Принцип максимума

Принцип максимума является одним из методов получения оценок для решения разностных схем и исследования устойчивости линейных разностных схем. Он применим для ограниченного класса задач, таких как разностные схемы для уравнений эллиптического и параболического типа, а также для уравнений переноса. Принцип максимума позволяет установить устойчивость схемы по начальным данным, по граничным условиям Дирихле, а также по правой части уравнения. Он дает лишь достаточные условия устойчивости, то есть их невыполнение еще не означает, что схема неустойчива. Все следующие из принципа максимума оценки получаются в норме C, которая сильнее нормы в L_2.

1 Каноническая форма разностных уравнений

Пусть в некоторой ограниченной области n-мерного евклидова пространства задана сетка $\bar{\omega}_h$, и пусть на внутренних узлах этой сетки рассматривается линейное разностное уравнение

$$\sum_{Q\,\in\,\text{Ш}(P)} A_h(P,Q)y(Q) = F(P), \quad P \in \omega_h \tag{1.1}$$

относительно неизвестной сеточной функции $y(P)$, где коэффициенты уравнения $A_h(P,Q)$ и правая часть $F(P)$ — заданные сеточные функции.

Для дальнейшего анализа уравнение (1.1) удобно переписать в так называемой *канонической форме*:

$$A(P)y(P) = \sum_{Q\,\in\,\text{Ш}'(P)} B(P,Q)y(Q) + F(P), \quad P \in \omega_h, \tag{1.2}$$

выделяя слагаемое в центральном узле P шаблона $\text{Ш}(P)$. Центральным считается тот узел шаблона, в котором коэффициент A_h максимален по модулю. В уравнении (1.2) $\text{Ш}'(P)$ — окрестность узла P, представляющая собой множество узлов шаблона $\text{Ш}(P)$, не содержащее узла P: $\text{Ш}(P) = \text{Ш}'(P) + P$.

Далее будем рассматривать случай, когда для коэффициентов уравнения (1.2) выполнены следующие условия:

$$A(P) > 0, \quad B(P,Q) \geqslant 0, \quad D(P) = A(P) - \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q) \geqslant 0 \tag{1.3}$$

для любого внутреннего узла $P \in \omega_h$ и любой точки Q окрестности $Ш'(P)$ узла P.

Пример 1.1. *Рассмотрите схему с весами для следующей начально-краевой задачи:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad x \in (0,1),\ t > 0, \\ \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=1} = \mu_2(t), \end{cases}$$

и запишите ее в канонической форме. Когда ее коэффициенты удовлетворяют условиям (1.3)?

Решение. Введем в расчетной области равномерную сетку:

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \{(x_i, t_j) : x_i = i \cdot h,\ i = 0, 1, ..., i_0,\ h = 1/i_0;\ t_j = j \cdot \tau,\ j = 0, 1, ...\}$$

и аппроксимируем уравнение следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda\left(\sigma y_i^{j+1} + (1-\sigma) y_i^j\right) + \varphi_i^j, \quad i = 1, 2, ..., i_0 - 1,\ j = 0, 1, ... \\ \\ y_i^0 = u_0(x_i),\ \ i = 0, 1, ..., i_0, \\ \\ y_0^j = \mu_1(t_j), \quad y_{i_0}^j = \mu_2(t_j),\ \ j = 0, 1, ..., \end{cases}$$

где

$$\Lambda y_i = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = y_{\bar{x}x} \qquad \varphi_i^j = \sigma f(x_i, t_{j+1}) + (1-\sigma) f(x_i, t_j).$$

Разностное уравнение можно переписать в виде:

$$\left(1 + \frac{2\sigma\tau}{h^2}\right) y_i^{j+1} = \frac{\sigma\tau}{h^2}\left(y_{i-1}^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}\right) + \frac{(1-\sigma)\tau}{h^2}\left(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j\right) + \left(1 - \frac{2(1-\sigma)\tau}{h^2}\right) y_i^j + \tau\varphi_i^j.$$

В качестве центрального узла шаблона выберем $P = P(x_i, t_{j+1})$. Тогда

$$Ш'(P) :\ Q_1(x_i, t_j),\ \ Q_2(x_{i-1}, t_{j+1}),\ \ Q_3(x_{i+1}, t_{j+1}),\ \ Q_4(x_{i-1}, t_j),\ \ Q_5(x_{i+1}, t_j),$$

и коэффициенты канонической формы разностного уравнения будут иметь вид:

$$A(P) = 1 + \frac{2\sigma\tau}{h^2}, \qquad B(P, Q_1) = 1 - \frac{2(1-\sigma)\tau}{h^2},$$

$$B(P, Q_2) = B(P, Q_3) = \frac{\sigma\tau}{h^2}, \qquad B(P, Q_4) = B(P, Q_5) = \frac{(1-\sigma)\tau}{h^2}.$$

Условия $A(P) > 0$, $B(P, Q_m) \geqslant 0$, $m = 1, ..., 5$ будут выполнены, если $\sigma \in [0, 1]$, и

$$\tau \leqslant \frac{h^2}{2(1-\sigma)}.$$

При этом также выполнено условие

$$D(P) = A(P) - \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P, Q) = 0,$$

то есть схема принадлежит рассматриваемому классу.

Пример 1.2. *Постройте разностную схему для задачи*

$$\begin{cases} \Delta u = -f(x), \quad x = \{x_1, x_2\}, \ \ 0 < x_\alpha < l_\alpha, \ \ \alpha = 1, 2, \\ u(x) = \mu(x), \quad x_\alpha = 0 \text{ или } x_\alpha = l_\alpha, \ \ \alpha = 1, 2, \end{cases} \tag{1.4}$$

для уравнения Пуассона в прямоугольнике и приведите ее к каноническому виду. Выполняются ли для нее условия (1.3)?

Решение. Введем в расчетной области равномерную сетку:

$$\overline{\omega}_h = \left\{ x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha; \ i_\alpha = 0, 1, ..., N_\alpha; \ h_\alpha N_\alpha = l_\alpha; \ \alpha = 1, 2 \right\}.$$

Заменяя в уравнении оператор Лапласа разностным оператором $\Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2}$, получим разностную схему:

$$\begin{cases} \Lambda y = -f(x), \ \ x \in \omega_h, \\ y(x) = \mu(x), \ \ x \in \gamma_h, \end{cases} \tag{1.5}$$

где точки

$$\left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)} \right) \in \omega_h, \ \ i_\alpha = 1, 2, ..., N_\alpha - 1, \ \ \alpha = 1, 2$$

представляют собой внутренние узлы сетки $\overline{\omega}_h$, а множество γ_h граничных узлов сетки имеет вид:

$$\gamma_h = \left(0, x_2^{(i_2)}\right) \cup \left(x_1^{(i_1)}, 0\right) \cup \left(l_1, x_2^{(i_2)}\right) \cup \left(x_1^{(i_1)}, l_2\right), \quad i_\alpha = 0, 1, ..., N_\alpha, \ \ \alpha = 1, 2.$$

Явный вид разностных уравнений на внутренних узлах сетки следующий:

$$2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right) y\left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}\right) - \frac{1}{h_1^2}\left[y\left(x_1^{(i_1-1)}, x_2^{(i_2)}\right) + y\left(x_1^{(i_1+1)}, x_2^{(i_2)}\right)\right] -$$
$$-\frac{1}{h_2^2}\left[y\left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2-1)}\right) + y\left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2+1)}\right)\right] = f\left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}\right).$$

В качестве центрального узла шаблона выбираем тот, которому соответствует максимальный коэффициент. В данном случае $P = P\left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}\right)$. При этом коэффициенты канонической формы разностного уравнения имеют вид:

$$A(P) = 2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right) > 0, \quad B(P,Q) = \frac{1}{h_\alpha^2} > 0, \ \alpha = 1, 2.$$

В данном случае

$$D(P) = A(P) - \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q) = 0,$$

то есть условия (1.3) выполнены, и схема принадлежит рассматриваемому классу.

Замечание 1.1 *Если в задаче (1.4) уравнение однородное, то есть $f(x) \equiv 0$, а шаги сетки $\overline{\omega}_h$ в схеме (1.5) по обоим направлениям выбраны одинаковыми, то есть $h_1 = h_2 = h$, то для решения разностного уравнения Лапласа имеет место разностный аналог формулы среднего значения для гармонических функций:*

$$y\left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}\right) = \frac{1}{4}\left\{y\left(x_1^{(i_1-1)}, x_2^{(i_2)}\right) + y\left(x_1^{(i_1+1)}, x_2^{(i_2)}\right) + y\left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2-1)}\right) + y\left(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2+1)}\right)\right\}.$$

2 Принцип максимума

Для того чтобы перейти к формулировке принципа максимума для уравнения (1.2), потребуем выполнения некоторых дополнительных условий на сетку $\overline{\omega}_h$. Далее будем считать, что она является *связной* относительно шаблона $Ш(P)$ разностного оператора в рассматриваемом уравнении.

Определение 2.1 *Разностная сетка $\overline{\omega}_h$ называется связной (относительно шаблона* Ш(P)*), если для любых двух точек $\bar{P}$, $\bar{\bar{P}} \in \omega_h$ существует такая последовательность окрестностей $\{\text{Ш}'(P_i)\}$, $i = 1, 2, ..., m$, что можно совершить переход от $\bar{P}$ к $\bar{\bar{P}}$, используя лишь узлы этих окрестностей, то есть найдутся такие узлы $P_1, P_2, ..., P_m$ сетки ω_h, что $P_1 \in \text{Ш}'(\bar{P})$, $P_2 \in \text{Ш}'(P_1)$, ... , $P_m \in \text{Ш}'(P_{m-1})$, $\bar{\bar{P}} \in \text{Ш}'(P_m)$.*

Заметим, что из этого определения следует, что точка $\bar{\bar{P}}$ может быть граничной. Связность сетки означает, что каждая точка границы принадлежит окрестности $Ш'(P)$ по крайней мере одного внутреннего узла P.

Для разностного оператора в канонической форме (1.2) уравнения (1.1) введем обозначение:

$$Ly(P) = A(P)y(P) - \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q)y(Q). \tag{2.1}$$

Тогда уравнение (1.2) можно записать в виде:

$$Ly(P) = F(P). \tag{2.2}$$

Заметим, что

$$Ly(P) = D(P)y(P) + \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q)(y(P) - y(Q)), \tag{2.3}$$

где $D(P) = A(P) - \sum\limits_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q)$.

Теорема 2.2 *Пусть разностный оператор L, имеющий вид (2.1) и заданный на связной сетке $\overline{\omega}_h$, таков, что для его коэффициентов выполнены условия:*

$$A(P) > 0, \quad B(P,Q) > 0, \quad D(P) \geqslant 0, \ \ \forall P \in \omega_h, \ \forall Q \in Ш'(P). \tag{2.4}$$

Тогда, если сеточная функция $y(P) \not\equiv const$ удовлетворяет неравенству $Ly(P) \leqslant 0$ (соответственно, $Ly(P) \geqslant 0$) для всех внутренних узлов сетки ω_h, то $y(P)$ не может принимать наибольшего положительного (соответственно, наименьшего отрицательного) значения во внутренних узлах $P \in \omega_h$.

Доказательство. Пусть $Ly(P) \leqslant 0$, $\forall P \in \omega_h$. Предположим, что $\exists \bar{P} \in \omega_h$:

$$y(\bar{P}) = \max_{\overline{\omega}_h} y(P) = M_0 > 0.$$

Так как $y(\bar{P}) \geqslant y(Q)$, $\forall Q \in Ш'(\bar{P})$, то

$$Ly(\bar{P}) = \underbrace{D(\bar{P})}_{\geqslant 0}\underbrace{y(\bar{P})}_{>0} + \sum_{Q \in Ш'(\bar{P})} \underbrace{B(\bar{P},Q)}_{>0}\underbrace{(y(\bar{P}) - y(Q))}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$$

Поскольку по предположению $Ly(P) \leqslant 0$ во всех внутренних узлах, то $Ly(\bar{P}) = 0$, откуда следует, что $D(\bar{P}) = 0$ и $y(\bar{P}) = y(Q)$ для всех $Q \in Ш'(\bar{P})$.

Выберем какой-нибудь узел $P_1 \in Ш'(\bar{P})$. Так как $y(P_1) = y(\bar{P}) = M_0$, то, повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что $y(P_1) = y(Q) = M_0$ для всех $Q \in Ш'(P_1)$. Возьмем узел $P_2 \in Ш'(P_1)$ и получим, что $y(P_2) = y(Q) = M_0$ для всех $Q \in Ш'(P_2)$ и т.д.

Выберем произвольную точку $\bar{\bar{P}} \in \overline{\omega}_h$. Так как по условию сетка $\overline{\omega}_h$ является связной, то за конечное число шагов можно осуществить переход от точки $\bar{P}$ к точке $\bar{\bar{P}}$: $P_1 \in Ш'(\bar{P})$, $P_2 \in Ш'(P_1)$, ... , $P_m \in Ш'(P_{m-1})$, $\bar{\bar{P}} \in Ш'(P_m)$. Следовательно, $y(\bar{\bar{P}}) = y(\bar{P}) = M_0$ для любого узла $\bar{\bar{P}} \in \overline{\omega}_h$. Это означает, что $y(P) = M_0 = const$ на всей сетке $\overline{\omega}_h$, что противоречит условию теоремы $y(P) \not\equiv const$. Следовательно, узел $\bar{P}$, в котором $y(P)$ достигает максимального положительного значения, может быть только граничным.

Второе утверждение теоремы (для случая $Ly(P) \geqslant 0$) получается из первого, если заменить $y(P)$ на $-y(P)$.

Следствие 2.3 *Пусть для разностного оператора L вида (2.1), заданного на связной сетке $\overline{\omega}_h$, выполнены условия (2.4), а для сеточной функции $y(P)$ справедливы неравенства $y(P) \geqslant 0$ в граничных узлах $P \in \gamma_h$ сетки и $Ly(P) \geqslant 0$ во внутренних узлах $P \in \omega_h$. Тогда $y(P) \geqslant 0$ всех узлов сетки $P \in \overline{\omega}_h$. Если же $y(P) \leqslant 0$ в граничных узлах $P \in \gamma_h$ и $Ly(P) \leqslant 0$ во внутренних узлах $P \in \omega_h$, то $y(P) \leqslant 0$ при $P \in \overline{\omega}_h$.*

Доказательство. Пусть $Ly(P) \geqslant 0$ во внутренних узлах $P \in \omega_h$ и $y(P) \geqslant 0$ в граничных узлах $P \in \gamma_h$. Если существует внутренний узел $P_0 \in \omega_h$, такой что $y(P_0) < 0$, то $y(P)$ должна принимать наименьшее отрицательное значение на ω_h, что невозможно в силу принципа максимума. Аналогично получаем утверждение в случае $Ly(P) \leqslant 0$ на ω_h и $y(P) \leqslant 0$ на γ_h.

Следствие 2.4 *Пусть для разностного оператора L вида (2.1), заданного на связной сетке $\overline{\omega}_h$, выполнены условия (2.4). Тогда однородная задача*

$$\begin{cases} Ly(P) = 0, \;\; P \in \omega_h, \\ y(P) = 0, \;\; P \in \gamma_h \end{cases} \tag{2.5}$$

имеет только тривиальное решение $y(P) \equiv 0$.

Доказательство. В силу следствия 2.3 для решения задачи (2.5) во внутренних узлах P сетки ω_h одновременно справедливы неравенства $y(P) \leqslant 0$ и $y(P) \geqslant 0$, что возможно лишь при $y(P) \equiv 0$, $\forall P \in \overline{\omega}_h$.

Следствие 2.5 *Пусть для разностного оператора L вида (2.1), заданного на связной сетке $\overline{\omega}_h$, выполнены условия (2.4). Тогда задача*

$$\begin{cases} Ly(P) = F(P), \;\; P \in \omega_h, \\ y(P) = \mu(P), \;\; P \in \gamma_h \end{cases} \tag{2.6}$$

имеет и притом единственное решение.

Доказательство.

1) *Единственность.* Предположим, что существуют два различных решения $y_1(P) \neq y_2(P)$ задачи (2.6). Тогда сеточная функция $v(P) = y_1(P) - y_2(P)$ будет решением однородной задачи

$$\begin{cases} Lv(P) = 0, \;\; P \in \omega_h, \\ v(P) = 0, \;\; P \in \gamma_h. \end{cases}$$

В силу следствия 2.4 получаем, что $v(P) \equiv 0$, $\forall P \in \overline{\omega}_h$. Это противоречит предположению $y_1(P) \neq y_2(P)$. Следовательно, задача (2.6) может иметь только одно решение.

2) *Существование.* Так как задача (2.6) — это СЛАУ, то из того, что соответствующая

однородная задача (2.5) имеет только тривиальное решение, следует, что определитель матрицы этой СЛАУ отличен от нуля. Это в свою очередь означает, что решение задачи (2.6) существует.

3 Теорема сравнения. Мажоранта

На основании принципа максимума можно доказать ряд теорем, позволяющих получать оценки нормы решения разностной схемы через нормы правых частей уравнения, начальных условий и граничных условий Дирихле, то есть доказывать устойчивость схемы по соответствующим входным данным. При этом все оценки получаются в норме C.

Теорема 3.1 *Пусть $y(P)$ — решение задачи*

$$\begin{cases} Ly(P) = F(P), \quad P \in \omega_h, \\ y(P) = \mu(P), \quad P \in \gamma_h \end{cases} \tag{3.1}$$

на связной сетке $\overline{\omega}_h$ с множеством граничных узлов γ_h, где L — разностный оператор вида (2.1), для которого выполнены условия (2.4), а $Y(P)$ — решение задачи

$$\begin{cases} LY(P) = \overline{F}(P), \quad P \in \omega_h, \\ Y(P) = \overline{\mu}(P), \quad P \in \gamma_h, \end{cases} \tag{3.2}$$

где $\overline{F}(P) \geqslant 0$, $\forall P \in \omega_h$ и $\overline{\mu}(P) \geqslant 0$, $\forall P \in \gamma_h$. Тогда из условий

$$|F(P)| \leqslant \overline{F}(P), \ \forall P \in \omega_h, \qquad |\mu(P)| \leqslant \overline{\mu}(P), \ \forall P \in \gamma_h$$

следует неравенство

$$|y(P)| \leqslant Y(P), \ \forall P \in \overline{\omega}_h.$$

Доказательство. Из условий $\overline{F}(P) \geqslant 0$ для всех внутренних узлов $P \in \omega_h$ и $\overline{\mu}(P) \geqslant 0$ для всех граничных узлов $P \in \gamma_h$, с учетом того что для оператора L выполнены все требования принципа максимума, следует, что $Y(P) \geqslant 0$ в любом узле сетки $P \in \overline{\omega}_h$. Положим $u(P) = y(P) + Y(P)$ и $v(P) = Y(P) - y(P)$. Тогда:

$$\begin{cases} Lu(P) = F(P) + \overline{F}(P) \geqslant 0, \quad P \in \omega_h, \\ u(P) = \mu(P) + \overline{\mu}(P) \geqslant 0, \quad P \in \gamma_h, \end{cases} \qquad \begin{cases} Lv(P) = \overline{F}(P) - F(P) \geqslant 0, \quad P \in \omega_h, \\ v(P) = \overline{\mu}(P) - \mu(P) \geqslant 0, \quad P \in \gamma_h. \end{cases}$$

В силу следствия 2.3 принципа максимума получаем, что $u(P) \geqslant 0$ и $v(P) \geqslant 0$ для всех $P \in \overline{\omega}_h$. Таким образом, справедливы неравенства:

$$-Y(P) \leqslant y(P) \leqslant Y(P) \ \Rightarrow \ |y(P)| \leqslant Y(P), \ \forall P \in \overline{\omega}_h.$$

Определение 3.2 *Функция $Y(P)$, являющаяся решением задачи (3.2), называется мажорантой для решения задачи (3.1).*

Проведем редукцию задачи (3.1). Представим ее решение в виде двух слагаемых: $y(P) = y_1(P) + y_2(P)$, где $y_1(P)$ — решение задачи

$$\begin{cases} Ly_1(P) = 0, \quad P \in \omega_h, \\ y_1(P) = \mu(P), \quad P \in \gamma_h \end{cases} \tag{3.3}$$

с однородным уравнением и неоднородными граничными условиями, а $y_2(P)$ — решение задачи

$$\begin{cases} Ly_2(P) = F(P), \quad P \in \omega_h, \\ y_2(P) = 0, \quad P \in \gamma_h \end{cases} \tag{3.4}$$

с неоднородным уравнением и однородными граничными условиями.

Лемма 3.3 *Для решения задачи (3.3) справедлива оценка:*

$$\|y_1\|_{\bar{C}} \leqslant \|\mu\|_{C_\gamma}, \tag{3.5}$$

где $\|y_1\|_{\bar{C}} = \max\limits_{P \in \overline{\omega}_h} |y_1(P)|$ *и* $\|\mu\|_{C_\gamma} = \max\limits_{P \in \gamma_h} |\mu(P)|$.

Доказательство. Определим мажоранту $Y_1(P)$ для решения задачи (3.3) как решение задачи:

$$\begin{cases} LY_1(P) = 0, \quad P \in \omega_h, \\ Y_1(P) = \|\mu\|_{C_\gamma}, \quad P \in \gamma_h. \end{cases}$$

Рассмотрим два возможных случая: или $Y_1(P) = \|\mu\|_{C_\gamma}$ всюду на сетке $\overline{\omega}_h$, или $Y_1(P) \not\equiv const$.

Если $Y_1(P) = \|\mu\|_{C_\gamma}$, $\forall P \in \overline{\omega}_h$, то в силу теоремы 3.1 справедливо неравенство:

$$|y_1(P)| \leqslant Y_1(P) = \|\mu\|_{C_\gamma}, \quad \forall P \in \overline{\omega}_h,$$

из которого в силу определения нормы $\|y_1\|_{\bar{C}}$ получаем:

$$\|y_1\|_{\bar{C}} \leqslant \|\mu\|_{C_\gamma}.$$

Если $Y_1(P) \not\equiv const$, то в силу следствия 2.3 принципа максимума $Y_1(P) \geqslant 0$, $\forall P \in \overline{\omega}_h$. Следовательно, существует узел $\bar{P} \in \overline{\omega}_h$, такой что $Y_1(\bar{P}) = \max\limits_{P \in \overline{\omega}_h} Y(P)$, причем в силу принципа максимума $\bar{P} \in \gamma_h$. Но тогда

$$\|Y_1\|_{\bar{C}} = \max_{P \in \overline{\omega}_h} Y_1(P) = Y_1(\bar{P}) = \max_{P \in \gamma_h} Y_1(P) = \|\mu\|_{C_\gamma}.$$

Далее в силу теоремы 3.1 получаем, что

$$|y_1(P)| \leqslant Y_1(P),\ \forall P \in \overline{\omega}_h \ \Rightarrow\ \max_{P\in\overline{\omega}_h} |y_1(P)| \leqslant Y_1(\bar{P}) = \|\mu\|_{C_\gamma} \ \Rightarrow\ \|y_1\|_{\bar{C}} \leqslant \|\mu\|_{C_\gamma}.$$

Теорема 3.4 *Если $D(P) > 0$ для всех внутренних узлов ω_h, то для решения $y_2(P)$ задачи (3.4) верна оценка*

$$\|y_2\|_{\bar{C}} \leqslant \left\|\frac{F}{D}\right\|_C, \tag{3.6}$$

где $\|F/D\|_C = \max\limits_{P\in\omega_h} |F(P)/D(P)|$.

Доказательство. Определим мажоранту $Y_2(P)$ решения задачи (3.4) как решение задачи:

$$\begin{cases} LY_2(P) = |F(P)|, & P \in \omega_h, \\ Y_2(P) = 0, & P \in \gamma_h. \end{cases}$$

Поскольку $LY_2(P) = |F(P)| \geqslant 0$ для всех внутренних узлов сетки и $Y_2(P) = 0$ во всех граничных узлах сетки, то из следствия 2.3 принципа максимума получаем, что $Y_2(P) \geqslant 0$, $\forall P \in \overline{\omega}_h$. Следовательно, существует такой внутренний узел $\bar{P} \in \omega_h$, что $Y_2(\bar{P}) = \max\limits_{P\in\overline{\omega}_h} Y_2(P)$. Поскольку $Y_2(P)$ неотрицательна всюду на $\overline{\omega}_h$, то $Y_2(\bar{P}) = \|Y_2\|_{\bar{C}}$.

Воспользуемся явным видом оператора L и рассмотрим уравнение $LY_2(P) = |F(P)|$ в узле $\bar{P}$. Из уравнения

$$\underbrace{D(\bar{P})}_{>0}\underbrace{Y_2(\bar{P})}_{\geqslant 0} + \sum_{Q\,\in\,Ш'(\bar{P})} \underbrace{B(\bar{P},Q)}_{>0}\underbrace{(Y_2(\bar{P}) - Y_2(Q))}_{\geqslant 0} = |F(\bar{P})|$$

следует, что

$$D(\bar{P})Y_2(\bar{P}) \leqslant |F(\bar{P})| \ \Rightarrow\ Y_2(\bar{P}) \leqslant \frac{|F(\bar{P})|}{D(\bar{P})} \leqslant \left\|\frac{F}{D}\right\|_C.$$

Так как $Y_2(P)$ — мажоранта для $y_2(P)$, то имеет место неравенство:

$$\|y_2\|_{\bar{C}} \leqslant \|Y_2\|_{\bar{C}} \leqslant \left\|\frac{F}{D}\right\|_C.$$

Пример 3.1. *Составьте явную разностную схему для следующей краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in (0,l),\ t \in (0,T], \\ u(0,t) = \mu_1(t), & u(l,t) = \mu_2(t), \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases}$$

Исследуйте ее на устойчивость с помощью леммы 3.3.

Решение. Введем в расчетной области равномерную сетку $\overline{\omega_{h\tau}} = \overline{\omega_h} \times \overline{\omega_\tau}$, где

$$\overline{\omega_h} = \{x_i = ih,\, i = 0, 1, ..., i_0,\, i_0 h = l\}, \;\; \overline{\omega_\tau} = \{t_j = j\tau,\, j = 0, 1, ..., j_0,\, j_0\tau = T\}.$$

Явная схема на этой сетке имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = a^2 \dfrac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2}, \;\; i = 1, 2, ..., i_0 - 1, \;\; j = 0, 1, ..., j_0 - 1, \\ y_i^0 = \varphi(x_i), \;\; i = 0, 1, ..., i_0, \\ y_0^j = \mu_1(t_j), \quad y_{i_0}^j = \mu_1(t_j), \;\; j = 0, 1, ..., j_0. \end{cases}$$

Очевидно, что для шаблона явной схемы уравнения теплопроводности заданная сетка является связной. Выберем в качестве центрального узла шаблона узел $P = (x_i, t_{j+1})$ и перепишем уравнение в каноническом виде:

$$y_i^{j+1} = \frac{a^2\tau}{h^2} y_{i+1}^j + \left(1 - \frac{2a^2\tau}{h^2}\right) y_i^j + \frac{a^2\tau}{h^2} y_{i-1}^j,$$

или, что то же самое,

$$Ay_i^{j+1} = B_1 y_{i+1}^j + B_2 y_i^j + B_3 y_{i-1}^j,$$

где $A = 1$, $B_1 = B_3 = \dfrac{a^2\tau}{h^2}$, $B_2 = 1 - \dfrac{2a^2\tau}{h^2}$. Заметим, что в данном случае

$$D = A - B_1 - B_2 - B_3 = 0.$$

Оператор L вида

$$Ly(P) = Ay(P) - \sum_{m=1}^{3} B_m y(Q_m),$$

где $Q_1 = (x_{i+1}, t_j)$, $Q_2 = (x_i, t_j)$, $Q_3 = (x_{i-1}, t_j)$, принадлежит классу, для которого применим принцип максимума, если выполнено условие $B_2 \geqslant 0$, которое можно переписать в виде

$$\tau \leqslant \frac{h^2}{2a^2}.$$

Узлы $(x_i, 0)$ при $i = 0, 1, ..., i_0$, а также $(0, t_j)$ и (l, t_j) при $j = 0, 1, ..., j_0$ составляют множество $\gamma_{h\tau}$ граничных узлов сетки. Значения искомой функции в этих узлах задано — это начальные условия и граничные условия Дирихле. Следовательно, полученная разностная схема может быть записана в виде

$$\begin{cases} Ly(P) = 0, \;\; P \in \omega_{h\tau}, \\ y(P) = \psi(P), \;\; P \in \gamma_{h\tau}, \end{cases} \tag{3.7}$$

где $\psi(P) = \varphi(x_i)$ или $\psi(P) = \mu_\alpha(t_j)$, $\alpha = 1, 2$, в зависимости от того, в каком граничном узле $P \in \gamma_{h\tau}$ рассматривается эта функция. Для системы (3.7) выполнены все условия леммы 3.3, поэтому справедлива оценка

$$\|y\|_{\bar{C}} \leqslant \max\{\|\mu_1\|_{C_\gamma},\ \|\mu_2\|_{C_\gamma},\ \|\varphi\|_{C_\gamma}\}, \tag{3.8}$$

где $\|\mu_\alpha\|_{C_\gamma} = \max\limits_{j=0,1,\ldots,j_0} |\mu_\alpha(t_j)|$, $\|\varphi\|_{C_\gamma} = \max\limits_{i=0,1,\ldots,i_0} |\varphi(x_i)|$. Неравенство (3.8) означает устойчивость схемы по начальным и граничным условиям при выполнении условия $\tau \leqslant \dfrac{h^2}{2a^2}$.

Заметим, что доказать устойчивость рассматриваемой схемы по правой части с помощью теоремы 3.4 не удастся, так как в данном случае $D = 0$.

4 Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.1. *Покажите, что неявная схема для задачи*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, l),\ t \in (0, T], \\ u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases}$$

на равномерной сетке устойчива по начальным и граничным условиям при любых соотношениях шагов τ и h.

Задача 4.2. *Покажите, что разностная схема*

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1}^{j+1} - y_{i+1}^{j}}{\tau} + c \cdot \dfrac{y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}}{h} = 0, \quad i = 0, 1, ...,\ j = 0, 1, ... \\ y_0^j = \mu(t_j),\ j = 0, 1, ... \\ y_i^0 = \varphi(x_i),\ i = 0, 1, ... \end{cases}$$

для начально-краевой задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in (0, +\infty),\ t \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu(t), \end{cases}$$

где $c > 0$ — константа, устойчива по начальным и граничным условиям при любых соотношениях шагов τ и h.

Задача 4.3. *Покажите, что разностная схема*

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1}^{j+1} - y_{i+1}^{j}}{\tau} + c \cdot \dfrac{y_{i+1}^{j} - y_{i}^{j}}{h} = 0, \;\; i = 0, 1, ..., \;\; j = 0, 1, ... \\ y_0^j = \mu(t_j), \;\; j = 0, 1, ... \\ y_i^0 = \varphi(x_i), \;\; i = 0, 1, ... \end{cases}$$

для начально-краевой задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in (0, +\infty), \;\; t \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu(t), \end{cases}$$

где $c > 0$ — константа, устойчива по начальным и граничным условиям, если выполнено условие Куранта $c\tau < h$.

Задача 4.4. *Получите достаточное условие устойчивости по начальным и граничным условиям схемы*

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i}^{j+1} - y_{i}^{j}}{\tau} + c \cdot \dfrac{y_{i+1}^{j+1} - y_{i}^{j+1}}{h} = 0, \;\; i = 0, 1, ..., \;\; j = 0, 1, ... \\ y_0^j = \mu(t_j), \;\; j = 0, 1, ... \\ y_i^0 = \varphi(x_i), \;\; i = 0, 1, ... \end{cases}$$

для начально-краевой задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in (0, +\infty), \;\; t \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu(t), \end{cases}$$

где $c > 0$.

5 Контрольные вопросы

1. Дайте определение канонической формы разностного уравнения.

2. Дайте определение связной сетки.

3. Сформулируйте и докажите принцип максимума для разностного оператора L на связной сетке.

4. Сформулируйте следствия принципа максимума.

5. Дайте определение мажоранты решения разностной задачи

$$\begin{cases} Ly(P) = F(P), \quad P \in \omega_h, \\ y(P) = \mu(P), \qquad P \in \gamma_h. \end{cases} \tag{5.1}$$

6. Проведите редукцию задачи (5.1) к двум вспомогательным задачам и получите оценки для их решений с помощью мажорант.