

# Лекция 2. Математическое моделирование волноведущих систем

Излучатели конечных размеров, расположенные в свободном пространстве, возбуждают электромагнитное поле, распространяющееся по всем направлениям. Однако энергию электромагнитного поля часто необходимо передавать от излучателя к нагрузке так, чтобы она не рассеивалась в пространстве, а по возможности целиком поступала в нагрузку, для чего она должна быть локализована в части пространства – определенном канале. В качестве таких каналов используются волноведущие (направляющие) системы. Основой любой волноведущей системы являются волноводы.

Волновод – это специальное устройство или канал в неоднородной среде, в котором могут распространяться волны различной природы: акустические (в акустических волноводах), электромагнитные (в радиоволноводах, световодах), сейсмические и другие.

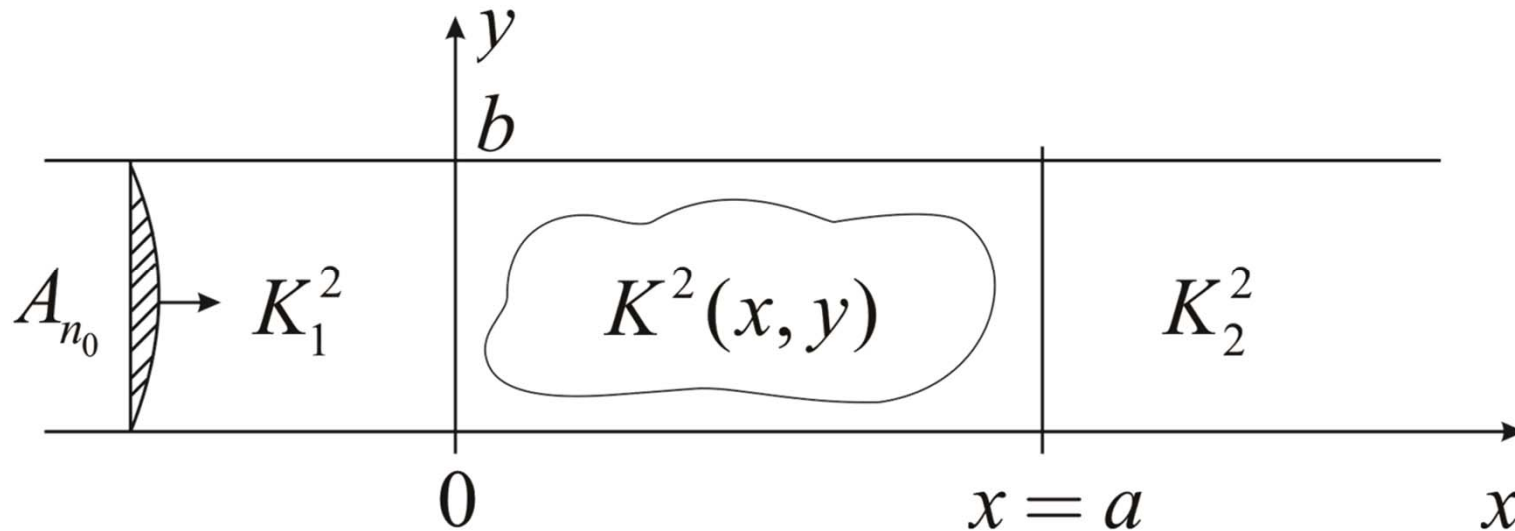
Акустические волноводы, как правило, представляют собой трубы со звукоотражающими стенками. Радиоволноводы – это трубы, полые или частично заполненные диэлектриком. Диэлектрические волноводы представляют собой диэлектрические стержни. Их разновидностью являются волоконные сваетоводы – преимущественно стеклянные нити, по которым при определенных условиях могут распространяться световые волны.

**Одним из первых исследователей волноведущих систем был лорд Дж. У. Рэлей, который изучал акустические волны в органных трубах.**

**В настоящее время большой интерес вызывает применение в радиофизике, оптике, акустике и в ряде других областей науки и техники метаматериалов, с использованием которых возможно создание систем и устройств с уникальными свойствами. В частности такие метаматериалы используются для создания уникальных волноведущих систем.**

**Значительный интерес представляют волноведущие системы, основанные на применении фрактальных структур, а также бианизотропных и киральных (гиротропных сред) и фотонных кристаллов**

## Простейшая математическая модель волновода



Рассмотрим плоский волновод с **локальной нерегулярностью**.

При  $x \leq 0$  и  $x \geq a$  волновод **регулярный**: его заполнение однородно и геометрия сечения постоянна.

**Нормальные волны (моды) – частные решения вида**

$$u(x, y) = e^{i\gamma x} \psi(y), \quad (1)$$

где  $\gamma$  – **постоянная распространения**,  $\psi(y)$  – **функция сечения**.

Поле  $u(x, y)$  в волноводе удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (x, y) \in V \equiv \mathbb{R}^1 \times (0, b), \quad (2)$$

где  $k^2(x, y) = \bar{k}^2(x, y) + i\bar{k}^2(x, y)$ ,

$$k^2(x, y) = \begin{cases} k_1^2 = const, & x < 0, \\ k^2(x, y), & 0 < x < a, \\ k_2^2 = const, & x > a. \end{cases} \quad (3)$$

**Электродинамический случай:**  $k^2(x, y) = k_0^2 \varepsilon(x, y)$ , где

$k_0 = \frac{\omega}{c}$  – волновое число,  $\varepsilon(x, y)$  – диэлектрическая проницаемость.

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1 - \quad (4)$$

- граничные условия (например, **идеально проводящие** стенки).

(1), (2), (4)  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \psi''(y) + \lambda\psi(y) = 0, & 0 < y < b, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \psi(0) = 0, & \psi(b) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где  $\lambda = k^2 - \gamma^2$ .

(5), (6)  $\Rightarrow$

$$\psi_n(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{\pi n y}{b}, \quad \lambda_n = \left( \frac{\pi n}{b} \right)^2, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (7)$$

Существует **счетное множество** нормальных волн (мод) вида:

$$u_n(x, y) = e^{i\gamma_n x} \psi_n(y), \quad \gamma_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

при  $(x \leq 0, x \geq a)$ . (8)

Пусть на неоднородность падает слева нормальная волна  
индекса  $n_0$  с амплитудой  $A_{n_0}$ . В сечении  $x = 0$  **парциальные**  
**условия излучения** при временной зависимости  $e^{-i\omega t}$  имеют  
**вид:**

$$\int_0^b \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + i\gamma_n^{(1)} u \right\}_{x=0} \cdot \psi_n(y) dy = 2i\gamma_{n_0}^{(1)} A_{n_0} \cdot \delta_{n,n_0}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (9)$$

Аналогично ставятся условия в сечении  $x = a$ .

Условия (9) – **нелокальные**.

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(x) \psi_n(y), \quad (10)$$

$$Z_n(x) = \int_0^b u(x, y) \psi_n(y) dy \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (11)$$

Из (9), (11) следует, что парциальные условия излучения – это условия, которые накладываются на коэффициенты Фурье  $Z_n(x)$

в разложении функции  $U(x,y)$  по функциям сечения  $\psi_n(y)$ :

$$Z_n'(0) + i\gamma_n^{(1)} Z_n(0) = 2i\gamma_{n_0}^{(1)} A_{n_0} \delta_{n,n_0} \quad (11)$$

Пусть  $D$ -область между сечениями  $x=0$  и  $x=a$ :  $\bar{D} \equiv \{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ .

Краевая задача имеет вид:

$$\Delta u + k^2(x,y)u = 0, \quad (x,y) \in D, \quad (12)$$

$$u(x,0)=0, \quad u(x,b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (13)$$

$$\int_0^b \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + i\gamma_n^{(1)} u \right\}_{x=0} \psi_n(y) dy = 2i\gamma_{n_0}^{(1)} A_{n_0} \delta_{n,n_0} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (14)$$

$$\int_0^b \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - i\gamma_n^{(2)} u \right\}_{x=a} \psi_n(y) dy = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (15)$$

где  $\gamma_n^{(l)} = \sqrt{k_l^2 - \lambda_n}$  ( $n = 1, 2, \dots; l = 1, 2$ ) – постоянные распространения нормальных волн.

Условия (15) означают отсутствие волн приходящих из  $+\infty$  (то есть справа).

**Теорема 3.** Пусть  $k^2 = \bar{k}^2 + i\bar{k}^2$ ,  $\bar{k} \neq 0$ ,  $\gamma_n^{(l)} = \bar{\gamma}_n^{(l)} + i\bar{\bar{\gamma}}_n^{(l)}$ ,  $\bar{\gamma}_n^{(l)} > 0$  ( $n = 1, \dots; l = 1, 2$ ).

**Тогда классическое решение задачи (12)-(15) единственно.**

### Доказательство

Предположим существование двух решений:  $u_1(x, y) \neq u_2(x, y) \Rightarrow u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y) \Rightarrow (12) - (15)$ ,  $A_{n_0} = 0$ .

Умножим (12) на  $u^*$  и проинтегрируем по области  $D$  (интегрирование по частям):

$$\int_0^a \int_0^b (\Delta u u^* + k^2 u u^*) dx dy = \int_0^b u_x u^* \Big|_{x=a} dy - \int_0^b u_x u^* \Big|_{x=0} dy - \int_0^a \int_0^b (|u_x|^2 + |u_y|^2) dx dy + \int_0^a \int_0^b k^2 |u|^2 dx dy = 0, \quad (16)$$



$$u^*(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \psi_n(y), \quad C_n^* = \int_0^b u^*(a, y) \psi_n(y) dy \quad (n=1, 2, \dots) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \int_0^b u_x u^* \Big|_{x=a} dy &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \int_0^b u_x(a, y) \psi_n(y) dy = \\ &= i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(2)} C_n^* \int_0^b u(a, y) \psi_n(y) dy = i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(2)} C_n^* C_n = \\ &= i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(2)} |C_n|^2. \end{aligned} \quad (18)$$

**Аналогично получаем:**

$$\int_0^b u_x u^* \Big|_{x=0} dy = -i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(1)} |B_n|^2, \quad (19)$$

где

$$u^*(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \psi_n(y), \quad B_n^* = \int_0^b u^*(0, y) \psi_n(y) dy \quad (n=1, 2, \dots) \quad (2050)$$

$$(16), (18), (19) \Rightarrow i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(2)} |C_n|^2 + i \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{(1)} |B_n|^2 - \int_0^a \int_0^b |\operatorname{grad} u|^2 dx dy + \int_0^a \int_0^b k^2 |u|^2 dx dy = 0 \quad (2151)$$

**Возьмём в (21) мнимую часть:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}_n^{(2)} |C_n|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}_n^{(1)} |B_n|^2 + \int_0^a \int_0^b \bar{k}^2 |u|^2 dx dy = 0 \quad (2252)$$

$$(22) \Rightarrow u = 0, \quad (x, y) \in D; \quad C_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots) \Rightarrow u(a, y) = 0;$$

$$B_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots) \Rightarrow u(0, y) = 0 \Rightarrow u(x, y) = 0 \Rightarrow u_1(x, y) = u_2(x, y),$$

$$(x, y) \in \bar{D}.$$