta \quad \text{для всех} \quad t \in [0,1]. \tag{2.5}$$

Заметим, что справедлива следующая цепочка неравенств в силу определения псевдоградиентного поля $g(u)$:

$$\frac{d\psi(\sigma(t,u))}{dt} = \left\langle \psi_f'(\sigma(t,u)), \frac{d\sigma(t,u)}{dt} \right\rangle = \left\langle \psi_f'(\sigma(t,u)), f(\sigma(t,u)) \right\rangle =$$
$$= -\frac{\rho(\sigma(t,u))}{\|g(\sigma(t,u))\|^2} \left\langle \psi_f'(\sigma(t,u)), g(\sigma(t,u)) \right\rangle \leqslant -\rho(\sigma(t,u)) \leqslant$$
$$\leqslant -\frac{1}{4}\rho(\sigma(t,u)) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [0, 8\varepsilon]. \tag{2.6}$$

Шаг 7. Давайте теперь проверим, что выполнены все утверждения теоремы. Итак, если $u \in \mathcal{A}$, то

$$\eta(t,u) = u \quad \text{при} \quad t = 0,$$

поскольку

$$\eta(t,u)|_{t=0} = \sigma(8\varepsilon t, u)|_{t=0} = \sigma(0,u) = u.$$

Таким образом, получаем, что (i) выполнено, поскольку либо $u \in \mathcal{A}$ либо $u \notin \mathcal{A}$. Утверждение (iii) вытекает сразу же из (2.6), поскольку

$$\frac{d\psi(\sigma(t,u))}{dt} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{d\psi(\eta(t,u))}{dt} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,1]. \tag{2.7}$$

Осталось доказать только утверждение (ii).

Итак, возьмем $u \in \psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{S}$. Возможно два случая. Первый случай: для всех $t \in [0, 8\varepsilon]$ имеем $\sigma(t,u) \in \psi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$. Второй случай: найдется такое $t^* \in [0, 8\varepsilon]$, что $\sigma(t^*, u) \notin \psi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$.

Рассмотрим сначала второй случай. Поскольку $u \in \psi^{c+\varepsilon} \cap \mathcal{S}$ и выполнено свойство (iii), то при этом $t^* \in [0, 8\varepsilon]$ имеет место неравенство

$$\psi(\sigma(t^*, u)) < c - \varepsilon,$$

то и

$$\psi(\sigma(8\varepsilon, u)) < c - \varepsilon$$

в силу неравенства (2.7).

Рассмотрим теперь первый случай. Пусть теперь $\sigma(t,u) \in \psi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ для всех $t \in [0, 8\varepsilon]$, но тогда в силу (2.5) мы получим, что

$$\|\sigma(t,u) - u\| \leqslant \delta,$$

т. е.
$$\sigma(t,u) \in \mathcal{B} := \psi^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon]) \cap \mathcal{S}_\delta \cap \mathcal{V}.$$
Тогда $\rho(\sigma(t,u)) = 1$ и мы получаем из (2.6) неравенство
$$\frac{d\psi(\sigma(t,u))}{dt} \leqslant -\frac{1}{4},$$
следовательно, интегрируя это неравенство по $t \in [0, 8\varepsilon]$, получим неравенство
$$\psi(\sigma(8\varepsilon, u)) \leqslant \psi(u) - \frac{1}{4}8\varepsilon \leqslant c + \varepsilon - 2\varepsilon = c - \varepsilon,$$
т. е.
$$\psi(\eta(1,u)) = \psi(\sigma(8\varepsilon, u)) \leqslant c - \varepsilon \quad \text{для всех} \quad u \in \mathcal{S} \cap \psi^{c+\varepsilon}.$$
Утверждение (ii) доказано.

Лемма доказана.