Глава 15. Скалярные и векторные поля

15.1 Основные понятия и формулы

1. Скалярное поле. Пусть G — область в трёхмерном пространстве или на плоскости. Если каждой точке M области G поставлено в соответствие некоторое число $u(M)$, то говорят, что в области G задано скалярное поле.

Физические примеры скалярных полей: поле температур какого-либо тела; поле плотности зарядов на какой-либо поверхности. Физические векторные поле не зависят от выбора системы координат: величина $u(M)$ зависит только от точки M и, быть может, от времени (нестационарное поле).

Если ~~ввес~~ ввести в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$, то скалярное поле будет описываться функцией трёх переменных: $u = u(x, y, z)$, $(x, y, z) \in G$. Поверхность, заданная уравнением $u(x, y, z) = c = const$ (т.е. поверхность, на которой функция $u(x, y, z)$ принимает постоянное значение), называется поверхностью уровня данного скалярного поля.

2. Векторное поле. Если каждой точке M области G поставлен в соответствие некоторый вектор $\vec{a}(M)$, то говорят, что в области G задано векторное поле.

Физические примеры векторных полей: электрическое поле, создаваемое системой ~~[illegible]~~ электрических зарядов, характеризуется в каждой точке M вектором напряжённости $\vec{E}(M)$; магнитное поле, создаваемое электрическим током, характеризуется в каждой точке M вектором магнитной индукции

$\vec{B}(M)$; поле тяготения, создаваемое системой масс, характеризуется в каждой точке M вектором силы $\vec{F}(M)$, которая действует на помещённую в точку M единичную массу; поле скоростей потока жидкости характеризуется в каждой точке M вектором скорости $\vec{v}(M)$.

При фиксированной системе координат $Oxyz$ векторное поле задаётся вектор-функцией трёх переменных $\vec{a}(x,y,z)$ или тремя скалярными функциями — её координатами:

$$\vec{a}(x,y,z) = \{P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\}.$$

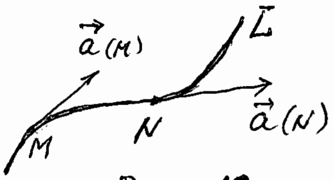


Рис. 15.1

Кривая L называется векторной линией векторного поля $\vec{a}(M)$, если в каждой точке M кривой L вектор $\vec{a}(M)$ направлен по касательной к этой кривой (рис. 16.1). Для электрического и магнитного полей, а также для поля тяготения векторные линии называются силовыми линиями, для поля скоростей — линиями тока.

В дальнейшем, не оговаривая это каждый раз, будем считать, что функции, задающие скалярное или векторное поле, имеют непрерывные частные производные первого (а если нужно, то и второго) порядка.

3. Производная по направлению и градиент скалярного поля.

Для скалярного поля (скалярной функции) $u(x,y,z)$ в главе 9 были введены понятия производной по направлению и градиента в данной точке M:

$$\operatorname{grad} u(M)=\left\{\frac{\partial u}{\partial x}(M), \frac{\partial u}{\partial y}(M), \frac{\partial u}{\partial z}(M)\right\}=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

$$\frac{\partial u}{\partial e}(M)=(\operatorname{grad} u(M)\cdot\vec{e})=\frac{\partial u}{\partial x}(M)\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}(M)\cos\beta+$$
$$+\frac{\partial u}{\partial z}(M)\cos\gamma,$$

где $\vec{e}=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ — единичный вектор заданного направления.

Данное определение градиента связано с выбором системы координат. Однако было показано, что на самом деле вектор $\operatorname{grad} u$ не зависит от выбора системы координат, поскольку его направление (в данной точке) есть направление наибольшего роста функции в этой точке, а $|\operatorname{grad} u|$ есть скорость роста поля $u(M)$ в этой точке. Если ввести другую систему координат, то координаты вектора $\operatorname{grad} u$ изменятся, но сам вектор, т.е. его длина и направление, останутся без изменений.

<u>4. Дивергенция</u>. <u>Дивергенцией</u> векторного поля $\vec{a}=\{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ называется скалярная функция

$$\operatorname{div}\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

Это определение связано с выбором системы координат. Ниже мы покажем, что на самом деле $\operatorname{div}\vec{a}$ не зависит от выбора системы координат, т.е. её величина для данной точки M не зависит от того, в какой системе координат рассматривается точка M.

Пример 1. Рассмотрим электрическое поле точечного заряда e, помещённого в начале координат (рис. 15.2):

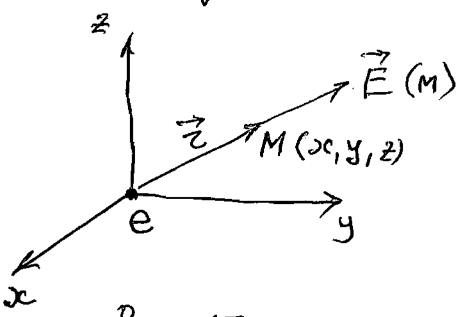


Рис. 15.2

$$\vec{E}(M)=\frac{ke}{r^3}\vec{r},\ \text{где } \vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},$$

$$r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2};$$

$$\operatorname{div}\vec{E}=ke\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right].$$

Вычислив частные производные, получим: $\operatorname{div}\vec{E}=0$ при $r\neq 0$, $\operatorname{div}\vec{E}=\infty$ при $r=0$.

Ниже мы покажем, что $\operatorname{div}\vec{a}(M)$ характеризует плотность источников векторного поля $\vec{a}(M)$ в данной точке M. Этому вполне соответствует полученный результат для $\operatorname{div}\vec{E}$.

5. Ротор. Ротором (или вихрем) векторного поля $\vec{a}=\{P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)\}$ называется вектор-функция

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Ниже будет показано, что: 1) $\operatorname{rot}\vec{a}$ также не зависит от выбора системы координат; 2) $\operatorname{rot}\vec{a}(M)$ характеризует завихрённость векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке M.

Задание: вычислить $\operatorname{rot}\vec{E}$, где $\vec{E}(M)$ – напряженность электрического поля точечного заряда.

Рассмотренные функции $\operatorname{grad} u$ (для скалярного поля $u(M)$), $\operatorname{div}\vec{a}$ и $\operatorname{rot}\vec{a}$ (для векторного поля $\vec{a}(M)$) характеризуют соответствующее поле в каждой точке M, т.е. являются локальными характеристиками. Рассмотрим теперь две интегральные характеристики векторных полей, (и инвариантное определение дивергенции.)

6. Поток векторного поля. Пусть в области G задано векторное поле $\vec{a} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ и пусть Φ — гладкая двусторонняя поверхность, лежащая в области G. Выберем одну из сторон поверхности, зафиксировав непрерывное векторное поле единичных нормалей $\vec{n}(M) = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

Поверхностный интеграл второго рода по выбранной стороне поверхности Φ

$$\iint_{\Phi} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds = \iint_{\Phi} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds$$

называется потоком векторного поля $\vec{a}(M)$ через выбранную сторону поверхности Φ. Так как векторы $\vec{a}(M)$ и $\vec{n}(M)$, а также поверхность Φ, не зависят от выбора системы координат, то и поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через выбранную сторону поверхности не зависит от выбора системы координат.

Если $\vec{a}(M) = \vec{v}(M)$ — скорость движущейся жидкости в точке M, то $\iint_{\Phi}(\vec{v}\cdot\vec{n})\,ds$ представляет собой количество (объём) жидкости, протекающей через поверхность Φ за единицу времени в выбранном направлении. Эта величина называется в физике потоком жидкости через поверхность Φ, поэтому название "поток" используется и в случае произвольного векторного поля $\vec{a}(M)$.

Пример 2. Вычислим поток векторного поля $\vec{E}(M)$ через внешнюю сторону сферы Φ радиуса R с центром в начале координат (точке O), где $\vec{E}(M)$ — напряжённость электрического поля точечного заряда e, помещённого в точке O (рис. 15.3).

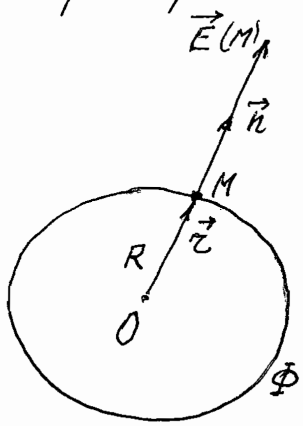


Рис. 15.3

Пусть $e>0$, тогда вектор $\vec{E}(M)$ направлен так, как показано на рис. 15.3,

$$|\vec{r}| = |\vec{OM}| = R, \quad \vec{E}(M) = \frac{ke}{R^3}\vec{r}, \quad (\vec{r}\cdot\vec{n}) = R,$$

поэтому

$$\iint_{\Phi} (\vec{E}\cdot\vec{n})\,dS = \iint_{\Phi} \frac{ke}{R^3}(\vec{r}\cdot\vec{n})\,ds = \frac{ke}{R^2}\iint_{\Phi} ds = \frac{ke}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = 4\pi ke.$$

Пусть Φ — гладкая замкнутая поверхность, ограничивающая область G, в которой задано векторное поле $\vec{a} = \{P, Q, R\}$, и пусть $\vec{n}(M) = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности Φ в точке M. Запишем формулу Остроградского-Гаусса

$$\iiint_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint_{\Phi} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds$$

в компактной векторной форме

$$\iiint_{G} \operatorname{div}\vec{a}\cdot dV = \iint_{\Phi} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds. \qquad (15.1)$$

Формула (15.1) означает, что поток векторного поля через замкнутую поверхность в направлении внешней нормали к поверхности равен тройному интегралу от дивергенции векторного поля по области, ограниченной этой поверхностью.

Применим к тройному интегралу в левой

части равенства (15.1) формулу среднего значения:

$$\iiint\limits_G \operatorname{div}\vec{a}\cdot dV = \operatorname{div}\vec{a}(M^*)\cdot\iiint\limits_G dV = \operatorname{div}\vec{a}(M^*)\cdot V(G),$$

где M^* — некоторая точка области G, $V(G)$ — объём области G. Равенство (15.1) можно теперь записать в виде

$$\operatorname{div}\vec{a}(M^*) = \frac{\iint\limits_\Phi (\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds}{V(G)}. \qquad (15.2)$$

Зафиксируем какую-нибудь точку M области G и будем стягивать область G к точке M так, чтобы точка M оставалась точкой сжимающейся области G, а (стягивающаяся) поверхность Φ оставалась гладкой. Тогда $V(G)\to 0$, $M^*\to M$, а так как $\operatorname{div}\vec{a}$ — непрерывная функция, то $\operatorname{div}\vec{a}(M_*)\to\operatorname{div}\vec{a}(M)$. Поэтому из равенства (15.2) получим:

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \lim_{\substack{V(G)\to 0\\ M\in G}} \frac{\iint\limits_\Phi (\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds}{V(G)}. \qquad (15.3)$$

Так как поток векторного поля и объём области не зависят от выбора системы координат, то правая часть равенства (15.3) и, следовательно, $\operatorname{div}\vec{a}(M)$ не зависит от выбора системы координат. Таким образом, формула (15.3) даёт инвариантное определение дивергенции векторного поля.

Если $\vec{a}(M) = \vec{v}(M)$ – скорость течения жидкости, то дробь $\dfrac{\oint\!\!\oint_{\Phi} (\vec{v}\cdot\vec{n})\,ds}{V(G)}$ даёт среднее количество (объём) жидкости, вытекающей (либо втекающей) за единицу времени из единицы объёма области G. Естественно назвать эту величину (средней) плотностью источников жидкости в области G. (По аналогии,) в случае произвольного векторного поля $\vec{a}(M)$ дробь $\dfrac{\oint\!\!\oint_{\Phi} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds}{V(G)}$ можно назвать средней плотностью источников векторного поля $\vec{a}(M)$ в области G, а предел этой средней плотности при стягивании области G к точке M, (т.е. $\operatorname{div}\vec{a}(M)$,) есть плотность источников поля $\vec{a}(M)$ в точке M.

Указанный физический смысл дивергенции векторного поля особенно ярко проявляется в известных уравнениях Максвелла, имеющих (в системе СИ) вид:

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0.$$

Здесь $\vec{D}$ и $\vec{B}$ – векторы электрической и магнитной индукции, ρ – плотность электрических зарядов. Второе уравнение выражает факт отсутствия магнитных зарядов.

7. Циркуляция векторного поля и инвариантное определение ротора. Пусть в области G задано векторное поле $\vec{a} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ и пусть AB — кусочно-гладкая кривая, лежащая в области G (если кривая замкнутая, т.е. точки A и B совпадают, то нужно указать направление обхода кривой).

Криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

называется *циркуляцией* векторного поля $\vec{a}(M)$ вдоль кривой AB.

Введём вектор $\vec{dl} = \{dx, dy, dz\}$. Тогда циркуляцию можно записать в виде $\int\limits_{AB} (\vec{a}\cdot\vec{dl})$.

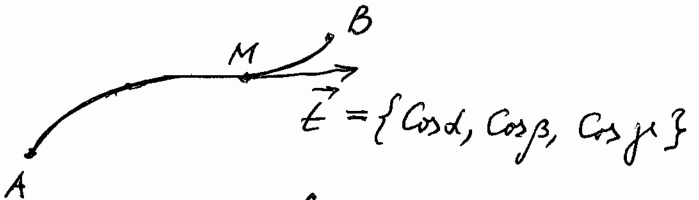


Рис. 15.4

Вектор $\vec{dl}$ направлен по касательной к кривой. Пусть $\vec{t} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ — единичный вектор направленной касательной (рис. 15.4). Тогда вектор $\vec{dl}$ можно представить в виде $\vec{dl} = \vec{t}\cdot dl$, где $dl = |\vec{dl}| = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$ — элемент длины кривой. Теперь циркуляцию можно записать в виде криволинейного интеграла первого рода

$$\int\limits_{AB} (\vec{a}\cdot\vec{dl}) = \int\limits_{AB} (\vec{a}\cdot\vec{t})\,dl = \int\limits_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dl.$$

Если $\vec{a}(M) = \vec{F}(M)$ — силовое векторное поле, то (циркуляция) $\int\limits_{AB} (\vec{F}\cdot\vec{dl})$ есть работа силового поля вдоль пути AB.

Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{t}$, (а также кривая AB,) не зависят от выбора системы координат, то и циркуляция векторного поля вдоль кривой AB не зависит от выбора системы координат.

Пусть L - замкнутый контур, являющийся границей поверхности Φ, лежащей в области G. Запишем формулу Стокса применительно к поверхности Φ в векторной форме

$$\oint_L (\vec{a} \cdot d\vec{l}) = \iint_\Phi (\operatorname{rot}\vec{a} \cdot \vec{n})\, dS. \qquad (15.4)$$

Здесь $\vec{n} = \vec{n}(M)$ - единичный вектор нормали к поверхности Φ в точке M на выбранной стороне поверхности, а направление обхода контура L согласовано с выбором стороны поверхности. Формула (15.4) означает, что циркуляция векторного поля вдоль замкнутого контура равна потоку ротора векторного поля через поверхность, границей которой является этот контур.

Зафиксируем какую-нибудь точку M области G, проведём через неё произвольную плоскость и рассмотрим гладкий замкнутый контур L, лежащий в этой плоскости и ограничивающий плоскую область Φ, такую, что точка M — точка этой области (рис. 15.5).

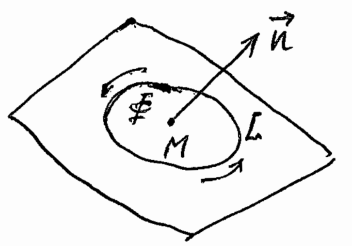


Рис. 15.5

Пусть $\vec{n}$ - единичный вектор нормали к плоскости и выбрано направление обхода контура L, соответствующее этому вектору нормали. Запишем формулу (15.4) для области Φ и применим к поверхностному интегралу в правой части равенства (15.4) формулу среднего значения:

$$\iint\limits_{\Phi} (\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds = (\operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n})_{M^*}\cdot\iint\limits_{\Phi} ds = (\operatorname{rot}\vec{a}(M^*)\cdot\vec{n})\cdot S(\Phi),$$

где M^* — некоторая точка области Φ, $S(\Phi)$ — площадь области Φ. Равенство (15.4) можно теперь записать в виде

$$(\operatorname{rot}\vec{a}(M^*)\cdot\vec{n}) = \frac{\oint\limits_{L}(\vec{a}\cdot d\vec{l})}{S(\Phi)}. \qquad (15.5)$$

Будем стягивать область Φ к точке M так, чтобы точка M оставалась ~~(   )~~ точкой стягивающейся области Φ, а стягивающийся контур L оставался гладким. Тогда $S(\Phi)\to 0$, $M^*\to M$, а так как $\operatorname{rot}\vec{a}$ — непрерывная функция, то $\operatorname{rot}\vec{a}(M^*)\to\operatorname{rot}\vec{a}(M)$. Поэтому из равенства (15.5) получим:

$$(\operatorname{rot}\vec{a}(M)\cdot\vec{n}) = \lim_{\substack{S(\Phi)\to 0\\ M\in\Phi}} \frac{\oint\limits_{L}(\vec{a}\cdot d\vec{l})}{S(\Phi)}. \qquad (15.6)$$

Так как циркуляция векторного поля и площадь области не зависят от выбора системы координат, то правая часть равенства (15.6) а, значит, и левая часть, которая представляет собой проекцию вектора $\operatorname{rot}\vec{a}(M)$ на направление, заданное вектором $\vec{n}$, не зависит от выбора системы координат. Таким образом, формула (15.6) даёт инвариантное определение проекции ротора векторного поля на произвольное направление: $\Pi p_{\vec{n}} \operatorname{rot}\vec{a}(M) = \lim\limits_{\substack{S(\Phi)\to 0\\ M\in\Phi}} \dfrac{\oint_L (\vec{a}\cdot d\vec{l})}{S(\Phi)}$. (15.7)

Итак, проекция ротора векторного поля $\vec{a}(M)$ на произвольное направление, а потому и сам $\operatorname{rot}\vec{a}$, зависит только от векторного поля $\vec{a}(M)$ и не зависит от выбора системы координат.

Чтобы определить вектор $\operatorname{rot}\vec{a}(M)$, пользуясь формулой (15.7), достаточно рассмотреть в точке M проекции $\operatorname{rot}\vec{a}(M)$ на три некомпланарных направления. Эти три проекции однозначно определяют вектор $\operatorname{rot}\vec{a}(M)$.

Формулы (15.5) и (15.7) позволяют понять, какое свойство векторного поля $\vec{a}(M)$ характеризует ротор этого векторного поля. Ясно, что интеграл $\oint_L (\vec{a}\cdot d\vec{l})$ будет иметь наибольшее значение в том случае, когда в каждой точке контура L вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{dl}$, т.е. вектор $\vec{a}$ направлен по касательной к контуру L (рис. 15.б). В этом

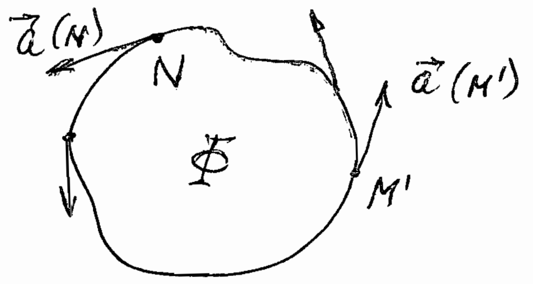


Рис. 15.б

случае вектор $\vec{a}$ поворачивается при движении по контуру L, т.е. возникает завихрённость векторного поля. Величина в правой части формулы (15.5) характеризует "среднюю завихрённость" векторного поля $\vec{a}$ в плоской области Ф, а предел этой "средней завихрённости", т.е. $Пр_{\vec{n}}\,\mathrm{rot}\,\vec{a}(M)$ характеризует завихрённость векторного поля $\vec{a}(M)$ на плоскости Ф в точке M. Таким образом, $\mathrm{rot}\,\vec{a}(M)$ характеризует завихрённость векторного поля $\vec{a}(M)$ в данной точке M.

Рассмотрим ещё два уравнения Максвелла, которые записываются с помощью ротора векторного поля:

$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ – это уравнение является обобщением закона Био – Савара и выражает тот факт, что магнитное поле $\vec{H}$ порождается токами проводимости ($\vec{j}$ – плотность тока) и токами смещения $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ($\vec{D}$ – электрическая индукция);

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ — это уравнение выражает закон электромагнитной индукции Фарадея и показывает, что одним из источников электрического поля является изменяющееся во времени магнитное поле.

15.2. Потенциальные векторные поля

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется потенциальным в области G, если его можно представить в этой области как градиент некоторого скалярного поля $u(M)$:

$$\vec{a}(M) = \mathrm{grad}\, u(M).$$

Функция $u(M)$ называется скалярным потенциалом векторного поля $\vec{a}(M)$.

Если векторное поле $\vec{a} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ потенциально в области G, т.е. $\vec{a} = \mathrm{grad}\, u = \{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\}$, то $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $R = \frac{\partial u}{\partial z}$. Следовательно, выражение

$$P dx + Q dy + R dz = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

является полным дифференциалом функции $u(x,y,z)$ в области G. Тем самым выполнено условие 3 теоремы об условиях независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования в пространстве (теорема 5 гл. 13). Из условия 3 следует выполнение условий 1, 2 и 4 этой теоремы. Поэтому потенциальное в области G векторное поле $\vec{a}(M)$ обладает следующими свойствами.

① Циркуляция потенциального поля $\vec{a}(M)$ вдоль любого замкнутого контура L, лежащего в области G, равна нулю:

$$\oint\limits_{L}(\vec{a}\cdot d\vec{l})=\oint\limits_{L}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0.$$

Иногда это свойство применяют в качестве определения потенциального поля.

② Для любых фиксированных точек A и B области G циркуляция потенциального поля $\vec{a}=$ $=\operatorname{grad}u$ вдоль кривой AB не зависит от выбора кривой AB и равна разности значений потенциала $u(M)$ в точках B и A:

$$\int\limits_{AB}(\vec{a}\cdot d\vec{l})=u(B)-u(A).$$

③ Для потенциального поля $\vec{a}=\{P,Q,R\}$ справедливы равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}. \qquad (15.8)$$

Из этих равенств следует, что $\operatorname{rot}\vec{a}=\operatorname{rot}\operatorname{grad}u=\vec{0}$, т.е. потенциальное поле является безвихревым.

Поставим вопрос: верно ли обратное, т.е. следует ли из условия $\operatorname{rot}\vec{a}=\vec{0}$, что векторное поле $\vec{a}=\{P,Q,R\}$ является потенциальным?

Ответ зависит от вида области. Если область G, в которой $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$, является поверхностно односвязной, то, согласно теореме 5 гл. 13, существует функция $u(x,y,z)$, такая, что $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, $R = \frac{\partial u}{\partial z}$, и, следовательно, $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \operatorname{grad} u$, т.е. векторное поле $\vec{a}(M)$ является потенциальным.

Если же область G не является поверхностно односвязной, то условие $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$ может быть выполнено во всех точках области G, а векторное поле $\vec{a}(M)$ не является потенциальным в области G.

<u>Пример.</u> $\vec{a}(x,y,z) = \{P, Q, R\}$, где $P = \frac{-y}{x^2+y^2}$,

$Q = \frac{x}{x^2+y^2}$, $R = 0$, $x^2+y^2 \neq 0$.

В качестве области G возьмём всё пространство с выброшенной осью Oz. (Эта область не является поверхностно односвязной.) Элементарно проверяется, что в любой точке области G выполнены равенства (15.8), откуда следует, что $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$ в области G.

Рассмотрим замкнутый контур

$$L = \{(x,y,z) : x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 0;\ 0 \le t \le 2\pi\} -$$

это окружность радиуса 1 с центром в начале координат, лежащая в плоскости Oxy. Очевидно, $L \subset G$.

Для этого контура L имеем:

$$\oint_L (\vec{a}\cdot d\vec{l}) = \oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \oint_L \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy\right) =$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\,d\cos t+\frac{\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\,d\sin t\right)=\int_0^{2\pi}dt=2\pi\neq 0.$$

Итак, $\oint\limits_L(\vec{a}\cdot d\vec{l})\neq 0$. Следовательно, данное векторное поле не является потенциальным в области G_π. Отметим, что в любой поверхностно односвязной области, например, в шаре, не пересекающемся с осью Oz, данное векторное поле является потенциальным.

<u>Физические примеры</u>. 1) Электрическое поле $\vec{E}(M)$ точечного заряда e, помещённого в начале координат, выражается формулой

$$\vec{E}(M)=\frac{ke}{r^3}\vec{r},\quad \text{где } \vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},\quad r=|\vec{r}|=$$

$=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Это поле является потенциальным: $\vec{E}(M)=-\operatorname{grad}u$, где $u=\frac{ke}{r}$ - электрический потенциал.

2) Поле тяготения $\vec{F}(M)$ точечной массы m, помещённой в начале координат, выражается формулой $\vec{F}(M)=-\frac{\gamma m}{r^3}\vec{r}$. Это векторное поле также является потенциальным:

$$\vec{F}(M)=\operatorname{grad}u,\quad \text{где } u=\frac{\gamma m}{r} \text{ - ньютонов}$$

потенциал.

В силовом потенциальном поле циркуляция (т.е. работа поля) вдоль кривой AB не зависит от выбора кривой, а зависит только от начальной и конечной точек A и B. Так, в поле тяготения точечной массы

$$\int\limits_{AB}(\vec{F}\cdot d\vec{l}) = u(B) - u(A) = \gamma m\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right).$$

15.3 Соленоидальные векторные поля

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *соленоидальным* в области G, если во (всех точках) этой области $\operatorname{div}\vec{a} = 0$. Поскольку $\operatorname{div}\vec{a}$ характеризует плотность источников векторного поля $\vec{a}(M)$, то в области соленоидальности векторного поля $\vec{a}(M)$ нет источников этого поля.

Пример. $\vec{E}(M) = \frac{ke}{r^3}\vec{r}$ – электрическое поле точечного заряда. В любой области, не содержащей заряда, $\operatorname{div}\vec{E} = 0$, поэтому в такой области поле $\vec{E}(M)$ является соленоидальным.

Пусть векторное поле $\vec{a}(M)$ можно представить (в области G) в виде ротора другого векторного поля:

$$\vec{a}(M) = \operatorname{rot}\vec{b}(M). \qquad (15.9)$$

В этом случае вектор-функция $\vec{b}(M)$ называется *векторным потенциалом* векторного поля $\vec{a}(M)$. Такое векторное поле $\vec{a}(M)$ является соленоидальным, поскольку (проверьте это)

$$\operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{b} = 0.$$

Верно и обратное: если векторное поле $\vec{a}(M)$ соленоидально в области G, т.е. $\operatorname{div}\vec{a} = 0$ в этой области, то это векторное поле можно представить в виде (15.9). Как найти в этом случае векторный потенциал $\vec{b}(M)$ — см. [МАВ3, стр. 397].

Пусть область G является объемно односвязной. Это означает, что если кусочно гладкая замкнутая поверхность Φ лежит в области G, то и область, ограниченная поверхностью Φ, целиком принадлежит области G. Примерами объемно односвязных областей являются шар, параллелепипед, тор. Отметим, что тор не является поверхностно односвязной областью. Если из шара удалить какую-нибудь внутреннюю точку, то получится область, не являющаяся объемно односвязной (но являющаяся, как и шар, поверхностно односвязной).

Соленоидальное поле в объемно односвязной области обладает следующим свойством: поток соленоидального поля через любую кусочно-гладкую замкнутую поверхность, расположенную в этой области, равен нулю.

Действительно, пусть кусочно гладкая замкнутая поверхность Φ, расположенная в объемно односвязной области G, ограничивает область G_1. По формуле Остроградского-Гаусса имеем:

$$\iint\limits_{\Phi}(\vec{a}\cdot\vec{n})\,dS=\iiint\limits_{G_1}\operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz.$$

Так как $\operatorname{div}\vec{a}=0$ в области G и, следовательно, в области G_1, то правая часть равенства равна нулю, поэтому

$$\iint\limits_{\Phi}(\vec{a}\cdot\vec{n})\,dS=0,$$

что и требовалось доказать.

Иногда это свойство принимают в качестве определения соленоидального поля.

Условие объёмной односвязности области здесь очень существенно. Без этого условия указанное свойство не имеет места.

Пример. Электрическое поле $\vec{E}(M) = \frac{ke}{r^3}\vec{r}$ точечного заряда e, помещённого в точку O, является соленоидальным в любой области, не содержащей точку O, так как $\operatorname{div}\vec{E}(M) = 0$ во всех точках, кроме точки O (см. пример 1 в § 15.1). В частности, во всём пространстве с выброшенной точкой O поле $\vec{E}(M)$ соленоидально, однако поток (поля $\vec{E}(M)$) через поверхность, окружающую точку O, не равен нулю. В самом деле, поток через внешнюю сторону сферы радиуса R с центром в точке O равен $4\pi ke \neq 0$ (см. пример 2 в § 15.1). Это связано с тем, что всё пространство с выброшенной одной точкой не является объёмно односвязной областью.

Рассмотренное свойство соленоидального поля показывает, что векторные линии соленоидального поля не могут начинаться и оканчиваться внутри области соленоидальности. Они либо начинаются и заканчиваются на границе области, либо являются замкнутыми линиями.

Примеры. 1) Векторные (силовые) линии электрического поля точечного заряда представляют собой лучи. В любой области G, где это поле соленоидально, векторные линии начинаются и заканчиваются на границе области G (рис. 15.7).

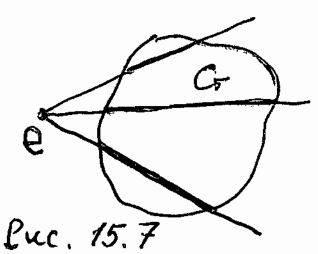


Рис. 15.7

2) Магнитное поле $\vec{B}(M)$, создаваемое электрическим током, имеет замкнутые векторные (силовые) линии. Для прямого проводника с током векторные линии поля $\vec{B}(M)$ — окружности (рис. 15.8).

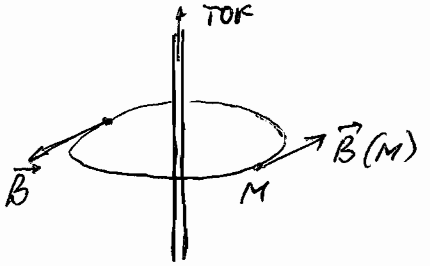
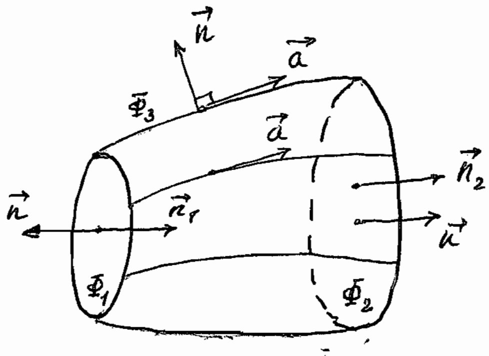


Рис. 15.8

Слово "соленоидальное" означает "трубчатое". Для соленоидального поля имеет место закон сохранения интенсивности векторной трубки. Он состоит в следующем.



$\vec{n}_1 = -\vec{n}$, $\vec{n}_2 = \vec{n}$

Рис. 15.9

Пусть $\vec{a}(M)$ — соленоидальное поле в области G. Рассмотрим в области G "отрезок векторной трубки", т.е. такую подобласть области G, которая ограничена двумя сечениями (Φ_1 и Φ_2) и боковой поверхностью Φ_3, состоящей из векторных линий (рис. 15.9).

Поток соленоидального поля $\vec{a}(M)$ через поверхность $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$, ограничивающую отрезок векторной трубки, равен нулю:

$$\iiint\limits_{\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3} (\vec{a}\cdot\vec{n})\, ds = 0,$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали. На боковой поверхности Φ_3 имеем $\vec{a} \perp \vec{n}$, поэтому

$$\iint\limits_{\Phi_3} (\vec{a}\cdot\vec{n})\, ds = 0,$$ и, следовательно,

$$\iint\limits_{\Phi_1+\Phi_2} (\vec{a}\cdot\vec{n})\, ds = \iint\limits_{\Phi_1} (\vec{a}\cdot\vec{n})\, ds + \iint\limits_{\Phi_2} (\vec{a}\cdot\vec{n})\, ds = 0.$$

Изменим на сечении Φ_1 направление нормали на противоположное, т.е. вектор $\vec{n}$ заменим на $\vec{n}_1$. Тогда получим

$$\iint\limits_{\Phi_1} (\vec{a}\cdot\vec{n}_1)\,dS = \iint\limits_{\Phi_2} (\vec{a}\cdot\vec{n}_2)\,dS,$$

где оба потока через сечения Φ_1 и Φ_2 вычисляются в направлении векторных линий.

Таким образом, поток соленоидального векторного поля через любое сечение векторной трубки имеет одно и то же значение. Это и есть закон сохранения интенсивности векторной трубки.

Замечание. Нетрудно доказать (см. [МАВ3, стр. 403]), что любое векторное поле $\vec{a}(M)$ можно представить в виде суммы потенциального и соленоидального полей:

$$\vec{a}(M) = \operatorname{grad} u(M) + \operatorname{rot} \vec{b}(M),$$

причём такое представление не единственно.

15.4. Оператор Гамильтона.

Символом $\frac{\partial}{\partial x}$ мы обозначали оператор частной производной по переменной x. Результатом действия этого оператора на функцию $u(x,y,z)$ является частная производная $\frac{\partial u}{\partial x}$. Аналогично, $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$ — операторы частных производных по y и z.

Введём векторный оператор "набла" или оператор Гамильтона:

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}.$$

С помощью этого оператора удобно записывать и выполнять операции векторного анализа:

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \vec{i}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial u}{\partial z},$$

т.е. градиент функции u получается в результате умножения векторного оператора ∇ на скалярную функцию $u(x,y,z)$;

$$\operatorname{div} \vec{a} = (\nabla \cdot \vec{a}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

т.е. дивергенция векторного поля $\vec{a} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ получается как результата скалярного умножения векторного оператора ∇ на вектор-функцию $\vec{a}(x,y,z)$;

$$\operatorname{rot} \vec{a} = [\nabla \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

т.е. ротор векторного поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ представляет собой векторное произведение векторного оператора ∇ и вектор-функции $\vec{a}(x,y,z)$.

<u>Повторные дифференциальные операции</u>:

1) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = [\nabla \cdot \nabla u] = \vec{0}$

(потенциальное векторное поле $\operatorname{grad} u$ является безвихревым);

2) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = (\nabla \cdot [\nabla \cdot \vec{a}]) = 0$

(векторное поле $\operatorname{rot} \vec{a}$ является соленоидальным);

3) $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = (\nabla \cdot \nabla u) = \nabla^2 u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u = \Delta u$,

оператор $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$ называется <u>оператором Лапласа</u>, а уравнение $\Delta u = 0$ — <u>уравнением Лапласа</u> (это одно из важнейших уравнений математической физики);

4) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = [\nabla\cdot[\nabla\vec{a}]] = \nabla(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) - (\nabla\cdot\nabla)\vec{a} =$

$= \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta\vec{a}$,

где $\Delta\vec{a} = \Delta(P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) = \Delta P\cdot\vec{i} + \Delta Q\cdot\vec{j} + \Delta R\cdot\vec{k}$ (вывод формулы см. в [МАВ3, стр. 404]).

Вернёмся к оператору и уравнению Лапласа. Функция $u(x,y,z)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ в некоторой области, называется **гармонической функцией** в этой области. (Рассмотрим примеры.) 1) Простейшим примером гармонической функции (в любой области) является линейная функция $u(x,y,z) = Ax + By + Cz$.

2) Потенциал ($u = \frac{ke}{r}$) электрического поля точечного заряда (и также потенциал ($u = \frac{km}{r}$) поля тяготения точечной массы), где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, является гармонической функцией в любой области, не содержащей начала координат, т.е. при $r \neq 0$ функция $u = \frac{ke}{r}$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$\Delta\left(\frac{ke}{r}\right) = ke\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ (проверьте это).

3) Пусть векторное поле $\vec{a}(x,y,z)$ является потенциальным и соленоидальным (в некоторой области). Тогда $\vec{a} = \operatorname{grad} u$ и $\operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{div}\operatorname{grad} u = 0$, т.е. $\Delta u = 0$. Таким образом, скалярный потенциал (функция $u(x,y,z)$) векторного поля, являющегося потенциальным и соленоидальным, есть гармоническая функция.

4) Пусть векторное поле $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ является (в некоторой области) соленоидальным и безвихревым (в частности, оно может быть потенциальным), т.е. $\operatorname{div}\vec{a}$ и $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$. Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

и

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Отсюда получаем (путём дифференцирования по x первого равенства, по y — второго равенства и по z — последнего равенства):

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} = 0$$

и

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \Delta P = 0.$$

Аналогично доказывается, что $\Delta Q = 0$ и $\Delta R = 0$.

Таким образом, координаты P, Q, R соленоидального безвихревого поля являются гармоническими функциями.

5) Рассмотрим плоское векторное поле $\vec{a}(x,y) = \{P(x,y), Q(x,y)\}$, которое является (в некоторой области) соленоидальным и безвихревым, т.е. $\operatorname{div}\vec{a} = 0$ и $\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{0}$. Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Эти два равенства являются условиями Коши-Римана для функции комплексной переменной

$$f(z) = f(x+iy) = Q(x,y) + i\,P(x,y).$$

Выполнение этих равенств означает, что $f(z)$ — аналитическая функция.

15.5. Операции векторного анализа в криволинейных ортогональных координатах.

Градиент скалярного поля и также дивергенция и ротор векторного поля были введены в прямоугольной системе координат $Oxyz$. Во многих задачах математической физики удобнее пользоваться выражениями для этих операций в других системах координат, например, в цилиндрической или сферической. Мы выведем выражения для $\operatorname{grad} u$, $\operatorname{div} \vec{a}$ и $\operatorname{rot} \vec{a}$ в так называемых криволинейных ортогональных координатах, частными случаями которых являются цилиндрические и сферические координаты.

1. Криволинейные ортогональные координаты. Пусть (x, y, z) — прямоугольные координаты точки M. Положение точки M, как уже отмечалось в главе 11, можно задать также с помощью криволинейных координат. Будем обозначать их q_1, q_2, q_3; а формулы, связывающие криволинейные координаты с прямоугольными, запишем в виде

$$x = x(q_1, q_2, q_3),\quad y = y(q_1, q_2, q_3),\quad z = z(q_1, q_2, q_3). \quad (15.10)$$

При изменении q_1 и фиксированных значениях q_2 и q_3 точка с координатами (x, y, z), определяемыми формулами (15.10) описывает в пространстве некоторую кривую, называемую координатной (линией q_1 (или q_1 — линией). Аналогично определяются координатные q_2 — линия и q_3 — линия. Через каждую точку пространства проходят три координатные q_i — линии $(i = 1, 2, 3)$.

Криволинейные координаты (q_1, q_2, q_3) называются **ортогональными**, если в любой точке пространства три координатные линии, проходящие через эту точку, попарно ортогональны (т.е. касательные к координатным линиям в этой точке попарно перпендикулярны).

Примерами криволинейных ортогональных координат являются (см. § 11.):

а) цилиндрические координаты $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$;

формулы (15.10) для цилиндрических координат имеют вид:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z,$$
$$(r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty).$$

б) сферические координаты $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$; формулы (15.10) для сферических координат имеют вид:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$
$$(r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi).$$

2. Параметры Ламэ. Рассмотрим элемент dl_1 длины дуги координатной q_1-линии. Криволинейные координаты концов этой дуги обозначим так, как показано на рисунке 15.10.

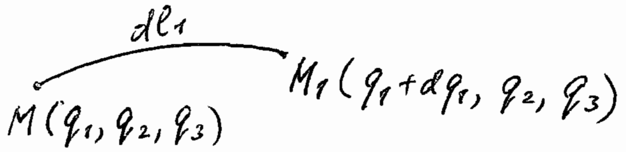


Рис. 15.10

Величину dq_1 будем считать положительной и сколь угодно малой. Прямоугольные координаты точки M обозначим (x, y, z), а точки M_1 — $(x+dx, y+dy, z+dz)$. Тогда, используя формулы (1), получаем равенства

$$dx = x(q_1+dq_1, q_2, q_3) - x(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial x}{\partial q_1}\cdot dq_1,$$

$dy = \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1$, $dz = \frac{\partial z}{\partial q_1}\cdot dq_1$, в которых производные вычисляются в некоторых промежуточных точках между точками M и M_1. Равенства останутся верными с точностью до бесконечно малых выше первого порядка относительно dq_i, если производные взять в точке M, что мы и сделаем здесь и в других аналогичных случаях. С помощью полученных равенств находим:

$$dl_1 = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}\, dq_1 .$$

Введём обозначение: $H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}$.

Тогда $dl_1 = H_1 \cdot dq_1$ и аналогичные равенства имеют место для элементов dl_2 и dl_3 длин дуг координатных q_2-линии и q_3-линии:

$$dl_2 = H_2\, dq_2 , \quad dl_3 = H_3\, dq_3 ,$$

где $H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}$, $H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}$,

причём величины H_i вычисляются в точке $M(q_1, q_2, q_3)$.

Величины H_1, H_2, H_3 называются параметрами Ламэ (или масштабными множителями) криволинейных координат q_1, q_2, q_3. Они характеризуют в каждой точке пространства изменение длины dl_i координатной q_i-линии в зависимости от изменения соответствующей криволинейной координаты q_i.

(см. н.с.) - вставка на следующей странице.

Примеры. а) Параметры Ламэ цилиндрических координат: $H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$,

$H_2 = r$, $H_3 = 1$.

б) Параметры Ламэ сферических координат:

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r\sin\theta .$$

3. Градиент скалярного поля в криволинейных ортогональных координатах. Пусть (q_1, q_2, q_3) – криволинейные ортогональные координаты точки M. Введём в точке M ортогональный базис, состоящий из трёх единичных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$,

вставка к странице 28

Заметим, что $dl_1\, dl_2\, dl_3 = H_1 H_2 H_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3$, т.е.

$dV_{xyz} = H_1 H_2 H_3 \cdot dV_{q_1 q_2 q_3}$, где dV - элемент объёма в соответствующих координатах. С другой стороны,

$$dV_{xyz} = \frac{D(x,y,z)}{D(q_1,q_2,q_3)}\, dV_{q_1 q_2 q_3},$$ поэтому

$$\underline{\frac{D(x,y,z)}{D(q_1,q_2,q_3)} = H_1 H_2 H_3}$$ - коэффициент растяжения объёма.

касательных к координатным линиям в точке M и направленных в сторону возрастания q_1, q_2, q_3. Отметим, что при переходе от точки к точке направление векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ изменяется (в отличие от векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$), т.е. базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ зависит от точки M (или, что то же самое, от q_1, q_2, q_3).

Пусть $u(M)$ — заданное дифференцируемое скалярное поле. Вектор $\operatorname{grad} u$ в точке M будем раскладывать по базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ в этой точке:

$$\operatorname{grad} u = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3\ ; \quad c_1, c_2, c_3 \text{ — некоторые числа.}$$

Умножив это равенство скалярно на $\vec{e}_1$ и учитывая, что $(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1)=1$, $(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1)=(\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1)=0$, получим:

$$c_1 = (\operatorname{grad} u\cdot\vec{e}_1) = \frac{\partial u}{\partial e_1}$$ — производная функции $u(M)$ по направлению $\vec{e}_1$ в точке M (рис. 15.11), т.е.

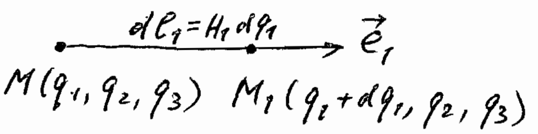


Рис. 15.11

$$c_1 = \frac{\partial u}{\partial e_1}(M) = \lim_{dl_1\to 0}\frac{u(M_1)-u(M)}{dl_1} = \frac{1}{H_1}\lim_{dq_1\to 0}\frac{u(q_1+dq_1, q_2, q_3)-u(q_1,q_2,q_3)}{dq_1} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}(M).$$

Аналогично получаются равенства

$$c_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}(M), \quad c_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}(M),$$

причём величины H_i в этих равенствах вычисляются в точке $M(q_1, q_2, q_3)$. Таким образом,

$$\boxed{\operatorname{grad} u(M) = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}(M)\vec{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}(M)\vec{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}(M)\vec{e}_3}$$

Пример.

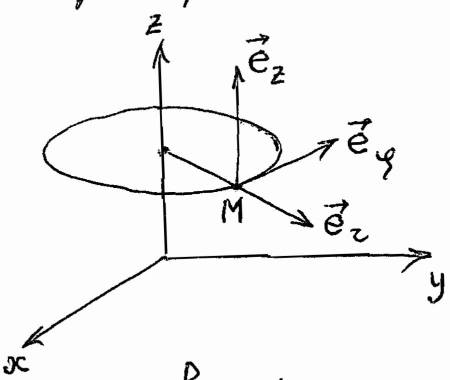


Рис. 15.12

Ортогональный базис в точке M, связанный с цилиндрическими координатами (r, φ, z), обозначим $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ (рис. 15.12).

Градиент скалярного поля $u(M)$ в цилиндрических координатах имеет вид

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z .$$

Задание: записать выражение для grad u в сферических координатах.

4. Дивергенция векторного поля в криволинейных ортогональных координатах. Пусть $\vec{a}(M)$ — заданное дифференцируемое векторное поле. Чтобы получить выражение для $\operatorname{div}\vec{a}(M)$ в криволинейных ортогональных координатах (q_1, q_2, q_3), воспользуемся инвариантным определением дивергенции (см. п. 6 § 15.1):

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \lim_{\substack{V(G)\to 0\\ M\in V(G)}} \frac{\oint\!\!\oint_{\Phi} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,ds}{V(G)} . \qquad (15.11)$$

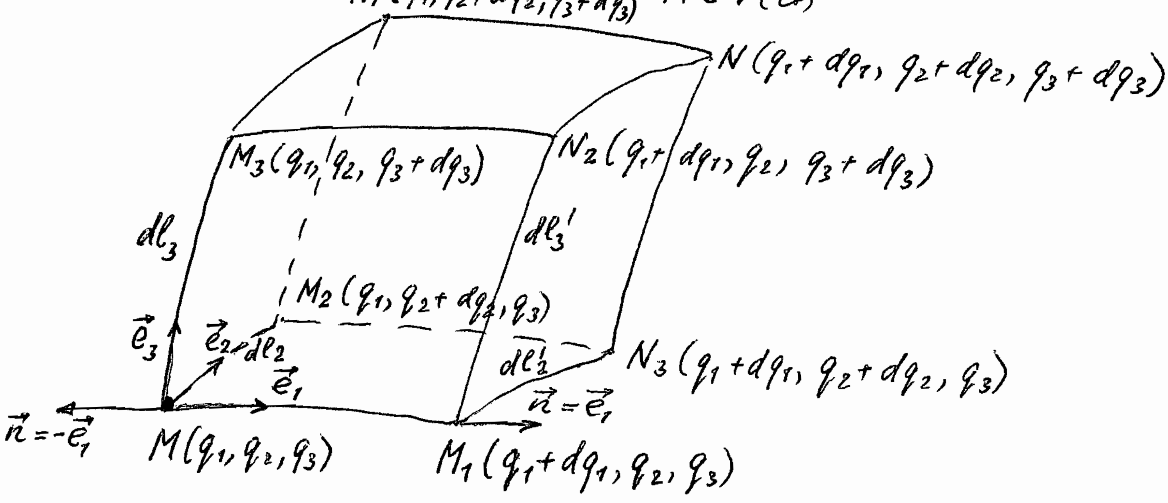


Рис. 15.13

В качестве области G возьмём криволинейный параллелепипед, рёбрами которого являются элементы (сколь угодно малые отрезки) координатных линий. На каждом ребре две криволинейные координаты постоянны, а третья изменяется, а на каждой грани параллелепипеда одна из криволинейных координат постоянна, а две другие изменяются (рис. 15.13). Величины dq_1, dq_2, dq_3 будем считать положительными и сколь угодно малыми. Тогда криволинейный параллелепипед сколь угодно мало отличается от прямоугольного, поскольку элементы координатных линий, являющиеся рёбрами параллелепипеда, попарно ортогональны.

Наши последующие рассуждения будут не строгими, но весьма наглядными. Разложим вектор $\vec{a}$ по базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ в точке M: $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, и вычислим поток векторного поля $\vec{a}$ в направлении внешней нормали $\vec{n}$ к поверхности Φ, ограничивающей параллелепипед G.

Обозначим через Φ_1 и Φ_1' те грани параллелепипеда, которые перпендикулярны к вектору $\vec{e}_1$. На первой из них $q_1 = const$, на второй — $q_1 + dq_1 = const$. Для грани Φ_1 имеем: $\vec{n} = -\vec{e}_1$ (см. рис. 15.13), $dl_2 = H_2(M)\,dq_2$, $dl_3 = H_3(M)\,dq_3$, площадь $S(\Phi_1) = dl_2 \cdot dl_3 = H_2(M)H_3(M)\,dq_2\,dq_3$, поэтому $(\vec{a}\cdot\vec{n}) = \left((a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)\cdot(-\vec{e}_1)\right) = -a_1(M)$,

$$\iint\limits_{\Phi_1} (\vec{a}\cdot\vec{n})\,dS = -a_1(M)\,S(\Phi_1) = -(a_1H_2H_3)_M \cdot dq_2\,dq_3 .$$

Для грани Φ_1' аналогично получаем:

$\vec{n} = \vec{e}_1$, $dl_2' = H_2(M_1)\,dq_2$, $dl_3' = H_3(M_1)\,dq_3$, $S(\Phi_1') = H_2(M_1)H_3(M_1)\cdot dq_2\,dq_3$,

$$(\vec{a}\cdot\vec{n}) = a_1(M_1),$$

$$\iint\limits_{\Phi_1'} (\vec{a}\cdot\vec{n})ds = (a_1 H_2 H_3)_{M_1}\cdot dq_2\, dq_3 .$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{\Phi_1+\Phi_1'} (\vec{a}\cdot\vec{n})ds = \left[(a_1H_2H_3)_{M_1(q_1+dq_1,\, q_2,\, q_3)} - (a_1H_2H_3)_{M(q_1,q_2,q_3)}\right]\cdot dq_2\, dq_3$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_1}(a_1 H_2 H_3)\Big|_M \cdot dq_1\, dq_2\, dq_3 .$$

Аналогичные выражения получаются для потока векторного поля $\vec{a}$ через две другие пары противоположных граней:

$$\frac{\partial}{\partial q_2}(a_2 H_3 H_1)\Big|_M \cdot dq_1\, dq_2\, dq_3 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial q_3}(a_3 H_1 H_2)\Big|_M \cdot dq_1 dq_2 dq_3 .$$

Суммируя потоки через три пары граней и разделив полученную сумму на $V(G) = dl_1\cdot dl_2\cdot dl_3 =$ $= H_1H_2H_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3$, по формуле (15.11) получим

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{a}\,(M) = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(a_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(a_2H_3H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(a_3H_1H_2)\right]}$$

(Отметим, что) все величины в правой части равенства вычисляются в точке M.

<u>Пример</u>. Пусть разложение вектора $\vec{a}$ по базису, связанному с цилиндрическими координатами (см. рис. 15.12) имеет вид $\vec{a} = a_r\cdot\vec{e}_r + a_\varphi\cdot\vec{e}_\varphi + a_z\cdot\vec{e}_z$. Так как $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = 1$, то

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r a_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} .$$

Задание: записать выражение для $\operatorname{div}\vec{a}$ в сферических координатах.

5. Ротор векторного поля в криволинейных ортогональных координатах.

Чтобы получить выражение для $\operatorname{rot}\vec{a}(M)$ в криволинейных ортогональных координатах, воспользуемся инвариантным определением ротора (см. п. 7 § 15.1):

$$\Pi p_{\vec{n}} \operatorname{rot}\vec{a}(M) = \lim_{\substack{S(\Phi)\to 0 \\ M\in\Phi}} \frac{\oint_L (\vec{a}\cdot d\vec{e})}{S(\Phi)}. \qquad (15.12)$$

В качестве вектора $\vec{n}$ возьмем сначала вектор $\vec{e}_1$ (см. рис. 15.13) и тогда в качестве поверхности Φ можно взять грань Φ_1 параллелепипеда G_1, границей L которой является контур $MM_2N_1M_3M$.

Разложим вектор $\vec{a}$ по базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ в точке M: $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, и вычислим циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ вдоль контура $MM_2N_1M_3M$.

На отрезке MM_2 имеем: $\vec{dl} = dl\cdot\vec{e}_2$, поэтому $(\vec{a}\cdot\vec{dl}) = a_2\,dl$ и $\int\limits_{MM_2}(\vec{a}\cdot\vec{dl}) = \int\limits_{MM_2} a_2\,dl = a_2\cdot dl_2 = (a_2H_2)_M\cdot dq_2$

(написанные равенства, как и последующие, справедливы с точностью до бесконечно малых выше первого порядка относительно dq_i).

Аналогично, на отрезке M_3N_1 $\vec{dl} = dl\cdot\vec{e}_2$, поэтому $\int\limits_{M_3N_1}(\vec{a}\cdot\vec{dl}) = (a_2H_2)\Big|_{M_3}\cdot dq_2$, а $\int\limits_{N_1M_3}(\vec{a}\cdot\vec{dl}) = -(a_2H_2)_{M_3}\cdot dq_2$.

Складывая циркуляции вдоль отрезков MM_2 и N_1M_3 и учитывая, что $(a_2H_2)_{M(q_1,q_2,q_3)} - (a_2H_2)_{M_3(q_1,q_2,q_3+dq_3)} = -\frac{\partial}{\partial q_3}(a_2H_2)_M\cdot dq_3$, приходим к равенству

$$\int\limits_{MM_2}(\vec{a}\cdot d\vec{l}) + \int\limits_{N_1M_3}(\vec{a}\,d\vec{l}) = -\frac{\partial}{\partial q_3}(a_2H_2)\Big|_M \cdot dq_2\,dq_3 .$$

Аналогично получаем равенство

$$\int\limits_{M_2N_1}(\vec{a}\,d\vec{l}) + \int\limits_{M_3M}(\vec{a}\,d\vec{l}) = \frac{\partial}{\partial q_2}(a_3H_3)\Big|_M \cdot dq_2\,dq_3 .$$

Таким образом, циркуляция векторного поля $\vec{a}$ вдоль контура L, ограничивающего поверхность Φ_1, выражается формулой

$$\oint\limits_L(\vec{a}\,d\vec{l}) = \left[\frac{\partial}{\partial q_2}(a_3H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(a_2H_2)\right]_M \cdot dq_2\,dq_3 .$$

Разделив эту величину на площадь $S(\Phi_1) = H_2(M)\cdot H_3(M)\cdot dq_2\,dq_3$, по формуле (15.12) получим:

$$\text{Пр}_{\vec{e}_1}\,\operatorname{rot}\vec{a}(M) = \frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(a_3H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(a_2H_2)\right].$$

Отметим, что все величины в правой части равенства вычисляются в точке M.

Аналогичные выражения получаются для проекций вектора $\operatorname{rot}\vec{a}(M)$ на направления $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$. Найденные проекции являются координатами вектора $\operatorname{rot}\vec{a}(M)$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, относящемся к точке M, т.е. справедливо равенство

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M) = \frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(a_3H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(a_2H_2)\right]\cdot\vec{e}_1 + \frac{1}{H_3H_1}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(a_1H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(a_3H_3)\right]\vec{e}_2 + \frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(a_2H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(a_1H_1)\right]\vec{e}_3 .$$

Это равенство можно записать (с помощью определителя третьего порядка) в компактном виде

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} H_1 \vec{e}_1 & H_2 \vec{e}_2 & H_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ a_1 H_1 & a_2 H_2 & a_3 H_3 \end{vmatrix}}$$

<u>Пример.</u> В цилиндрических координатах с базисом $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ ротор векторного поля $\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + a_z \vec{e}_z$ имеет вид

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_r & r a_\varphi & a_z \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - r\frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r +$$

$$+ \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z .$$

<u>Задание:</u> записать выражение для $\operatorname{rot} \vec{a}$ в сферических координатах.