Аналитическая геометрия

Бадьин А. В.

Лекция 1. Логико-математическая символика

1.1. Логические связки

Логическими связками называются значки: $\neg$ (отрицание), $\wedge$ (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\Longrightarrow$ (импликация), $\Longleftrightarrow$ (эквивалентность).

Пусть A — утверждение. Обозначим через $\neg A$ утверждение, истинностное значение которого можно найти с помощью таблицы:

A	$\neg A$
0	1
1	0

.

Утверждение $\neg A$ читается: «неверно, что A» или «не А». Очевидно, роль отрицания в математическом языке похожа на роль частицы «не» в разговорном языке.

Пусть A, B — утверждения. Обозначим через $(A \wedge B)$ утверждение, истинностное значение которого можно найти с помощью таблицы:

A	B	$(A \wedge B)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

.

Утверждение $(A \wedge B)$ читается: «A и B». Далее часто будем писать $A \wedge B$ вместо $(A \wedge B)$. Будем говорить, что A, B — члены конъюнкции $A \wedge B$. Очевидно, роль конъюнкции в математическом языке похожа на роль союза «и» в разговорном языке.

Пусть A, B — утверждения. Обозначим через $(A \vee B)$ утверждение, истинностное значение которого можно найти с помощью таблицы:

A	B	$(A \vee B)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

.

Утверждение $(A \vee B)$ читается: «A или B». Далее часто будем писать $A \vee B$ вместо $(A \vee B)$. Будем говорить, что A, B — члены дизъюнкции $A \vee B$. **Внимание! Дизъюнкция истинных утверждений истинна.** Очевидно, роль дизъюнкции в математическом языке похожа на роль союза «или» в разговорном языке (если союз «или» употребляется в соединительном смысле).

Пусть A, B — утверждения. Обозначим через $(A \Longrightarrow B)$ утверждение, истинностное значение которого можно найти с помощью таблицы:

A	B	$(A \implies B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

.

Утверждение $(A \implies B)$ читается: «если A, то B» или «из A следует B». Далее часто будем писать $A \implies B$ вместо $(A \implies B)$. Будем говорить, что: A — посылка импликации $A \implies B$; B — заключение импликации $A \implies B$. **Внимание! Импликация с ложной посылкой всегда истинна.** Очевидно, роль импликации в математическом языке похожа на роль оборота «если…, то…» в разговорном языке (если при употреблении этого оборота считается, что из лжи следует всё, что угодно).

Пусть A, B — утверждения. Обозначим через $(A \iff B)$ утверждение, истинностное значение которого можно найти с помощью таблицы:

A	B	$(A \iff B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

.

Утверждение $(A \iff B)$ читается: «A справедливо тогда и только тогда, когда B справедливо» или «A эквивалентно B». Далее часто будем писать $A \iff B$ вместо $(A \iff B)$. Очевидно, роль эквивалентности в математическом языке похожа на роль оборота «…тогда и только тогда, когда…» в разговорном языке.

Замечание. Пусть A, B, C — утверждения. Используя истинностные таблицы, нетрудно доказать:

$$\begin{gathered}
\neg\neg A \iff A, \\
(A \wedge B) \iff (B \wedge A), \\
\big((A \wedge B) \wedge C\big) \iff \big(A \wedge (B \wedge C)\big), \\
(A \vee B) \iff (B \vee A), \\
\big((A \vee B) \vee C\big) \iff \big(A \vee (A \vee C)\big), \\
(A \implies B) \iff (\neg A \vee B), \\
(A \iff B) \iff \big((A \implies B) \wedge (B \implies A)\big), \\
\big(A \wedge (B \vee C)\big) \iff \big((A \wedge B) \vee (A \wedge C)\big), \\
\big(A \vee (B \wedge C)\big) \iff \big((A \vee B) \wedge (A \vee C)\big), \\
\neg(A \wedge B) \iff (\neg A \vee \neg B), \\
\neg(A \vee B) \iff (\neg A \wedge \neg B).
\end{gathered}$$

Очевидно:

$$\neg(A \implies B) \iff (A \wedge \neg B).$$

1.2. Кванторы

Кванторами называются значки: $\forall$ (квантор общности или квантор всеобщности), $\exists$ (квантор существования).

Пусть $A(x)$ — утверждение относительно допустимого объекта x. Будем писать $\forall x A(x)$, если для любого допустимого объекта x справедливо $A(x)$.

Пусть $A(x)$ — утверждение относительно допустимого объекта x. Будем писать $\exists x A(x)$, если существует допустимый объект x, удовлетворяющий условию $A(x)$.

Пусть $A(x)$ — утверждение относительно допустимого объекта x. Будем писать $\exists! x A(x)$, если:

$$\exists x A(x) \land \forall x \forall y \big(A(x) \land A(y) \implies x = y\big).$$

Утверждение $\exists! x A(x)$ читается: «существует единственный допустимый объект x, удовлетворяющий условию $A(x)$».

Пусть $A(x)$, $B(x)$ — утверждения относительно допустимого объекта x. Будем писать $\forall x \big[B(x)\big] A(x)$, если:

$$\forall x \big(B(x) \implies A(x)\big).$$

Утверждение $\forall x \big[B(x)\big] A(x)$ читается: «для любого допустимого объекта x, удовлетворяющего условию $B(x)$, справедливо $A(x)$».

Пусть $A(x)$, $B(x)$ — утверждения относительно допустимого объекта x. Будем писать $\exists x \big[B(x)\big] A(x)$, если:

$$\exists x \big(B(x) \land A(x)\big).$$

Утверждение $\exists x \big[B(x)\big] A(x)$ читается: «существует допустимый объект x, удовлетворяющий условию $B(x)$, такой, что $A(x)$».

Пусть $A(x)$, $B(x)$ — утверждения относительно допустимого объекта x. Будем писать $\exists! x \big[B(x)\big] A(x)$, если:

$$\exists! x \big(B(x) \land A(x)\big).$$

Утверждение $\exists! x \big[B(x)\big] A(x)$ читается: «существует единственный допустимый объект x, удовлетворяющий условию $B(x)$, такой, что $A(x)$».

Замечание. Пусть $A(x)$, $B(x)$ — утверждения относительно допустимого объекта x. Очевидно:

$$\begin{aligned}
\neg \forall x A(x) &\iff \exists x \neg A(x), \\
\neg \exists x A(x) &\iff \forall x \neg A(x), \\
\neg \forall x \big[B(x)\big] A(x) &\iff \exists x \big[B(x)\big] \neg A(x), \\
\neg \exists x \big[B(x)\big] A(x) &\iff \forall x \big[B(x)\big] \neg A(x).
\end{aligned}$$

1.3. Теория множеств

Пусть A — множество. Будем писать $x \in A$, если x принадлежит множеству A.

Пусть: $A(x)$ — утверждение относительно допустимого объекта x, Q — множество. Далее часто будем писать: $\forall x \in Q\ A(x)$ вместо $\forall x[x \in Q] A(x)$; $\exists x \in Q\ A(x)$ вместо $\exists x[x \in Q] A(x)$; $\exists! x \in Q\ A(x)$ вместо $\exists! x[x \in Q] A(x)$. Утверждение $\forall x[x \in Q] A(x)$ можно читать: «для любого допустимого объекта x, принадлежащего множеству Q, справедливо $A(x)$». Утверждение $\exists x \in Q\ A(x)$ можно читать: «существует допустимый объект x, принадлежащий множеству Q, удовлетворяющий условию $A(x)$». Утверждение $\exists! x \in Q\ A(x)$

можно читать: «существует единственный допустимый объект x, принадлежащий множеству Q, удовлетворяющий условию $A(x)$».

Пусть A, B — множества. Тогда:

$$A = B \iff \forall x(x \in A \iff x \in B).$$

Пусть $A(x)$ — утверждение относительно допустимого объекта x. Пусть существует множество Q, удовлетворяющее условию: Q — множество всех допустимых объектов x, удовлетворяющих условию $A(x)$. Тогда существует единственное множество Q, удовлетворяющее условию: Q — множество всех допустимых объектов x, удовлетворяющих условию $A(x)$. Обозначим через $\big\{x\colon A(x)\big\}$ множество всех допустимых объектов x, удовлетворяющих условию $A(x)$.

Будем говорить, что A — пустое множество, если: A — множество, $\forall x(x \notin A)$. Существует единственное множество A, удовлетворяющее условию: A — пустое множество. Обозначим через $\varnothing$ пустое множество.

Пусть A — множество. Будем писать $B \subseteq A$, если: B — множество, $\forall x(x \in B \implies x \in A)$. Утверждение $B \subseteq A$ читается: «B — подмножество множества A». **Внимание! Утверждения $B \in A$ и $B \subseteq A$ имеют разный смысл.** Очевидно: $\varnothing \subseteq A$, $A \subseteq A$.

Пусть A — множество. Будем писать $B \subset A$, если $B \subseteq A \wedge B \neq A$. Утверждение $B \subset A$ читается: «B — **собственное** подмножество множества A».

Пусть A — множество. Обозначим, $P(A) = \{B\colon B \subseteq A\}$.

Пусть x — некоторый объект. Обозначим, $\{x\} = \{u\colon u = x\}$.

Пусть x, y — некоторые объекты. Обозначим, $\{x, y\} = \{u\colon u = x \vee u = y\}$. **Внимание: $\{y, x\} = \{x, y\}$, $\{x, x\} = \{x\}$.**

Пусть x — некоторый объект. Обозначим, $(x) = x$.

Пусть x, y — некоторые объекты. Обозначим через (x, y) упорядоченную пару объектов x, y. Мы не даём строгого определения упорядоченной пары. Достаточно знать, что (x, y) это некоторый новый объект, по которому можно однозначно восстановить как объект x, так и объект y. Пусть $u = (x, y)$. Обозначим: $u^1 = x$, $u^2 = y$. **Внимание: $x \neq y \implies (y, x) \neq (x, y)$, $(x, x) \neq (x)$.**

Пусть A, B — множества. Обозначим:

$$\begin{gathered}
A \cap B = \{x\colon x \in A \wedge x \in B\},\\
A \cup B = \{x\colon x \in A \vee x \in B\},\\
A \setminus B = \{x\colon x \in A \wedge x \notin B\},\\
A \times B = \big\{(x, y)\colon x \in A \wedge y \in B\big\} = \Big\{u\colon \exists x \exists y\big(x \in A \wedge y \in B \wedge u = (x, y)\big)\Big\}.
\end{gathered}$$

Будем говорить, что: $A \cap B$ — пересечение множеств A, B; $A \cup B$ — объединение множеств A, B; $A \setminus B$ — разность множеств A, B; $A \times B$ — прямое произведение множеств A, B (декартово произведение множеств A, B).

1.4. Теория функций

Пусть F — функция. Обозначим через $\mathrm{D}(F)$ область определения функции F.

Внимание! Пусть F_1, F_2 — функции. Очевидно, $F_1 = F_2$ тогда и только тогда, когда: $\mathrm{D}(F_1) = \mathrm{D}(F_2)$, $F_1(x) = F_2(x)$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$.

Будем говорить, что F — пустая функция, если: F — функция, $\mathrm{D}(F) = \varnothing$. Существует единственная функция, удовлетворяющая условию: F — пустая функция.

Пусть F — функция. Обозначим:

$$\mathrm{R}(F) = \bigl\{F(x)\colon x \in \mathrm{D}(F)\bigr\} = \Bigl\{y\colon \exists x\bigl(x \in \mathrm{D}(F) \wedge y = F(x)\bigr)\Bigr\}.$$

Множество $\mathrm{R}(F)$ называется областью значений функции F или образом функции F. Другое обозначение, $\mathrm{Im}(F)$.

Пусть: F — функция, A — множество. Обозначим:

$$\mathrm{D}(F, A) = \bigl\{x\colon x \in \mathrm{D}(F) \wedge F(x) \in A\bigr\}.$$

Множество $\mathrm{D}(F, A)$ называется прообразом множества A под действием функции F. Очевидно, $\mathrm{D}(F, A) \subseteq \mathrm{D}(F)$. Пусть $\mathrm{R}(F) \subseteq A$. Очевидно, $\mathrm{D}(F, A) = \mathrm{D}(F)$.

Пусть: F — функция, A — множество. Обозначим:

$$F[A] = \bigl\{F(x)\colon x \in A \wedge x \in \mathrm{D}(F)\bigr\} = \Bigl\{y\colon \exists x\bigl(x \in A \wedge x \in \mathrm{D}(F) \wedge y = F(x)\bigr)\Bigr\}.$$

Множество $F[A]$ называется образом множества A под действием функции F. Очевидно, $F[A] \subseteq \mathrm{R}(F)$. Пусть $\mathrm{D}(F) \subseteq A$. Очевидно, $F[A] = \mathrm{R}(F)$.

Пусть A, B — множества. Будем писать $F\colon A \to B$, если: F — функция, $\mathrm{D}(F) \subseteq A$, $\mathrm{R}(F) \subseteq B$. Утверждение $F\colon A \to B$ читается: «функция F действует из множества A в множество B». Обозначим через $\mathrm{fun}(A, B)$ множество всех функций F, удовлетворяющих условию $F\colon A \to B$.

Пусть A, B — множества. Будем писать $F\colon A \implies B$, если: F — функция, $\mathrm{D}(F) = A$, $\mathrm{R}(F) \subseteq B$. Утверждение $F\colon A \implies B$ читается: «функция F действует из **всего** множества A в множество B». Обозначим через $\mathrm{Fun}(A, B)$ множество всех функций F, удовлетворяющих условию $F\colon A \implies B$.

Пусть: F — функция, A — множество. Обозначим через $F|_A$ функцию, удовлетворяющую условиям: $\mathrm{D}(F|_A) = A \cap \mathrm{D}(F)$, $F|_A(x) = F(x)$ при $x \in A \cap D(F)$. Функция $F|_A$ называется ограничением функции F на множество A. Очевидно, $\mathrm{R}(F|_A) = F[A]$

Пусть F_1, F_2 — функции. Обозначим через $F_2 \circ F_1$ функцию, удовлетворяющую условиям: $\mathrm{D}(F_2 \circ F_1) = \bigl\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)\bigr\}$, $(F_2 \circ F_1)(x) = F_2\bigl(F_1(x)\bigr)$ при $x \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$. Функция $F_2 \circ F_1$ называется суперпозицией функций F_2, F_1 или композицией функций F_2, F_1 или произведением функций F_2, F_1 или сложной функцией, образованной функциями F_2, F_1. Другое обозначение, F_2F_1.

Утверждение. *Пусть F_1, F_2, F_3 — функции. Тогда $(F_3 \circ F_2) \circ F_1 = F_3 \circ (F_2 \circ F_1)$.*

Доказательство. Очевидно:

$$\begin{gathered}\mathrm{D}\bigl((F_3 \circ F_2) \circ F_1\bigr) = \bigl\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_3 \circ F_2)\bigr\} = \\ = \Bigl\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2) \wedge F_2\bigl(F_1(x)\bigr) \in \mathrm{D}(F_3)\Bigr\} = \\ = \bigl\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1) \wedge (F_2 \circ F_1)(x) \in \mathrm{D}(F_3)\bigr\} = \mathrm{D}\bigl(F_3 \circ (F_2 \circ F_1)\bigr).\end{gathered}$$

Пусть $x \in \mathrm{D}\bigl((F_3 \circ F_2) \circ F_1\bigr)$. Тогда:

$$\begin{gathered}\bigl((F_3 \circ F_2) \circ F_1\bigr)(x) = (F_3 \circ F_2)\bigl(F_1(x)\bigr) = F_3\Bigl(F_2\bigl(F_1(x)\bigr)\Bigr) = F_3\bigl((F_2 \circ F_1)(x)\bigr) = \\ = \bigl(F_3 \circ (F_2 \circ F_1)\bigr)(x). \quad \square\end{gathered}$$

Утверждение. *Пусть: F_1, F_2 — функции, A — множество. Тогда* $(F_2 \circ F_1)[A] = F_2\bigl[F_1[A]\bigr]$.

Доказательство. Пусть $z \in (F_2 \circ F_1)[A]$. Тогда существует объект x, удовлетворяющий условиям: $x \in A$, $x \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$, $z = (F_2 \circ F_1)(x)$. Следовательно: $x \in A$, $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$, $z = F_2\bigl(F_1(x)\bigr)$. Тогда: $F_1(x) \in F_1[A]$, $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$, $z = F_2\bigl(F_1(x)\bigr)$. Следовательно, $z \in F_2\bigl[F_1[A]\bigr]$.

Пусть $z \in F_2\bigl[F_1[A]\bigr]$. Тогда существует объект y, удовлетворяющий условиям: $y \in F_1[A]$, $y \in \mathrm{D}(F_2)$, $z = F_2(y)$. Так как $y \in F_1[A]$, то существует объект x, удовлетворяющий условиям: $x \in A$, $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $y = F_1(x)$. Тогда: $x \in A$, $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$, $z = F_2\bigl(F_1(x)\bigr)$. Следовательно: $x \in A$, $x \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$, $z = (F_2 \circ F_1)(x)$. Тогда $z \in (F_2 \circ F_1)[A]$. □

Замечание. Пусть F_1, F_2 — функции. Очевидно:

$$\mathrm{D}(F_2 \circ F_1) = \bigl\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \land F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)\bigr\} \subseteq \bigl\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1)\bigr\} = \mathrm{D}(F_1);$$
$$\mathrm{D}(F_2 \circ F_1) = \bigl\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \land F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)\bigr\} = \mathrm{D}\bigl(F_1, \mathrm{D}(F_2)\bigr);$$
$$\mathrm{R}(F_2 \circ F_1) = (F_2 \circ F_1)\bigl[\mathrm{D}(F_1)\bigr] = F_2\Bigl[F_1\bigl[\mathrm{D}(F_1)\bigr]\Bigr] \subseteq \mathrm{R}(F_2);$$
$$\mathrm{R}(F_2 \circ F_1) = (F_2 \circ F_1)\bigl[\mathrm{D}(F_1)\bigr] = F_2\Bigl[F_1\bigl[\mathrm{D}(F_1)\bigr]\Bigr] = F_2\bigl[\mathrm{R}(F_1)\bigr].$$

Пусть: F_1, F_2 — функции, $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$. Тогда:

$$\mathrm{D}(F_2 \circ F_1) = \bigl\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \land F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)\bigr\} = \bigl\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1)\bigr\} = \mathrm{D}(F_1).$$

Пусть: F_1, F_2 — функции, $\mathrm{D}(F_2) \subseteq \mathrm{R}(F_1)$. Тогда:

$$\mathrm{R}(F_2 \circ F_1) = F_2\bigl[\mathrm{R}(F_1)\bigr] = \mathrm{R}(F_2).$$

Пусть F — функция. Очевидно, существует функция φ, удовлетворяющая условиям: $\varphi\colon \mathrm{R}(F) \implies \mathrm{D}(F)$, $F\bigl(\varphi(y)\bigr) = y$ при $y \in \mathrm{R}(F)$.

Пусть F — функция. Будем говорить, что F — обратимая функция, если

$$\forall x_1 \in \mathrm{D}(F) \forall x_2 \in \mathrm{D}(F) \bigl(x_1 \neq x_2 \implies F(x_1) \neq F(x_2)\bigr).$$

Пусть F — обратимая функция. Будем говорить, что φ — обратная функция к функции F, если: $\varphi\colon \mathrm{R}(F) \implies \mathrm{D}(F)$, $F\bigl(\varphi(y)\bigr) = y$ при $y \in \mathrm{R}(F)$. Очевидно, существует единственная функция φ, удовлетворяющая условию: φ — обратная функция к функции F. Обозначим через F^{-1} обратную функцию к функции F.

Утверждение. *Пусть: F_1, F_2 — функции, $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\bigl(F_1(x)\bigr) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$. Тогда: F_1 — обратимая функция, $\mathrm{D}(F_1) \subseteq \mathrm{R}(F_2)$.*

Доказательство. Пусть: x_1, $x_2 \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x_1) = F_1(x_2)$. Тогда: $x_1 = F_2\bigl(F_1(x_1)\bigr) = F_2\bigl(F_1(x_2)\bigr) = x_2$. Следовательно, F_1 — обратимая функция.

Пусть $x \in \mathrm{D}(F_1)$. Тогда: $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$, $x = F_2\bigl(F_1(x)\bigr)$. Следовательно, $x \in \mathrm{R}(F_2)$. Тогда $\mathrm{D}(F_1) \subseteq \mathrm{R}(F_2)$. □

Утверждение. *Пусть: F_1, F_2 — функции, $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\bigl(F_1(x)\bigr) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$; $\mathrm{R}(F_2) \subseteq \mathrm{D}(F_1)$. Тогда: F_1 — обратимая функция, $\mathrm{D}(F_1) = \mathrm{R}(F_2)$.*

Доказательство. Так как: $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$, то: F_1 — обратимая функция, $\mathrm{D}(F_1) \subseteq \mathrm{R}(F_2)$. Так как: $\mathrm{D}(F_1) \subseteq \mathrm{R}(F_2)$, $\mathrm{R}(F_2) \subseteq \mathrm{D}(F_1)$, то $\mathrm{D}(F_1) = \mathrm{R}(F_2)$. Итак: F_1 — обратимая функция, $\mathrm{D}(F_1) = \mathrm{R}(F_2)$. □

Утверждение. *Пусть: F_1, F_2 — функции, $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big)$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$; $\mathrm{R}(F_2) \subseteq \mathrm{D}(F_1)$, $F_1\big(F_2(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{D}(F_2)$. Тогда: F_1, F_2 — обратимые функции, $F_1^{-1} = F_2$, $F_2^{-1} = F_1$.*

Доказательство. Так как: $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big)$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$, то F_1 — обратимая функция.

Так как: $\mathrm{R}(F_2) \subseteq \mathrm{D}(F_1)$, $F_1\big(F_2(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{D}(F_2)$; $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, то $\mathrm{D}(F_2) = \mathrm{R}(F_1)$.

Так как: F_1 — обратимая функция, $F_2\colon\ \mathrm{R}(F_1) \implies \mathrm{D}(F_1)$, $F_1\big(F_2(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{R}(F_1)$, то F_2 — обратная функция к функции F_1.

Аналогично доказываем, что: F_2 — обратимая функция, $F_2^{-1} = F_1$. □

Утверждение. *Пусть: F_1, F_2 — обратимые функции. Тогда: $F_2 \circ F_1$ — обратимая функция, $(F_2 \circ F_1)^{-1} = F_1^{-1} \circ F_2^{-1}$.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$. Обозначим, $z = (F_2 \circ F_1)(x)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$, $z = F_2\big(F_1(x)\big)$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $z \in \mathrm{D}(F_2^{-1})$, $F_2^{-1}(z) = F_1(x)$. Тогда: $z \in \mathrm{D}(F_2^{-1})$, $F_2^{-1}(z) \in \mathrm{D}(F_1^{-1})$, $F_1^{-1}\big(F_2^{-1}(z)\big) = x$. Следовательно: $z \in \mathrm{D}(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})$, $(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})(z) = x$. Итак: $(F_2 \circ F_1)(x) \in \mathrm{D}(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})$, $(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})\big((F_2 \circ F_1)(x)\big) = x$.

Пусть $z \in \mathrm{D}(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})$. Обозначим, $x = (F_1^{-1} \circ F_2^{-1})(z)$. Тогда: $z \in \mathrm{D}(F_2^{-1})$, $F_2^{-1}(z) \in \mathrm{D}(F_1^{-1})$, $x = F_1^{-1}\big(F_2^{-1}(z)\big)$. Следовательно: $z \in \mathrm{D}(F_2^{-1})$, $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x) = F_2^{-1}(z)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = z$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$, $(F_2 \circ F_1)(x) = z$. Итак: $(F_1^{-1} \circ F_2^{-1})(z) \in \mathrm{D}(F_2 \circ F_1)$, $(F_2 \circ F_1)\big((F_1^{-1} \circ F_2^{-1})(z)\big) = z$.

Окончательно получаем, что: $F_2 \circ F_1$ — обратимая функция, $(F_2 \circ F_1)^{-1} = F_1^{-1} \circ F_2^{-1}$. □

Утверждение. *Пусть F — обратимая функция. Тогда: $F^{-1}\big(F(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F)$; $\mathrm{R}(F^{-1}) = \mathrm{D}(F)$.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathrm{D}(F)$. Тогда $F(x) \in \mathrm{R}(F)$. Следовательно: $F^{-1}\big(F(x)\big) \in \mathrm{D}(F)$, $F\Big(F^{-1}\big(F(x)\big)\Big) = F(x)$. Так как F — обратимая функция, то $F^{-1}\big(F(x)\big) = x$.

Так как: $\mathrm{R}(F) \subseteq \mathrm{D}(F^{-1})$, $F^{-1}\big(F(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F)$; $\mathrm{R}(F^{-1}) \subseteq \mathrm{D}(F)$, то $\mathrm{D}(F) = \mathrm{R}(F^{-1})$. □

Утверждение. *Пусть: F_1, F_2 — функции, $\mathrm{R}(F_1) = \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$. Тогда: F_1 — обратимая функция, $F_1^{-1} = F_2$*

Доказательство. Так как: $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$, $F_2\big(F_1(x)\big) = x$ при $x \in \mathrm{D}(F_1)$, то F_1 — обратимая функция.

Очевидно, $\mathrm{D}(F_1^{-1})$, $\mathrm{D}(F_2) = \mathrm{R}(F_1)$. Пусть $y \in \mathrm{R}(F_1)$. Тогда существует объект x, удовлетворяющий условиям: $x \in \mathrm{D}(F_1)$, $y = F_1(x)$. Следовательно: $F_1^{-1}(y) = F_1^{-1}\big(F_1(x)\big) = x = F_2\big(F_1(x)\big) = F_2(y)$. Тогда $F_1^{-1} = F_2$. □

Утверждение. *Пусть F — обратимая функция. Тогда: F^{-1} — обратимая функция, $(F^{-1})^{-1} = F$.*

Доказательство. Так как: $\mathrm{R}(F^{-1}) = \mathrm{D}(F)$, $F\big(F^{-1}(y)\big) = y$ при $y \in \mathrm{D}(F^{-1})$, то: F^{-1} — обратимая функция, $(F^{-1})^{-1} = F$. □

Пусть A — множество. Будем говорить, что I — единичная функция на множестве A, если: I — функция, $\mathrm{D}(I) = A$, $I(x) = x$ при $x \in A$.

Пусть: A_1, A_2 — множества, $F\colon A_1 \to A_2$. Очевидно: $F \circ I_1 = F$, $I_2 \circ F = F$.

Пусть: A_1, A_2 — множества, $F\colon A_1 \to A_2$, F — обратимая функция. Очевидно: $F \circ F^{-1} = I_2|_{\mathrm{R}(F)}$, $F^{-1} \circ F = I_1|_{\mathrm{D}(F)}$.

1.5. Числовые системы

Обозначим через $\mathbb{Z}$ множество всех целых чисел. Обозначим: $\mathbb{Z}_+ = \{k\colon k \in \mathbb{Z} \wedge k \geqslant 0\}$, $\mathbb{N} = \{k\colon k \in \mathbb{Z} \wedge k \geqslant 1\}$, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\overline{\mathbb{Z}}_+ = \{k\colon k \in \overline{\mathbb{Z}} \wedge k \geqslant 0\}$, $\overline{\mathbb{N}} = \{k\colon k \in \overline{\mathbb{Z}} \wedge k \geqslant 1\}$.

Пусть N_1, $N_2 \in \overline{\mathbb{Z}}$. Будем писать $k = \overline{N_1, N_2}$, если: $k \in \overline{\mathbb{Z}}$, $N_1 \leqslant k \leqslant N_2$.

Пусть A — конечное множество. Обозначим через $\operatorname{card}(A)$ количество элементов множества A.

Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 3$, $x_1, \ldots, x_N$ — некоторые объекты. Обозначим, $\{x_1, \ldots, x_N\} = \{u\colon u = x_1 \vee \cdots \vee u = x_N\}$.

Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 3$, $x_1, \ldots, x_N$ — некоторые объекты. Обозначим, $(x_1, \ldots, x_N) = \big((x_1, \ldots, x_{N-1}), x_N\big)$. Пусть $u = (x_1, \ldots, x_N)$. Обозначим: $u^1 = x_1, \ldots, u^N = x_N$.

Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 3$, $A_1, \ldots, A_N$ — множества. Обозначим:

$$\begin{gathered} A_1 \times \cdots \times A_N = \big\{(x_1, \ldots, x_N)\colon x_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge x_N \in A_N\big\} = \\ = \Big\{u\colon \exists x_1 \cdots \exists x_N \big(x_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge x_N \in A_N \wedge u = (x_1, \ldots, x_N)\big)\Big\}. \end{gathered}$$

Очевидно, $A_1 \times \cdots \times A_N = (A_1 \times \cdots \times A_{N-1}) \times A_N$.

Пусть A — множество. Обозначим, $A^1 = A$. Пусть: A — множество, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$. Пусть $A_1, \ldots, A_N = A$. Обозначим, $A^N = A_1 \times \cdots \times A_N$. Очевидно, $A^N = A^{N-1} \times A$.

Обозначим через $\mathbb{Q}$ множество всех рациональных чисел. Обозначим: $\mathbb{Q}_+ = \{x\colon x \in \mathbb{Q} \wedge x \geqslant 0\}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\overline{\mathbb{Q}}_+ = \{x\colon x \in \overline{\mathbb{Q}} \wedge x \geqslant 0\}$.

Обозначим через $\mathbb{R}$ множество всех вещественных чисел. Обозначим: $\mathbb{R}_+ = \{x\colon x \in \mathbb{R} \wedge x \geqslant 0\}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{x\colon x \in \overline{\mathbb{R}} \wedge x \geqslant 0\}$.

Пусть $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Будем говорить, что α — наименьший элемент множества A, если: $\alpha \in A$, $\forall x \in A(x \geqslant \alpha)$. Пусть существует число α, удовлетворяющее условию: α — наименьший элемент множества A. Тогда существует единственное число α, удовлетворяющее условию: α — наименьший элемент множества A. Обозначим через $\min(A)$ наименьший элемент множества A.

Пусть $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Будем говорить, что α — наибольший элемент множества A, если: $\alpha \in A$, $\forall x \in A(x \leqslant \alpha)$. Пусть существует число α, удовлетворяющее условию: α — наибольший элемент множества A. Тогда существует единственное число α, удовлетворяющее условию: α — наибольший элемент множества A. Обозначим через $\max(A)$ наибольший элемент множества A.

Пусть α, $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$. Обозначим:

$$\begin{gathered} [\alpha, \beta] = \big\{x\colon x \in \overline{\mathbb{R}} \wedge \min\{\alpha, \beta\} \leqslant x \leqslant \max\{\alpha, \beta\}\big\}, \\ (\alpha, \beta] = [\alpha, \beta] \setminus \{\alpha\}, \\ [\alpha, \beta) = [\alpha, \beta] \setminus \{\beta\}, \\ (\alpha, \beta) = [\alpha, \beta] \setminus \{\alpha, \beta\}. \end{gathered}$$

1.6. Примеры

Утверждение $0 < 1 \vee 2 + 2 = 4$ истинно. Утверждение $1 < 0 \implies 2 + 2 = 5$ истинно. Очевидно:

$$\neg(0 < 1 \vee 2 + 2 = 4) \iff (1 \leqslant 0 \wedge 2 + 2 \neq 4),$$
$$\neg(1 < 0 \implies 2 + 2 = 5) \iff (1 < 0 \wedge 2 + 2 \neq 5).$$

Пусть: $A(x)$ — утверждение относительно допустимого объекта x; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r$ — некоторые допустимые объекты. Очевидно:

$$\forall k = \overline{1, r}\, A(x_k) \iff A(x_1) \wedge \cdots \wedge A(x_r),$$
$$\exists k = \overline{1, r}\, A(x_k) \iff A(x_1) \vee \cdots \vee A(x_r).$$

Утверждение $\forall x \in \mathbb{R}(x = 0)$ ложно. Утверждение $\exists x \in \mathbb{R}(x = 0)$ истинно. Утверждение $\exists! x \in \mathbb{R}(x = 0)$ истинно. **Внимание! Утверждение** $\forall x \in \varnothing(x \neq x)$ **истинно.** Утверждение $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}(x < y)$ истинно. Утверждение $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}(x < y)$ ложно. **Внимание! Утверждения** $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}(x < y)$ **и** $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}(x < y)$ **имеют разный смысл.** Очевидно:

$$\neg \forall x \in \mathbb{R}(x = 0) \iff \exists x \in \mathbb{R}(x \neq 0),$$
$$\neg \exists x \in \mathbb{R}(x = 0) \iff \forall x \in \mathbb{R}(x \neq 0),$$
$$\neg \forall x \in \varnothing(x \neq x) \iff \exists x \in \varnothing(x = x),$$
$$\neg \forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}(x < y) \iff \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}(y \leqslant x),$$
$$\neg \exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}(x < y) \iff \forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R}(y \leqslant x).$$

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Крутицкая Н. Ч., Тихонравов А. В., Шишкин А. А.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра с приложениями.

[4] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[5] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия.

[6] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[7] *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии.