

Спектральный анализ разностных схем

1 Исследование схем на устойчивость по начальным данным методом гармоник

Одним из достаточно простых и эффективных способов исследования линейных разностных схем на устойчивость по начальным данным является метод гармоник. Его можно использовать как для двухслойных схем вида

$$B \frac{\hat{y} - y}{\tau} + Ay = \varphi, \quad (1.1)$$

так и для трехслойных схем вида

$$B \frac{\hat{y} - \check{y}}{2\tau} + R(\hat{y} - 2y + \check{y}) + Ay = \varphi, \quad (1.2)$$

где A , B и R — линейные разностные операторы с постоянными коэффициентами, действующие на сеточную функцию y как на функцию пространственной переменной x .

Далее будем рассматривать частный случай — разностные схемы для задач Коши на прямой $x \in (-\infty, +\infty)$. Пусть схемы (1.1) и (1.2) заданы на равномерной сетке:

$$x_n = n \cdot h, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad t_j = j \cdot \tau, \quad j = 0, 1, \dots$$

Исследуя устойчивость по начальным данным, фиксируем правую часть φ в уравнениях (1.1) и (1.2). Пусть $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ — решения соответствующих разностных уравнений при двух разных начальных условиях. Тогда их разность $\delta y = y^{(1)} - y^{(2)}$ будет удовлетворять однородному уравнению

$$B \frac{\delta \hat{y} - \delta y}{\tau} + A \delta y = 0 \quad (1.3)$$

в случае двухслойной схемы, и уравнению

$$B \frac{\delta \hat{y} - \delta \check{y}}{2\tau} + R(\delta \hat{y} - 2\delta y + \delta \check{y}) + A \delta y = 0 \quad (1.4)$$

в случае трехслойной схемы.

Разложим $\delta y(x_n, t_j) = \delta y_n^j$ в ряд по пространственным гармоникам e^{iqx_n} :

$$\delta y_n^j = \sum_q \delta y_{n,q}^j = \sum_q C_q(t_j) e^{iqx_n}.$$

Так как уравнения (1.3) и (1.4) линейны, их можно рассматривать для каждой гармоники $\delta y_{n,q}^j = C_q(t_j) e^{iqx_n}$ в отдельности.

Рассмотрим подробно случай двухслойной схемы (1.3). При каждом фиксированном q получаем:

$$(C_q(t_{j+1}) - C_q(t_j)) B e^{iqx_n} + \tau C_q(t_j) A e^{iqx_n} = 0. \quad (1.5)$$

Так как выражения $B e^{iqx_n}$ и $A e^{iqx_n}$ представляют собой конечные линейные комбинации выражений $e^{iqx_n} = e^{i\alpha_q n}$, $e^{iqx_{n-1}} = e^{i\alpha_q(n-1)}$, $e^{iqx_{n+1}} = e^{i\alpha_q(n+1)}$ и т.д., где $\alpha_q = qh$, то, сокращая на $e^{i\alpha_q n}$, из равенства (1.5) получаем, что

$$C_q(t_{j+1}) = \lambda_q \cdot C_q(t_j),$$

где λ_q — число, которое не зависит ни от n , ни от j . Число λ_q называют множителем роста для q -й гармоники. Его можно найти из уравнения:

$$(\lambda_q - 1) B e^{iqx_n} + \tau A e^{iqx_n} = 0.$$

Таким образом, для двухслойной схемы получаем:

$$\delta y_n^{j+1} = \sum_q \lambda_q C_q(t_j) e^{iqx_n}, \quad \delta y_n^{j+2} = \sum_q \lambda_q^2 C_q(t_j) e^{iqx_n},$$

и так далее.

Аналогичный результат имеет место и в случае трехслойной схемы. Рассматривая уравнение (1.4) для каждой гармоники в отдельности и учитывая, что $\delta y_{n,q}^{j-1}$, $\delta y_{n,q}^j$ и $\delta y_{n,q}^{j+1}$ связаны соотношениями

$$\delta y_{n,q}^{j-1} = C_q(t_{j-1}) e^{iqx_n}, \quad \delta y_{n,q}^j = \lambda_q \delta y_{n,q}^{j-1} = \lambda_q C_q(t_{j-1}) e^{iqx_n}, \quad \delta y_{n,q}^{j+1} = \lambda_q^2 \delta y_{n,q}^{j-1} = \lambda_q^2 C_q(t_{j-1}) e^{iqx_n},$$

для множителей роста приходим к следующему квадратному уравнению:

$$(\lambda_q^2 - 1) B e^{iqx_n} + 2\tau(\lambda_q^2 - 2\lambda_q + 1) R e^{iqx_n} + 2\tau \lambda A e^{iqx_n} = 0.$$

Теорема 1.1 *Для равномерной устойчивости схем (1.1) и (1.2) по начальным данным необходимо и достаточно, чтобы для любых q выполнялось условие:*

$$|\lambda_q| \leq 1 + c\tau, \quad c \geq 0, \quad (1.6)$$

где константа c не зависит ни от q , ни от шагов сетки τ и h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Необходимость. Пусть хотя бы для одной гармоники с номером q_0 условие (1.6) не выполняется. Это означает, что для любого сколь угодно большого c имеет место неравенство:

$$|\lambda_{q_0}| \geq 1 + c\tau.$$

Если на произвольном слое t_j в этой гармонике имеется возмущение $\delta y_{n,q_0}^j$, то к моменту времени $T = t_j + J \cdot \tau$ его амплитуда будет порядка

$$|\lambda_{q_0}|^J = |\lambda_{q_0}|^{(T-t_j)/\tau} \geq (1 + c\tau)^{(T-t_j)/\tau} \approx (e^{c\tau})^{(T-t_j)/\tau} = e^{c(T-t_j)},$$

где c может быть сколь угодно велико. Это и означает неустойчивость по начальным данным.

Достаточность. Разложим возмущение на некотором слое t_j в ряд по гармоникам:

$$\delta y(t_j) = \sum_q C_q(t_j) e^{iqx_n}.$$

При $t = t_{j+J}$ возмущение будет иметь вид:

$$\delta y(t_{j+J}) = \sum_q C_q(t_{j+J}) e^{iqx_n} = \sum_q \lambda_q^J C_q(t_j) e^{iqx_n}.$$

Гармоники e^{iqx_n} с различными q ортогональны между собой на отрезке длиной 2π . Оценим погрешность решения на слое $j + J$ по норме L_2 на отрезке длиной 2π :

$$\|\delta y(t_{j+J})\|_{L_2}^2 = \sum_q |\lambda_q|^{2J} |C_q(t_j)|^2 \|e^{iqx_n}\|_{L_2}^2 \leq (1+c\tau)^{2J} \underbrace{\sum_q |C_q(t_j)|^2}_{\|\delta y(t_j)\|_{L_2}^2} \|e^{iqx_n}\|_{L_2}^2 \leq e^{2c(t-t_j)} \|\delta y(t_j)\|_{L_2}^2.$$

Последнее неравенство означает равномерную устойчивость по начальным данным. ■

2 Примеры использования метода гармоник

Рассмотрим ряд разностных схем, аппроксимирующих задачу Коши для уравнения переноса на прямой:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in (-\infty, +\infty), t \in (0, T], \\ u(x, 0) = \mu(x), & x \in (-\infty, +\infty), \end{cases} \quad (2.1)$$

где скорость переноса c постоянная.

Пример 2.1. С помощью метода гармоник исследуйте на устойчивость по начальным данным схему

$$\begin{cases} \frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} + \frac{y_n^j - y_{n-1}^j}{h} = 0, & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, J-1; \\ y_n^0 = \mu(x_n) \equiv \mu_n, & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases} \quad (2.2)$$

аппроксимирующую задачу (2.1) с погрешностью $O(\tau + h)$ на равномерной сетке

$$x_n = nh, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad J\tau = T$$

в случае $c > 0$.

РЕШЕНИЕ. Шаблон разностного оператора, использованного при построении разностного уравнения в схеме (2.2), представлен на рис.1.

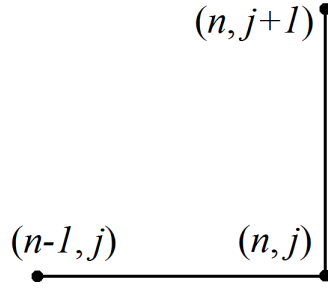


Рис. 1: Шаблон оператора в схеме (2.2)

Погрешность δy_n^j решения разностной схемы (2.2), обусловленная погрешностью начальных данных, будет удовлетворять уравнению

$$\delta y_n^{j+1} = \delta y_n^j - \frac{c\tau}{h} (\delta y_n^j - \delta y_{n-1}^j).$$

Разложим сеточную функцию δy_n^j в ряд по e^{iqx_n} :

$$\delta y_n^j = \sum_q \delta y_{n,q}^j = \sum_q C_q^j e^{iqx_n}.$$

Так как схема (2.2) является линейной двухслойной схемой с постоянными коэффициентами, то на слое $j + 1$ погрешность будет иметь вид:

$$\delta y_n^{j+1} = \sum_q \delta y_{n,q}^{j+1} = \sum_q \lambda_q C_q^j e^{iqx_n},$$

где $\delta y_{n,q}^{j+1} = \lambda_q \delta y_{n,q}^j$, λ_q — множители роста.

Введем обозначения $r = \frac{c\tau}{h}$ и $\alpha_q = qh$. Тогда, рассматривая уравнения для каждой гармоники $\delta y_{n,q}^j$ в отдельности, получаем:

$$\delta y_{n,q}^{j+1} = \delta y_{n,q}^j - r (\delta y_{n,q}^j - \delta y_{n-1,q}^j),$$

или, что то же самое,

$$\lambda_q C_q^j e^{i\alpha_q n} = C_q^j e^{i\alpha_q n} - r (C_q^j e^{i\alpha_q n} - C_q^j e^{i\alpha_q(n-1)}).$$

Сокращая на $C_q^j e^{i\alpha_q n}$, получаем:

$$\lambda_q(\alpha_q) = 1 - r(1 - e^{-i\alpha_q}) = 1 - r + r e^{-i\alpha_q}.$$

Спектр $\lambda_q(\alpha_q)$ рассматриваемой задачи представляет собой окружность на комплексной плоскости с центром в точке $1 - r$ и радиусом r . Так как $\lambda_q(\alpha_q)$ не зависит от τ явным образом, то спектральное условие устойчивости (1.6) принимает вид

$$|\lambda_q| \leq 1.$$

Следовательно, спектр оператора перехода со слоя на слой должен полностью содержаться в круге единичного радиуса с центром в нуле на комплексной плоскости. Из рис.2 очевидно, что это условие выполнено при $r \leq 1$. Итак, при $c > 0$ схема (2.2) условно устойчива. Условие ее устойчивости $c\tau \leq h$ называется условием Куранта.

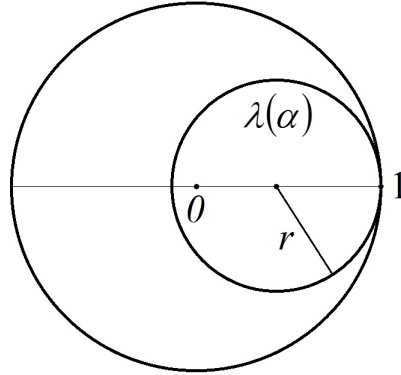


Рис. 2: Спектр оператора перехода со слоя на слой в схеме (2.2) при $c > 0$, $0 < r \leq 1$

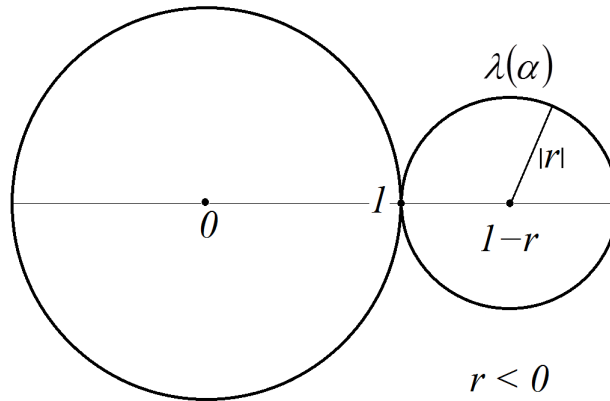


Рис. 3: Спектр оператора перехода в схеме (2.2) при $c < 0$

Заметим, что если бы в рассматриваемой схеме скорость переноса c была отрицательной, то параметр r тоже был бы отрицателен, и спектр оператора перехода со слоя на слой

лежал бы вне единичной окружности при любом соотношении шагов τ и h (см. рис. 3), то есть схема (2.2) была бы неустойчивой.

Пример 2.2. С помощью метода гармоник исследуйте на устойчивость по начальным данным схему

$$\begin{cases} \frac{y_{n+1}^{j+1} - y_{n+1}^j}{\tau} + c \frac{y_{n+1}^{j+1} - y_n^{j+1}}{h} = 0, & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, J-1, \\ y_n^0 = \mu(x_n), & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases} \quad (2.3)$$

аппроксимирующую задачу (2.1) с погрешностью $O(\tau + h)$ на равномерной сетке

$$x_n = nh, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad J\tau = T.$$

РЕШЕНИЕ. Шаблон рассматриваемой схемы представлен на рис.4:

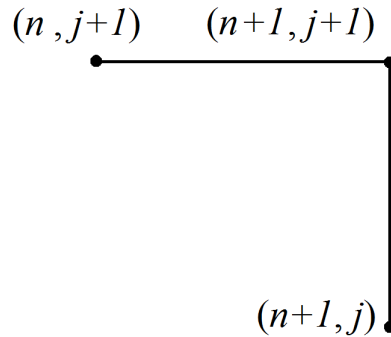


Рис. 4: Шаблон схемы (2.3)

Пользуясь теми же рассуждениями, что и в предыдущей задаче, приходим к характеристическому уравнению:

$$\frac{\lambda_q - 1}{\tau} + c\lambda_q \frac{1 - e^{-i\alpha_q}}{h} = 0,$$

откуда получаем

$$\lambda_q = \frac{1}{1 + r - re^{-i\alpha_q}} = \frac{1}{\beta_q}, \quad \beta_q = 1 + r - re^{-i\alpha_q}, \quad r = \frac{c\tau}{h}.$$

Очевидно, что условие $|\lambda_q| \leq 1$ выполняется, если $|\beta_q| \geq 1$. При изменении параметра α_q от минус до плюс бесконечности значения функции $\beta_q(\alpha_q)$ пробегают окружность радиуса $|r|$ с центром в точке $1 + r$ на комплексной плоскости.

При $c > 0$ параметр r также положителен. Следовательно, окружность, заполняемая значениями β_q , расположена вне единичного круга с центром в начале координат и касается единичной окружности в точке 1 (рис. 5). Это означает, что $|\beta_q| \geq 1$ при любом соотношении τ и h , то есть при положительном c схема (2.3) безусловно устойчива по начальным данным.

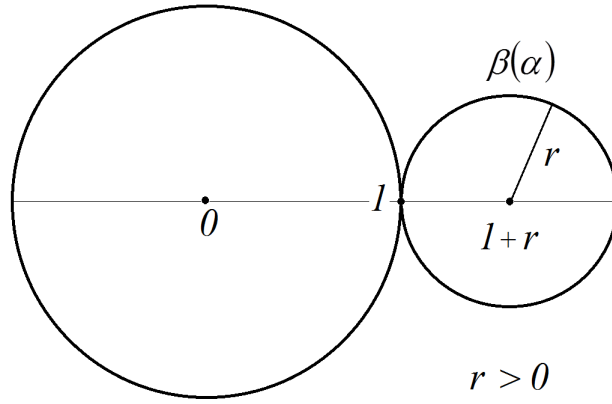


Рис. 5: Значения функции $\beta_q(\alpha_q)$ в случае $c > 0$

Если скорость переноса c отрицательна, то и параметр r отрицателен, и условие $|\beta_q| \geq 1$ устойчивости схемы (2.3) будет выполнено при $|r| \geq 1$ (см. рис. 6). Следовательно, при $c < 0$ схема (2.3) является условно устойчивой по начальным данным, и условие ее устойчивости имеет вид $|c|\tau \geq h$.

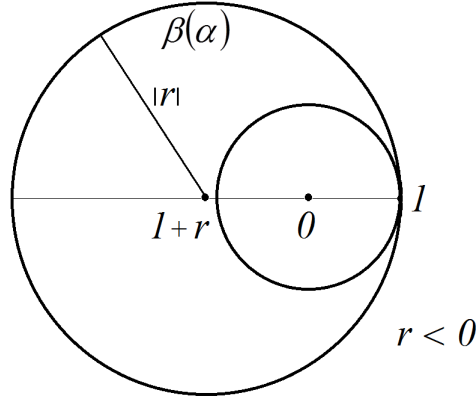


Рис. 6: Значения функции $\beta_q(\alpha_q)$ в случае $c < 0$

Следовательно, при $c < 0$ схема (2.3) является условно устойчивой по начальным данным, и условие ее устойчивости имеет вид $|c|\tau \geq h$.

Исследуем на устойчивость несколько схем для задач Коши для уравнений теплопроводности.

Пример 2.3. *Исследуйте на устойчивость с помощью метода гармоник явную схему для задачи:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}^1, t \in (0, T], \\ u(x, 0) = \mu(x), & x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Введем равномерную сетку

$$x_n = n \cdot h, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad t_j = j \cdot \tau, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad J \cdot \tau = T.$$

На этой сетке явная схема для рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} - a^2 \frac{y_{n+1}^j - 2y_n^j + y_{n-1}^j}{h^2} = 0, & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, J-1; \\ y_n^0 = \mu(x_n) \equiv \mu_n, & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

При этом погрешность δy , обусловленная погрешностью начальных данных, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\delta y_n^{j+1} - \delta y_n^j}{\tau} - a^2 \frac{\delta y_{n+1}^j - 2\delta y_n^j + \delta y_{n-1}^j}{h^2} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, J-1. \quad (2.4)$$

В соответствии с методом гармоник получаем:

$$\begin{aligned} \delta y_n^j &= \sum_q \delta y_{n,q}^j = \sum_q C_q(t_j) e^{iqx_n} = \sum_q C_q(t_j) e^{i\alpha_q n}, \\ \delta y_n^{j+1} &= \sum_q \lambda_q \delta y_{n,q}^j = \sum_q \lambda_q C_q(t_j) e^{iqx_n} = \sum_q \lambda_q C_q(t_j) e^{i\alpha_q n}, \end{aligned}$$

где $\alpha_q = qh$. Гармоники $\delta y_{n,q}^j$ и $\delta y_{n,q}^{j+1}$ на слоях j и $j+1$ связаны соотношениями:

$$\delta y_{n,q}^{j+1} = \lambda_q \delta y_{n,q}^j, \quad \delta y_{n,q}^j = C_q(t_j) e^{i\alpha_q n} \quad j = 1, 2, \dots, J-1.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (2.4) и сокращая на $e^{i\alpha_q n}$, получаем:

$$\frac{\lambda_q - 1}{\tau} - a^2 \frac{e^{i\alpha_q} - 2 + e^{-i\alpha_q}}{h^2} = 0.$$

Так как

$$\frac{e^{i\alpha_q} - 2 + e^{-i\alpha_q}}{4} = - \left(\frac{e^{i\frac{\alpha_q}{2}} - e^{-i\frac{\alpha_q}{2}}}{2i} \right)^2 = - \sin^2 \frac{\alpha_q}{2},$$

то

$$\lambda_q(\alpha_q) = 1 - 4ra^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2}, \quad r = \frac{\tau}{h^2}.$$

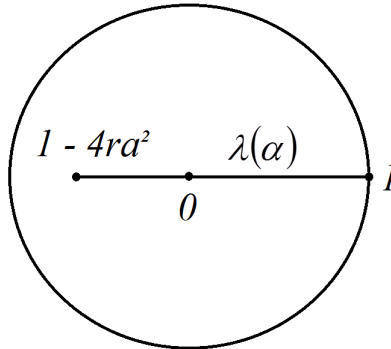


Рис. 7: Спектр оператора перехода со слоя на слой явной схемы для уравнения теплопроводности

При изменении α_q число $\lambda_q(\alpha_q)$ пробегает весь спектр оператора перехода со слоя на слой. В данном случае спектр расположен на отрезке $1 - 4ra^2 \leq \lambda \leq 1$ (см. рис. 7). Условие устойчивости (1.6) схемы выполнено, если

$$1 - 4ra^2 \geq -1 \Rightarrow r \leq \frac{1}{2a^2} \Leftrightarrow \tau \leq \frac{h^2}{2a^2}.$$

Таким образом, явная схема для уравнения теплопроводности является условно устойчивой. Ее можно использовать только в том случае, когда шаги сетки удовлетворяют неравенству $\tau \leq \frac{h^2}{2a^2}$.

Пример 2.4. *Исследуйте на устойчивость с помощью метода гармоник неявную схему для задачи:*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}^1, \quad t \in (0, T], \\ u(x, 0) = \mu(x), & x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Пользуясь той же сеткой, что и в предыдущем примере, запишем неявную схему для рассматриваемой задачи:

$$\begin{cases} \frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} - a^2 \frac{y_{n+1}^{j+1} - 2y_n^{j+1} + y_{n-1}^{j+1}}{h^2} = 0, & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, J-1; \\ y_n^0 = \mu(x_n) \equiv \mu_n, & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Так как гармоники погрешности δy на слоях j и $j+1$ связаны соотношениями:

$$\delta y_{n,q}^{j+1} = \lambda_q \delta y_{n,q}^j, \quad \delta y_{n,q}^j = C_q(t_j) e^{i\alpha_q n} \quad j = 1, 2, \dots, J-1,$$

а сама погрешность в данном случае удовлетворяет уравнению

$$\frac{\delta y_n^{j+1} - \delta y_n^j}{\tau} - a^2 \frac{\delta y_{n+1}^{j+1} - 2\delta y_n^{j+1} + \delta y_{n-1}^{j+1}}{h^2} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, J-1,$$

получаем:

$$\begin{aligned} \lambda_q - 1 - \frac{a^2 \tau}{h^2} \lambda_q (e^{i\alpha_q} - 2 + e^{-i\alpha_q}) &= 0 \Rightarrow \\ \lambda_q(\alpha_q) &= \frac{1}{1 + 4ra^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2}}, \quad r = \frac{\tau}{h^2}. \end{aligned}$$

Спектр $\lambda(\alpha)$ заполняет отрезок вещественной оси:

$$\frac{1}{1 + 4ra^2} \leq \lambda(\alpha) \leq 1,$$

то есть условие устойчивости (1.6) схемы выполнено при любом r . Следовательно, неявная схема для уравнения теплопроводности является безусловно устойчивой по начальным данным, то есть устойчивой при любом соотношении шагов сетки.

Пример 2.5. Исследуйте с помощью метода гармоник на устойчивость по начальным данным явную схему на равномерной сетке для задачи Коши для уравнения теплопроводности в случае двух пространственных переменных:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in (0, T], \\ u(x, y, 0) = \mu(x, y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Введем сетку с шагом h_x по переменной x , h_y по переменной y и τ по времени:

$$x_n = h_x n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad y_m = h_y m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad t_j = \tau j, \quad j = 0, 1, \dots, J.$$

В случае двух пространственных переменных явная схема для уравнения теплопроводности имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{v_{n,m}^{j+1} - v_{n,m}^j}{\tau} - \frac{v_{n+1,m}^j - 2v_{n,m}^j + v_{n-1,m}^j}{h_x^2} - \\ - \frac{v_{n,m+1}^j - 2v_{n,m}^j + v_{n,m-1}^j}{h_y^2} = 0, & n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, J-1, \\ v_{n,m}^0 = \mu(x_n, y_m), & n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Погрешность $\delta v_{n,m}^j$, обусловленная погрешностью начальных данных, будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\delta v_{n,m}^{j+1} - \delta v_{n,m}^j}{\tau} - \frac{\delta v_{n+1,m}^j - 2\delta v_{n,m}^j + \delta v_{n-1,m}^j}{h_x^2} - \frac{\delta v_{n,m+1}^j - 2\delta v_{n,m}^j + \delta v_{n,m-1}^j}{h_y^2} = 0. \quad (2.5)$$

Разложим погрешность $\delta v_{n,m}^j$ в ряд по гармоникам $e^{i(qx_n + py_m)}$:

$$\delta v_{n,m}^j = \sum_q \sum_p C_{q,p}^j e^{i(qx_n + py_m)}.$$

Тогда на слое $j+1$ она будет иметь вид:

$$\delta v_{n,m}^{j+1} = \sum_q \sum_p C_{q,p}^{j+1} e^{i(qx_n + py_m)} = \sum_q \sum_p \lambda_{q,p} C_{q,p}^j e^{i(qx_n + py_m)},$$

где $\lambda_{q,p}$ — множители роста. Их можно найти, рассматривая уравнение (2.5) для каждой отдельной гармоники и сокращая на $C_{q,p}^j e^{i(\alpha_q n + \beta_p m)}$, где $\alpha_q = qh_x$ и $\beta_p = ph_y$. В результате для $\lambda_{q,p}$ получим уравнение:

$$\frac{\lambda_{q,p} - 1}{\tau} - \frac{e^{i\alpha_q} - 2 + e^{-i\alpha_q}}{h_x^2} - \frac{e^{i\beta_p} - 2 + e^{-i\beta_p}}{h_y^2} = 0,$$

откуда находим

$$\lambda_{q,p}(\alpha_q, \beta_p) = 1 - 4r_x \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} - 4r_y \sin^2 \frac{\beta_p}{2},$$

где $r_x = \frac{\tau}{h_x^2}$ и $r_y = \frac{\tau}{h_y^2}$. Пусть $r = \max\{r_x, r_y\}$. Тогда при изменении параметров α_q и β_p значения $\lambda_{q,p}(\alpha_q, \beta_p)$ изменяются в пределах

$$1 - 8r \leq \lambda_{q,p} \leq 1.$$

Условие (1.6) устойчивости схемы выполняется, если

$$1 - 8r \geq -1 \Rightarrow r \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \tau \leq \frac{\min\{h_x^2, h_y^2\}}{4}.$$

Рассмотрим ряд схем, аппроксимирующих задачу Коши для уравнения колебаний на прямой.

Пример 2.6. *Исследуйте на устойчивость по начальным данным схему «крест» для задачи Коши для уравнения колебаний на прямой:*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}^1, t \in (0, T]; \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^1, \end{cases} \quad (2.6)$$

где $a > 0$ — заданное число.

РЕШЕНИЕ. Соответствующая разностная схема имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{y_n^{j+1} - 2y_n^j + y_n^{j-1}}{\tau^2} - a^2 \frac{y_{n+1}^j - 2y_n^j + y_{n-1}^j}{h^2} = 0, & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, j = 1, 2, \dots, J-1, \\ y_n^0 = \varphi_n, \quad \frac{y_n^1 - y_n^0}{\tau} = \psi_n + \frac{\tau a^2}{2} \varphi_n'', & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases}$$

где $\varphi_n = \varphi(x_n)$, $\varphi_n'' = \varphi''(x_n)$, $\psi_n = \psi(x_n)$. При этом погрешность δy решения удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\delta y_n^{j+1} - 2\delta y_n^j + \delta y_n^{j-1}}{\tau^2} - a^2 \frac{\delta y_{n+1}^j - 2\delta y_n^j + \delta y_{n-1}^j}{h^2} = 0, \quad (2.7)$$

при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, j = 1, 2, \dots, J-1$. Так как

$$\delta y_n^j = \sum_q \delta y_{n,q}^j = \sum_q C_q^j e^{iqx_n},$$

где

$$y_{n,q}^{j+1} = \lambda_q y_{n,q}^j = \lambda_q C_q^j e^{iqx_n},$$

то, рассматривая уравнение (2.7) для каждой гармоники по отдельности и сокращая на $C_q^j e^{iqx_n} = C_q^j e^{i\alpha_q n}$, где $\alpha_q = qh$, для множителей роста λ_q приходим к квадратному уравнению:

$$\frac{\lambda_q^2 - 2\lambda_q + 1}{\tau^2} - \lambda_q a^2 \frac{e^{i\alpha_q} - 2 + e^{-i\alpha_q}}{h^2} = 0 \Leftrightarrow \lambda_q^2 - 2 \left(1 - 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2}\right) \lambda_q + 1 = 0, \quad r = \frac{\tau a}{h}.$$

Произведение корней полученного квадратного уравнения равно 1. Если его дискриминант

$$D(\alpha_q) = 4 \left(1 - 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2}\right)^2 - 4 = 16r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} \left(r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} - 1\right)$$

отрицателен, то корни $\lambda_q^1(\alpha_q)$ и $\lambda_q^2(\alpha_q)$ комплексно сопряжены и равны 1 по модулю.

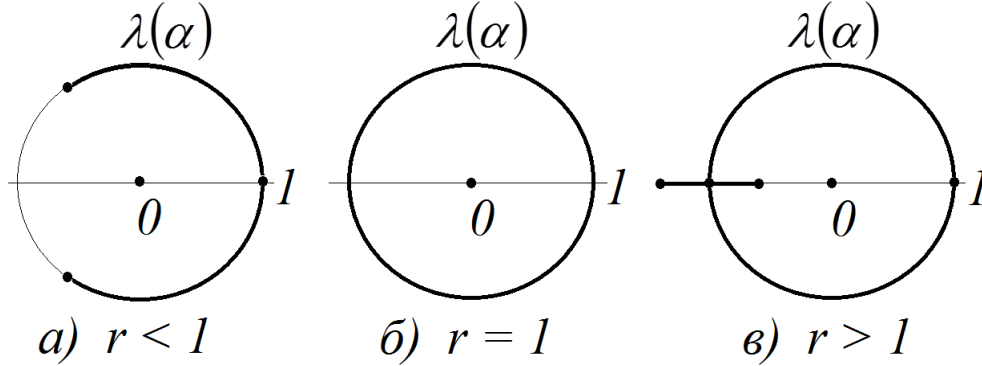


Рис. 8: Спектр оператора перехода со слоя на слой в схеме «крест» для уравнения колебаний

При $r < 1$ дискриминант отрицателен при всех α_q , поэтому при изменении α_q комплексно-сопряженные корни $\lambda_q^1(\alpha_q)$ и $\lambda_q^2(\alpha_q)$ пробегают часть окружности радиуса 1 на комплексной плоскости (рис.8 а). При $r = 1$ спектр заполняет всю единичную окружность (рис.8 б). При $r > 1$ по мере изменения α_q корни квадратного уравнения движутся из точки $\lambda_1 = 1$ по единичной окружности, один по часовой стрелке, а другой против часовой стрелки, пока не сойдутся в точке $\lambda_q = -1$. Затем один из корней пойдет по вещественной оси из точки $\lambda_q = -1$ влево, а другой — вправо, причем $\lambda_q^1 \cdot \lambda_q^2 = 1$ (рис.8 в).

Спектральное условие устойчивости схемы по начальным данным выполнено, если спектр оператора перехода со слоя на слой принадлежит единичной окружности на комплексной плоскости, то есть при $r \leq 1$. Следовательно, схема «крест» является условно устойчивой. Она устойчива, если шаги сетки удовлетворяют неравенству $\tau a \leq h$.

Пример 2.7. *Исследуйте на устойчивость по начальным данным неявную схему для задачи Коши для уравнения колебаний на прямой:*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}^1, \quad t \in (0, T]; \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^1, \end{cases} \quad (2.8)$$

где $a > 0$ — заданное число.

РЕШЕНИЕ. Соответствующая разностная схема имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_n^{j+1} - 2y_n^j + y_n^{j-1}}{\tau^2} - \sigma a^2 \frac{y_{n+1}^{j+1} - 2y_n^{j+1} + y_{n-1}^{j+1}}{h^2} - \sigma a^2 \frac{y_{n+1}^{j-1} - 2y_n^{j-1} + y_{n-1}^{j-1}}{h^2} - \\ - (1 - 2\sigma) a^2 \frac{y_{n+1}^j - 2y_n^j + y_{n-1}^j}{h^2} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, J - 1, \\ y_n^0 = \varphi_n, \quad \frac{y_n^1 - y_n^0}{\tau} = \psi_n + \frac{\tau a^2}{2} \varphi_n''. \end{array} \right.$$

Для множителей роста λ_q получаем квадратное уравнение:

$$\frac{\lambda_q^2 - 2\lambda_q + 1}{\tau^2} + \sigma \frac{a^2 \lambda_q^2}{h^2} 4 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} + \sigma \frac{a^2}{h^2} 4 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} + (1 - 2\sigma) \frac{a^2 \lambda_q}{h^2} 4 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} = 0$$

Введем обозначение

$$\beta_q = \frac{a\tau}{h} \sin \frac{\alpha_q}{2}$$

и перепишем уравнение для λ_q в виде:

$$\lambda_q^2 - 2 \frac{1 - 2(1 - 2\sigma)\beta_q^2}{1 + 4\sigma\beta_q^2} \lambda_q + 1 = 0. \quad (2.9)$$

Как и в предыдущем примере, спектр оператора перехода со слоя на слой будет полностью принадлежать единичной окружности на комплексной плоскости (то есть будет выполнено условие устойчивости схемы), если дискриминант

$$D = 4 \frac{(1 - 2(1 - 2\sigma)\beta_q^2)^2}{(1 + 4\sigma\beta_q^2)^2} - 4 = 16\beta_q^2 \frac{(1 - 4\sigma)\beta_q^2 - 1}{(1 + 4\sigma\beta_q^2)^2}$$

уравнения (2.9) будет меньше либо равен нулю. Следовательно, схема будет устойчивой, если выполнено условие:

$$\left(\frac{a\tau}{h} \right)^2 (1 - 4\sigma) \leq 1. \quad (2.10)$$

Из неравенства (2.10) видно, что при $\sigma \geq \frac{1}{4}$ неявная схема для уравнения колебаний безусловно устойчива. Если $\sigma < \frac{1}{4}$, то схема оказывается условно устойчивой при

$$a\tau \leq \frac{h}{\sqrt{1 - 4\sigma}}.$$

На практике целесообразно выбирать вес σ в пределах $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right]$, так как при $\sigma > \frac{1}{2}$ центральный слой схемы имеет отрицательный вес $(1 - 2\sigma)$.

Рассмотрим несколько примеров двухслойных разностных схем для уравнения колебаний на прямой. Задача Коши (2.8) для уравнения колебаний на прямой эквивалентна следующей задаче для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ v(x, 0) = \tilde{\psi}(x), \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in \mathbb{R}^1, t \in (0, T]; \\ x \in \mathbb{R}^1, \end{matrix} \quad (2.11)$$

где $\tilde{\psi}(x)$ — первообразная функции $\psi(x)$. Введем векторы-столбцы:

$$\mathbf{w}(x, t) = (u(x, t), v(x, t))^T, \quad \Phi(x) = (\varphi(x), \tilde{\psi}(x))^T,$$

и рассмотрим задачу (2.11) в векторной форме:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0, & x \in \mathbb{R}^1, t \in (0, T]; \\ \mathbf{w}(x, 0) = \Phi(x), & x \in \mathbb{R}^1, \end{cases} \quad (2.12)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пример 2.8. *Исследуйте на устойчивость по начальным данным следующую разностную схему для задачи (2.12):*

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{w}_n^{j+1} - \mathbf{w}_n^j}{\tau} - \mathbf{A} \frac{\mathbf{w}_{n+1}^j - \mathbf{w}_n^j}{h} = 0, & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \\ \mathbf{w}_n^0 = \Phi_n, & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (2.13)$$

на равномерной сетке

$$x_n = nh, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots$$

РЕШЕНИЕ. Погрешность $\delta \mathbf{w}_n^j$ решения на произвольном слое j можно разложить в ряд по гармоникам e^{iqx_n} :

$$\delta \mathbf{w}_n^j = \sum_q \delta \mathbf{w}_{n,q}^j = \sum_q \mathbf{C}_q^j e^{iqx_n},$$

где $\mathbf{C}_q^j = (C_{q,1}^j \ C_{q,2}^j)^T$. Тогда на слое $j + 1$ погрешность будет иметь вид

$$\delta \mathbf{w}_n^{j+1} = \sum_q \delta \mathbf{w}_{n,q}^{j+1} = \sum_q \lambda_q \mathbf{C}_q^j e^{iqx_n}.$$

В силу линейности задачи каждая гармоника удовлетворяет уравнению

$$\frac{\delta \mathbf{w}_n^{j+1} - \delta \mathbf{w}_n^j}{\tau} - \mathbf{A} \frac{\delta \mathbf{w}_{n+1}^j - \delta \mathbf{w}_n^j}{h} = 0$$

Подставляя в это уравнение выражения

$$\delta \mathbf{w}_{n,q}^j = \mathbf{C}_q^j e^{i\alpha_q n}, \quad \delta \mathbf{w}_{n,q}^{j+1} = \lambda_q \mathbf{C}_q^j e^{i\alpha_q n}, \quad \alpha_q = qh$$

и сокращая на $e^{i\alpha_q n}$, получаем систему:

$$\frac{\lambda_q - 1}{\tau} \mathbf{C}_q^j - \mathbf{A} \frac{e^{i\alpha_q} - 1}{h} \mathbf{C}_q^j = 0 \Rightarrow ((\lambda_q - 1)\mathbf{E} - r(e^{i\alpha_q} - 1)\mathbf{A}) \mathbf{C}_q^j = 0, \quad r = \frac{\tau}{h}.$$

Данная система имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$|(\lambda_q - 1)\mathbf{E} - r(e^{i\alpha_q} - 1)\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda_q - 1 & -r(e^{i\alpha_q} - 1) \\ -r(e^{i\alpha_q} - 1) & \lambda_q - 1 \end{vmatrix} = (\lambda_q - 1)^2 - r^2(e^{i\alpha_q} - 1)^2 = 0.$$

Следовательно,

$$\lambda_{1,q}(\alpha_q) = 1 - r + re^{i\alpha_q}, \quad \lambda_{2,q}(\alpha_q) = 1 + r - re^{i\alpha_q}.$$

Корни $\lambda_{1,q}(\alpha_q)$ и $\lambda_{2,q}(\alpha_q)$ при изменении вещественного параметра α_q пробегают окружности радиуса r с центрами в точках $1 - r$ и $1 + r$ (рис. 9). Таким образом, условие устойчивости (1.6) не выполнено ни при каком r . Построенная схема является абсолютно неустойчивой.

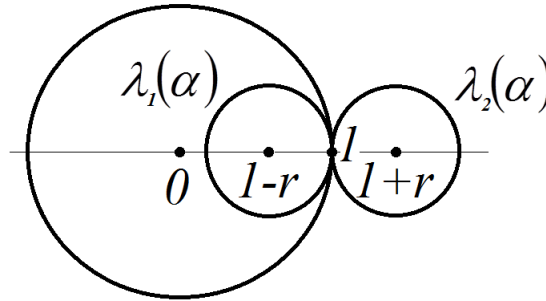


Рис. 9: Спектр схемы (2.13)

Пример 2.9. Исследуйте на устойчивость по начальным данным следующую разностную схему для задачи (2.12):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathbf{w}_n^{j+1} - \mathbf{w}_n^j}{\tau} - \mathbf{A} \frac{\mathbf{w}_{n+1}^j - \mathbf{w}_{n-1}^j}{2h} - \\ - \frac{\tau}{2h^2} (\mathbf{w}_{n+1}^j - 2\mathbf{w}_n^j + \mathbf{w}_{n-1}^j) = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \\ \mathbf{w}_n^0 = \Phi(x_n) \equiv \Phi_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{array} \right. \quad (2.14)$$

на равномерной сетке

$$x_n = nh, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots$$

РЕШЕНИЕ. Схема (2.14) аппроксимирует задачу (2.12) со вторым порядком погрешности аппроксимации по τ и h . В самом деле, если $\mathbf{w}(x, t)$ — достаточно гладкая функция непрерывно меняющихся аргументов x и t , то

$$\mathbf{w}_t(x, t) = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} + O(\tau^2).$$

Если $\mathbf{w}(x, t)$ — решение задачи (2.12), то

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \mathbf{A} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x \partial t} = \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right) = \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \right) = \mathbf{A}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x^2},$$

причем

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}.$$

Следовательно, разностное уравнение

$$\mathbf{w}_t - \frac{\tau}{2} \mathbf{w}_{\bar{x}\bar{x}} - \mathbf{A} \mathbf{w}_x = 0$$

будет аппроксимировать дифференциальное уравнение (2.12) со вторым порядком погрешности аппроксимации по времени, а также и по координате за счет симметрии пространственных разностных производных.

Характеристическое уравнение для схемы (2.14) имеет вид:

$$\frac{\lambda_q - 1}{\tau} \mathbf{C}_q^j - \mathbf{A} \frac{e^{i\alpha_q} - e^{-i\alpha_q}}{2h} \mathbf{C}_q^j - \frac{\tau}{2h^2} (e^{i\alpha_q} - 2 + e^{-i\alpha_q}) \mathbf{C}_q^j = 0 \Rightarrow$$

$$\left[(\lambda_q - 1 + 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2}) \mathbf{E} - ir \sin \alpha \mathbf{A} \right] \mathbf{C}_q^j = 0, \quad r = \frac{\tau}{h} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_q - 1 + 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} & -ir \sin \alpha_q \\ -ir \sin \alpha_q & \lambda_q - 1 + 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\lambda_q - 1 + 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} \right)^2 = -r^2 \sin^2 \alpha_q.$$

Из характеристического уравнения находим спектр рассматриваемой схемы:

$$\lambda_{+,q}(\alpha_q) = 1 - 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} + ir \sin \alpha_q, \quad \lambda_{-,q}(\alpha_q) = 1 - 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} - ir \sin \alpha_q.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |\lambda_{\pm, q}|^2 &= \left(1 - 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2}\right)^2 + r^2 \sin^2 \alpha_q = 1 - 4r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} + 4r^4 \sin^4 \frac{\alpha_q}{2} + 4r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} \cos^2 \frac{\alpha_q}{2} = \\ &= 1 + 4r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} \left(-1 + r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} + \cos^2 \frac{\alpha_q}{2}\right) = 1 + 4r^2 \sin^4 \frac{\alpha_q}{2} (r^2 - 1). \end{aligned}$$

Таким образом, условие

$$|\lambda| \leq 1$$

выполнено, если $r \leq 1$, и не выполнено, если $r > 1$. Следовательно, схема (2.14) является условно устойчивой, и условие ее устойчивости имеет вид $\tau \leq h$.