Аналитическая геометрия

Бадьин А. В.

Лекция 11. Линейные операторы. Изоморфизмы линейных пространств

Замечание. Пусть F_1, F_2 — функции. Очевидно:

$$\mathrm{D}(F_2 \circ F_1) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)\big\} \subseteq \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1)\big\} = \mathrm{D}(F_1);$$
$$\mathrm{D}(F_2 \circ F_1) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)\big\} = \mathrm{D}\big(F_1, \mathrm{D}(F_2)\big);$$
$$\mathrm{R}(F_2 \circ F_1) = (F_2 \circ F_1)\big[\mathrm{D}(F_1)\big] = F_2\Big[F_1\big[\mathrm{D}(F_1)\big]\Big] \subseteq \mathrm{R}(F_2);$$
$$\mathrm{R}(F_2 \circ F_1) = (F_2 \circ F_1)\big[\mathrm{D}(F_1)\big] = F_2\Big[F_1\big[\mathrm{D}(F_1)\big]\Big] = F_2\big[\mathrm{R}(F_1)\big].$$

Пусть: F_1, F_2 — функции, $\mathrm{R}(F_1) \subseteq \mathrm{D}(F_2)$. Тогда:

$$\mathrm{D}(F_2 \circ F_1) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1) \wedge F_1(x) \in \mathrm{D}(F_2)\big\} = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(F_1)\big\} = \mathrm{D}(F_1).$$

Пусть: F_1, F_2 — функции, $\mathrm{D}(F_2) \subseteq \mathrm{R}(F_1)$. Тогда:

$$\mathrm{R}(F_2 \circ F_1) = F_2\big[\mathrm{R}(F_1)\big] = \mathrm{R}(F_2).$$

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть $A\colon L_1 \to L_2$. Будем говорить, что A — линейный оператор, если: $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1, $A(x+y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$; $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$.
2. Обозначим через $\mathrm{lin}(L_1, L_2)$ множество всех функций A, удовлетворяющих условиям: $A\colon L_1 \to L_2$, A — линейный оператор.
3. Обозначим через $\mathrm{Lin}(L_1, L_2)$ множество всех функций A, удовлетворяющих условиям: $A\colon L_1 \implies L_2$, A — линейный оператор.
4. Будем говорить, что A — изоморфизм пространства L_1 на пространство L_2, если: A — обратимая функция, $\mathrm{D}(A) = L_1$, $\mathrm{R}(A) = L_2$, $A(x+y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in L_1$; $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$.
5. Будем писать $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$, если A — изоморфизм пространства L_1 на пространство L_2. Утверждение $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$ можно читать: «пространство L_1 изоморфно пространству L_2 относительно функции A».
6. Будем писать $L_1 \approx L_2$ если $\exists A(L_1 \overset{A}{\approx} L_2)$. Утверждение $L_1 \approx L_2$ читается: «пространство L_1 изоморфно пространству L_2».

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A\colon L_1 \implies L_2$.

Пусть A — линейный оператор. Тогда: $A(x+y) = A(x)+A(y)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$; $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$. Так как $\mathrm{D}(A) = L_1$, то: $A(x+y) = A(x)+A(y)$ при x, $y \in L_1$; $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$.

Пусть: $A(x+y) = A(x)+A(y)$ при x, $y \in L_1$; $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Так как $\mathrm{D}(A) = L_1$, то: $A(x+y) = A(x)+A(y)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$; $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$. Так как $\mathrm{D}(A) = L_1$, то $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1. Итак, A — линейный оператор.

Замечание (примеры линейных операторов). Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$.

1. Пусть L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$. Обозначим: $\Theta(x) = \theta_2$ при $x \in L_1$. Докажем, что $\Theta \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Очевидно, $\Theta\colon L_1 \implies L_2$.
   Пусть x, $y \in L_1$. Тогда: $\Theta(x+y) = \theta_2 = \theta_2 + \theta_2 = \Theta(x) + \Theta(y)$.
   Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда: $\Theta(\lambda x) = \theta_2 = \lambda\theta_2 = \lambda\Theta(x)$.
   Итак, $\Theta \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$.
2. Пусть L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Обозначим: $I(x) = x$ при $x \in L$. Докажем, что $L \overset{I}{\approx} L$. Очевидно: I — обратимая функция, $\mathrm{D}(I) = L$, $\mathrm{R}(I) = L$.
   Пусть x, $y \in L$. Тогда: $I(x+y) = x+y = I(x)+I(y)$.
   Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L$. Тогда: $I(\lambda x) = \lambda x = \lambda I(x)$.
   Итак, $L \overset{I}{\approx} L$.
3. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L. Обозначим: $h_e(x) = [x](e)$ при $x \in L$. Докажем, что $L \overset{h_e}{\approx} \mathbb{K}^N$. Очевидно: h_e — обратимая функция, $\mathrm{D}(h_e) = L$, $\mathrm{R}(h_e) = \mathbb{K}^N$.
   Пусть x, $y \in L$. Тогда: $h_e(x+y) = [x+y](e) = [x](e)+[y](e) = h_e(x)+h_e(y)$.
   Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L$. Тогда: $h_e(\lambda x) = [\lambda x](e) = \lambda[x](e) = \lambda h_e(x)$.
   Итак, $L \overset{h_e}{\approx} \mathbb{K}^N$.
4. Пусть: N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Обозначим: $\hat{A}(x) = Ax$ при $x \in \mathbb{K}^{N_1}$. Будем говорить, что $\hat{A}$ — оператор умножения на матрицу A. Докажем, что $\hat{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{N_1}, \mathbb{K}^{N_2})$. Очевидно, $\hat{A}\colon \mathbb{K}^{N_1} \implies \mathbb{K}^{N_2}$.
   Пусть x, $y \in \mathbb{K}^{N_1}$. Тогда: $\hat{A}(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = \hat{A}(x) + \hat{A}(y)$.
   Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}^{N_1}$. Тогда: $\hat{A}(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda\hat{A}(x)$.
   Итак, $\hat{A} \in \mathrm{Lin}(\mathbb{K}^{N_1}, \mathbb{K}^{N_2})$.
   Очевидно:

$$\mathrm{R}(\hat{A}) = \bigl\{\hat{A}(x)\colon x \in \mathbb{K}^{N_1}\bigr\} = \{Ax\colon x \in \mathbb{K}^{N_1}\} = \\ = \{A_1x^1 + \dots + A_{N_1}x^{N_1}\colon x^1 \in \mathbb{K} \wedge \dots \wedge x^{N_1} \in \mathbb{K}\} = L(A_1, \dots, A_{N_1}).$$

Тогда: $\mathrm{R}(\hat{A})$ — подпространство пространства $\mathbb{K}^{N_2}$,

$$\dim\bigl(\mathrm{R}(\hat{A})\bigr) = \dim\bigl(L(A_1, \dots, A_{N_1})\bigr) = \mathrm{rank}(A).$$

5. Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$; $k = \overline{1, N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$, $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{K}$. Обозначим:

$$A(x) = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{k-1} \\ x^k + \sum\limits_{m=\overline{1,N},\, m \neq k} \lambda_m x^m \\ x^{k+1} \\ \vdots \\ x^N \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{K}^N.$$

Очевидно, $\mathbb{K}^N \overset{A}{\approx} \mathbb{K}^N$.

6. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; $k = \overline{1, N}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$. Обозначим:

$$A(x) = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{k-1} \\ \lambda x^k \\ x^{k+1} \\ \vdots \\ x^N \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{K}^N.$$

Очевидно, $\mathbb{K}^N \overset{A}{\approx} \mathbb{K}^N$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*;* $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$*.*

1. Справедливы утверждения: $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$*,* $A\theta_1 = \theta_2$*.*

2. Пусть Q *— подпространство пространства* L_2*. Тогда* $\mathrm{D}(A, Q)$ *— подпространство пространства* L_1*.*

Справедливо утверждение: $\ker(A)$ *— подпространство пространства* L_1*.*

3. Пусть Q *— подпространство пространства* L_1*. Тогда* $A[Q]$ *— подпространство пространства* L_2*.*

Справедливо утверждение: $\mathrm{R}(A)$ *— подпространство пространства* L_2*.*

4. Пусть Q *— подпространство пространства* L_1*. Тогда:* $A|_Q \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$*,* $\ker(A|_Q) = Q \cap \ker(A)$*.*

5. Пусть: $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r \in \mathrm{D}(A)$*. Пусть* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно зависимые векторы. Тогда* $Ax_1, \ldots, Ax_r$ *— линейно зависимые векторы.*

6. Пусть $Q \subseteq L_1$*. Тогда* $\operatorname{rank}\bigl(A[Q]\bigr) \leqslant \operatorname{rank}(Q)$*.*

Пусть Q *— подпространство пространства* L_1*. Тогда* $\dim\bigl(A[Q]\bigr) \leqslant \dim(Q)$*.*

Справедливо утверждение: $\dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) \leqslant \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr)$*.*

Доказательство.

1. Так как $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1, то $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$. Очевидно: $A\theta_1 = A(0\theta_1) = 0A(\theta_1) = \theta_2$.

2. Пусть Q — подпространство пространства L_2. Очевидно: $\mathrm{D}(A, Q) \subseteq \mathrm{D}(A) \subseteq L_1$. Так как: $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$, $A\theta_1 = \theta_2 \in Q$, то $\theta_1 \in \mathrm{D}(A, Q)$.

Пусть x_1, $x_2 \in \mathrm{D}(A, Q)$. Тогда: x_1, $x_2 \in \mathrm{D}(A)$, Ax_1, $Ax_2 \in Q$. Следовательно: $x_1 + x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 \in Q$. Тогда $x_1 + x_2 \in \mathrm{D}(A, Q)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A, Q)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(A)$, $Ax \in Q$. Следовательно: $\lambda x \in \mathrm{D}(A)$, $A(\lambda x) = \lambda A(x) \in Q$. Тогда $\lambda x \in \mathrm{D}(A, Q)$.

Итак, $\mathrm{D}(A, Q)$ — подпространство пространства L_1.

Так как: $\{\theta_2\}$ — подпространство пространства L_2, $\ker(A) = \mathrm{D}\big(A, \{\theta_2\}\big)$, то $\ker(A)$ — подпространство пространства L_1.

3. Пусть Q — подпространство пространства L_1. Очевидно: $A[Q] \subseteq \mathrm{R}(A) \subseteq L_2$. Так как: $\theta_1 \in Q$, $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$, то $A\theta_1 \in A[Q]$.

Пусть y_1, $y_2 \in A[Q]$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: x_1, $x_2 \in Q$, x_1, $x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2$. Следовательно: $x_1 + x_2 \in Q$, $x_1 + x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $y_1 + y_2 = Ax_1 + Ax_2 = A(x_1 + x_2)$. Тогда $y_1 + y_2 \in A[Q]$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $y \in A[Q]$. Тогда существует вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in Q$, $x \in \mathrm{D}(A)$, $y = Ax$. Следовательно: $\lambda x \in Q$, $\lambda x \in \mathrm{D}(A)$, $\lambda y = \lambda A(x) = A(\lambda x)$. Тогда $\lambda y \in A[Q]$.

Итак, $A[Q]$ — подпространство пространства L_2.

Так как: $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1, $\mathrm{R}(A) = A\big[\mathrm{D}(A)\big]$, то $\mathrm{R}(A)$ — подпространство пространства L_2.

4. Так как $A\colon L_1 \to L_2$, то $A|_Q : L_1 \to L_2$. Так как: Q, $\mathrm{D}(A)$ — подпространства пространства L_1, $\mathrm{D}(A|_Q) = Q \cap \mathrm{D}(A)$, то $\mathrm{D}(A|_Q)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть x, $y \in \mathrm{D}(A|_Q)$. Тогда: $A|_Q\,(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = A|_Q\,x + A|_Q\,y$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A|_Q)$. Тогда: $A|_Q\,(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda A(x) = \lambda\, A|_Q\,(x)$.

Итак, $A|_Q \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$.

Очевидно:

$$\ker(A|_Q) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A|_Q) \wedge A|_Q\,x = \theta_2\big\} = \big\{x\colon x \in Q \wedge x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax = \theta_2\big\} = \\ = \big\{x\colon x \in Q \wedge x \in \ker(A)\big\} = Q \cap \ker(A).$$

5. Так как $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы, то существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^k x_k = \theta_1$, $\exists k = \overline{1,r}(\lambda^k \neq 0)$. Тогда: $\lambda^k A(x_k) = A(\lambda^k x_k) = A\theta_1 = \theta_2$. Так как $\exists k = \overline{1,r}(\lambda^k \neq 0)$, то $Ax_1, \ldots, Ax_r$ — линейно зависимые векторы.

6. Пусть $Q \subseteq L_1$. Обозначим: $r_1 = \mathrm{rank}(Q)$, $r_2 = \mathrm{rank}\big(A[Q]\big)$. Тогда r_1, $r_2 \in \overline{\mathbb{Z}}_+$. Предположим, что $r_1 < r_2$. Тогда: $r_1 \in \mathbb{Z}_+$, $r_2 \in \overline{\mathbb{N}}$. Так как: $\mathrm{rank}\big(A[Q]\big) = r_2$, $r_1 + 1 \leqslant r_2$, то существуют векторы $y_1, \ldots, y_{r_1+1}$, удовлетворяющие условиям: $y_1, \ldots, y_{r_1+1} \in A[Q]$, $y_1, \ldots, y_{r_1+1}$ — линейно независимые векторы. Пусть $k = \overline{1, r_1 + 1}$. Так как $y_k \in A[Q]$, то существует вектор x_k, удовлетворяющий условиям: $x_k \in Q$, $x_k \in \mathrm{D}(A)$, $y_k = Ax_k$. Так как: $\mathrm{rank}(Q) = r_1$, $x_1, \ldots, x_{r_1+1} \in Q$, то $x_1, \ldots, x_{r_1+1}$ — линейно зависимые векторы. Так как: $x_1, \ldots, x_{r_1+1} \in \mathrm{D}(A)$, $y_1 = Ax_1, \ldots, y_{r_1+1} = Ax_{r_1+1}$, то $y_1, \ldots, y_{r_1+1}$ — линейно зависимые векторы (что противоречит утверждению: $y_1, \ldots, y_{r_1+1}$ — линейно независимые векторы). Итак, $r_2 \leqslant r_1$.

Пусть Q — подпространство пространства L_1. Тогда $A[Q]$ — подпространство пространства L_2. Так как $Q \subseteq L_1$, то $\mathrm{rank}\big(A[Q]\big) \leqslant \mathrm{rank}(Q)$. Так как: Q — подпространство пространства L_1, $A[Q]$ — подпространство пространства L_2, то $\dim\big(A[Q]\big) \leqslant \dim(Q)$.

Так как: $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1, $\mathrm{R}(A) = A\big[\mathrm{D}(A)\big]$, то $\dim\big(\mathrm{R}(A)\big) \leqslant \dim\big(\mathrm{D}(A)\big)$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$. Обозначим, $\mathrm{rank}(A) = \dim\big(\mathrm{R}(A)\big)$. Тогда:

$$\mathrm{rank}(A) = \dim\big(\mathrm{R}(A)\big) \leqslant \dim(L_2);$$
$$\mathrm{rank}(A) = \dim\big(\mathrm{R}(A)\big) \leqslant \dim\big(\mathrm{D}(A)\big) \leqslant \dim(L_1).$$

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2, L_3 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, $B \in \operatorname{lin}(L_2, L_3)$. Обозначим, $BA = B \circ A$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2*,* L_3 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*.*

Пусть: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$*,* $B \in \operatorname{lin}(L_2, L_3)$*. Тогда* $BA \in \operatorname{lin}(L_1, L_3)$*.*

Пусть: $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$*,* $B \in \operatorname{Lin}(L_2, L_3)$*. Тогда* $BA \in \operatorname{Lin}(L_1, L_3)$*.*

Пусть: $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$*,* $L_2 \overset{B}{\approx} L_3$*. Тогда* $L_1 \overset{BA}{\approx} L_3$*.*

Доказательство. Пусть: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, $B \in \operatorname{lin}(L_2, L_3)$. Так как: $A\colon L_1 \to L_2$, $B\colon L_2 \to L_3$, то $BA\colon L_1 \to L_3$. Так как: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, $\mathrm{D}(B)$ — подпространство пространства L_2, $\mathrm{D}(BA) = \mathrm{D}\big(A, \mathrm{D}(B)\big)$, то $\mathrm{D}(BA)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть x_1, $x_2 \in \mathrm{D}(BA)$. Тогда:

$$(BA)(x_1 + x_2) = B\big(A(x_1 + x_2)\big) = B(Ax_1 + Ax_2) = B(Ax_1) + B(Ax_2) = (BA)x_1 + (BA)x_2.$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$. Тогда:

$$(BA)(\lambda x) = B\big(A(\lambda x)\big) = B\big(\lambda A(x)\big) = \lambda B(Ax) = \lambda (BA)(x).$$

Итак, $BA \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$.

Пусть: $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$, $B \in \operatorname{Lin}(L_2, L_3)$. Так как: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, $B \in \operatorname{lin}(L_2, L_3)$, то $BA \in \operatorname{lin}(L_1, L_3)$. Так как: $\mathrm{R}(A) \subseteq L_2 = \mathrm{D}(B)$, то: $\mathrm{D}(BA) = \mathrm{D}(A) = L_1$. Тогда $BA \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$.

Пусть: $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$, $L_2 \overset{B}{\approx} L_3$. Так как: $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$, $B \in \operatorname{Lin}(L_2, L_3)$, то $BA \in \operatorname{Lin}(L_1, L_3)$. Так как: $\mathrm{D}(B) = L_2 \subseteq L_2 = \mathrm{R}(A)$, то: $\mathrm{R}(BA) = \mathrm{R}(B) = L_3$. Так как A, B — обратимые функции, то BA — обратимая функция. Тогда $L_1 \overset{BA}{\approx} L_3$. □

Утверждение (критерий обратимости линейного оператора)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*;* $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$*. Оператор* A *является обратимым тогда и только тогда, когда* $\ker(A) = \{\theta_1\}$*.*

Доказательство.

1. Пусть A — обратимый оператор. Так как: $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$, $A\theta_1 = \theta_2$, то $\theta_1 \in \ker(A)$. Пусть $x \in \ker(A)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(A)$, $Ax = \theta_2$. Так как: $\theta_1 \in \mathrm{D}(A)$, $A\theta_1 = \theta_2$, A — обратимый оператор, то $x = \theta_1$. Итак, $\ker(A) = \{\theta_1\}$.
2. Пусть $\ker(A) = \{\theta_1\}$. Пусть: x_1, $x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $Ax_1 = Ax_2$. Тогда: $x_1 - x_2 \in \mathrm{D}(A)$, $A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = \theta_2$. Следовательно, $x_1 - x_2 \in \ker(A)$. Так как $\ker(A) = \{\theta_1\}$, то $x_1 - x_2 = \theta_1$. Тогда $x_1 = x_2$. Итак, A — обратимый оператор. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*.*

1. Пусть: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$*,* A *— обратимый оператор. Тогда:* $A^{-1} \in \operatorname{lin}(L_2, L_1)$*,* A^{-1} *— обратимый оператор.*

Пусть $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$*. Тогда* $L_2 \overset{A^{-1}}{\approx} L_1$*.*

2. Пусть: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$*,* A *— обратимый оператор,* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r \in \mathrm{D}(A)$*. Векторы* $x_1, \ldots, x_r$ *являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда векторы* $Ax_1, \ldots, Ax_r$ *являются линейно зависимыми.*

3. Пусть: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор, $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$. Тогда $\operatorname{rank}\big(A[Q]\big) = \operatorname{rank}(Q)$.

Пусть: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор, $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, Q — подпространство пространства L_1. Тогда $\dim\big(A[Q]\big) = \dim(Q)$.

Пусть: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор. Тогда $\dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim\big(\mathrm{D}(A)\big)$.

Пусть $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$. Тогда $\dim(L_1) = \dim(L_2)$.

Доказательство.

1. Пусть: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор. Так как $A\colon L_1 \to L_2$, то $A^{-1}\colon L_2 \to L_1$. Так как: $\mathrm{R}(A)$ — подпространство пространства L_2, $\mathrm{D}(A^{-1}) = \mathrm{R}(A)$, то $\mathrm{D}(A^{-1})$ — подпространство пространства L_2.

Пусть y_1, $y_2 \in \mathrm{R}(A)$. Тогда:

$$A^{-1}(y_1 + y_2) = A^{-1}\big(A(A^{-1}y_1) + A(A^{-1}y_2)\big) = A^{-1}\big(A(A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2)\big) = A^{-1}y_1 + A^{-1}y_2.$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $y \in \mathrm{R}(A)$. Тогда:

$$A^{-1}(\lambda y) = A^{-1}\big(\lambda A(A^{-1}y)\big) = A^{-1}\Big(A\big(\lambda A^{-1}(y)\big)\Big) = \lambda A^{-1}(y).$$

Итак, $A^{-1} \in \operatorname{lin}(L_2, L_1)$. Очевидно, A^{-1} — обратимый оператор.

Пусть $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$. Так как: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор, то: $A^{-1} \in \operatorname{lin}(L_2, L_1)$, A^{-1} — обратимый оператор. Так как: $\mathrm{R}(A) = L_2$, $\mathrm{D}(A) = L_1$, то: $\mathrm{D}(A^{-1}) = \mathrm{R}(A) = L_2$, $\mathrm{R}(A^{-1}) = \mathrm{D}(A) = L_1$. Тогда $L_2 \overset{A^{-1}}{\approx} L_1$.

2. Пусть $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы. Так как: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, $x_1, \ldots, x_r \in \mathrm{D}(A)$, то $Ax_1, \ldots, Ax_r$ — линейно зависимые векторы.

Пусть $Ax_1, \ldots, Ax_r$ — линейно зависимые векторы. Пусть $k = \overline{1, r}$. Так как $x_k \in \mathrm{D}(A)$, то: $Ax_k \in \mathrm{R}(A)$, $x_k = A^{-1}(Ax_k)$. Так как: $A^{-1} \in \operatorname{lin}(L_2, L_1)$, $Ax_1, \ldots, Ax_r$ — линейно зависимые векторы, то $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы.

3. Пусть: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор, $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$. Так как: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, $Q \subseteq \mathrm{D}(A) \subseteq L_1$, то $\operatorname{rank}\big(A[Q]\big) \leqslant \operatorname{rank}(Q)$. Так как $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, то: $A[Q] \subseteq \mathrm{R}(A) \subseteq L_2$, $A^{-1}\big[A[Q]\big] = (A^{-1}A)[Q] = Q \cap \mathrm{D}(A) = Q$. Так как $A^{-1} \in \operatorname{lin}(L_2, L_1)$, то $\operatorname{rank}(Q) \leqslant \operatorname{rank}\big(A[Q]\big)$. Так как $\operatorname{rank}\big(A[Q]\big) \leqslant \operatorname{rank}(Q)$, то $\operatorname{rank}\big(A[Q]\big) = \operatorname{rank}(Q)$.

Пусть: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор, $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, Q — подпространство пространства L_1. Так как: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, Q — подпространство пространства L_1, то $A[Q]$ — подпространство пространства L_2. Так как: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор, $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, то $\operatorname{rank}\big(A[Q]\big) = \operatorname{rank}(Q)$. Так как: Q — подпространство пространства L_1, $A[Q]$ — подпространство пространства L_2, то $\dim\big(A[Q]\big) = \dim(Q)$.

Пусть: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор. Так как: $\mathrm{D}(A) \subseteq \mathrm{D}(A)$, $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1, $\mathrm{R}(A) = A\big[\mathrm{D}(A)\big]$, то $\dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim\big(\mathrm{D}(A)\big)$.

Пусть $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$. Так как: $A \in \operatorname{lin}(L_1, L_2)$, A — обратимый оператор, то $\dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim\big(\mathrm{D}(A)\big)$. Так как: $\mathrm{D}(A) = L_1$, $\mathrm{R}(A) = L_2$, то: $\dim(L_1) = \dim\big(\mathrm{D}(A)\big) = \dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim(L_2)$. □

Теорема. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $\dim(L_1) = \dim(L_2)$, $\dim(L_2) \neq +\infty$. Тогда $L_1 \approx L_2$.*

Доказательство. Обозначим, $N = \dim(L_2)$. Тогда: $N \in \mathbb{Z}_+$, $\dim(L_1) = N$.

Пусть $N = 0$. Так как $\dim(L_1)$, $\dim(L_2) = N$, то: $L_1 = \{\theta_1\}$, $L_2 = \{\theta_2\}$. Обозначим, $A(\theta_1) = \theta_2$. Тогда $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$.

Пусть $N \neq 0$. Тогда $N \in \mathbb{N}$. Так как $\dim(L_1)$, $\dim(L_2) = N$, то существуют векторы $e_1, \dots, e_N$, $f_1, \dots, f_N$, удовлетворяющие условиям: $e_1, \dots, e_N$ — базис пространства L_1, $f_1, \dots, f_N$ — базис пространства L_2. Тогда: $L_1 \overset{h_e}{\approx} \mathbb{K}^N$, $L_2 \overset{h_f}{\approx} \mathbb{K}^N$. Следовательно: $L_1 \overset{h_e}{\approx} \mathbb{K}^N$, $\mathbb{K}^N \overset{h_f^{-1}}{\approx} L_2$. Тогда $L_1 \overset{h_f^{-1}h_e}{\approx} L_2$. □

Замечание (метод Гаусса—Жордана для нахождения ранга, базисных столбцов, базисных строк матрицы). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Пусть $A = \Theta$. Тогда: $\operatorname{rank}(A) = 0$, у матрицы A нет базисных столбцов, у матрицы A нет базисных строк. Пусть $A \neq \Theta$. Обозначим, $B_0 = A$. Тогда: $B_0 \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $B_0 \neq \Theta$.

Выберем числа $i_1 = \overline{1, N_1}$, $j_1 = \overline{1, N_2}$, удовлетворяющие условию $(B_0)_{i_1}^{j_1} \neq 0$. Обнулим элементы, стоящие над элементом $(B_0)_{i_1}^{j_1}$, обнулим элементы, стоящие под элементом $(B_0)_{i_1}^{j_1}$. Получим матрицу $B_1 \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, удовлетворяющую условиям: $(B_1)_{i_1}^{j_1} \neq 0$, $(B_1)_{i_1}^{j} = 0$ при: $j = \overline{1, N_2}$, $j \neq j_1$. Пусть матрица B_1 содержит ровно одну ненулевую строку. Остановим процесс. Пусть матрица B_1 содержит, по крайней мере, две ненулевые строки. Перейдём к следующему шагу.

Выберем числа $i_2 = \overline{1, N_1}$, $j_2 = \overline{1, N_2}$, удовлетворяющие условиям: $j_2 \neq j_1$, $(B_1)_{i_2}^{j_2} \neq 0$. Очевидно, $i_2 \neq i_1$. Тогда: i_1, $i_2 = \overline{1, N_1}$, i_1, i_2 — различные числа, j_1, $j_2 = \overline{1, N_2}$, j_1, j_2 — различные числа. Обнулим элементы, стоящие над элементом $(B_1)_{i_2}^{j_2}$, обнулим элементы, стоящие под элементом $(B_1)_{i_2}^{j_2}$. Получим матрицу $B_2 \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, удовлетворяющую условиям: $(B_2)_{i_k}^{j_k} \neq 0$, $(B_2)_{i_k}^{j} = 0$ при: $k = 1, 2$, $j = \overline{1, N_2}$, $j \neq j_k$. Пусть матрица B_2 содержит ровно две ненулевые строки. Остановим процесс. Пусть матрица B_2 содержит, по крайней мере, три ненулевые строки. Перейдём к следующему шагу.

Продолжая рассуждения, получим число $r = \overline{1, \min\{N_1, N_2\}}$, получим числа $i_1, \dots, i_r = \overline{1, N_1}$, $j_1, \dots, j_r = \overline{1, N_2}$, получим матрицу $B_r \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, удовлетворяющую условиям: $i_1, \dots, i_r$ — различные числа, $j_1, \dots, j_r$ — различные числа, $(B_r)_{i_k}^{j_k} \neq 0$, $(B_r)_{i_k}^{j} = 0$ при: $k = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, N_2}$, $j \neq j_k$; матрица B_r содержит ровно r ненулевых строк. Очевидно, $(B_r)_{i_1}, \dots, (B_r)_{i_r}$ — базисные столбцы матрицы B_r. Тогда $\operatorname{rank}(B_r) = r$. Так как $(B_r)_{i_1}, \dots, (B_r)_{i_r}$ — линейно независимые столбцы, то $\det\Big(\big\{(B_r)_{i_k}^{j_m}\big\}_{k=\overline{1,r}}^{m=\overline{1,r}}\Big) \neq 0$.

Очевидно:

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B_0) = \dots = \operatorname{rank}(B_r) = r;$$
$$\det\Big(\big\{A_{i_k}^{j_m}\big\}_{k=\overline{1,r}}^{m=\overline{1,r}}\Big) = \det\Big(\big\{(B_0)_{i_k}^{j_m}\big\}_{k=\overline{1,r}}^{m=\overline{1,r}}\Big) = \dots = \det\Big(\big\{(B_r)_{i_k}^{j_m}\big\}_{k=\overline{1,r}}^{m=\overline{1,r}}\Big) \neq 0.$$

Так как $\det\Big(\big\{A_{i_k}^{j_m}\big\}_{k=\overline{1,r}}^{m=\overline{1,r}}\Big) \neq 0$, то: $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ — линейно независимые столбцы, $A^{j_1}, \dots, A^{j_r}$ — линейно независимые строки. Так как $\operatorname{rank}(A) = r$, то: $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ — базисные столбцы матрицы A; $A^{j_1}, \dots, A^{j_r}$ — базисные строки матрицы A.

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Крутицкая Н. Ч., Тихонравов А. В., Шишкин А. А.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра с приложениями.

[4] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[5] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия.

[6] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[7] *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии.