

ОГЛАВЛЕНИЕ

Тематическая лекция 1. Уравнение теплопроводности	2
§ 1. Уравнение теплопроводности	2
§ 2. Задача Коши для уравнения теплопроводности	3
§ 3. Неоднородная задача Коши	7
§ 4. Слабый принцип максимума для уравнения теплопроводности . . .	10
§ 5. Слабый принцип максимума для задачи Коши	22
§ 6. Единственность решения задачи Коши	27
Список литературы	30

Тематическая лекция 1

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В этой лекции мы рассмотрим уравнение теплопроводности. Для него докажем слабый принцип максимума, рассмотрим задачу Коши и введем класс А. Н. Тихонова, в котором имеет место единственность решения задачи Коши.

§ 1. Уравнение теплопроводности

Как известно из курса ММФ к параболическим уравнениям относится уравнение теплопроводности

$$u_t - \Delta u = 0, \quad (1.1)$$

в котором $u(x, t) \geq 0$ — это температура в точке x и в момент времени $t > 0$. Для исследования уравнения теплопроводности (1.1) необходимо построить так называемое *фундаментальное решение*, которое в терминах *обобщенных функций* определяется как решение следующего уравнения в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$:

$$\mathcal{E}_t - \Delta \mathcal{E} = \delta(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geq 0, \quad (1.2)$$

где $\delta(x, t)$ — это дельта-функция Дирака, а равенство в уравнении (1.2) не является поточечным равенством и его точный смысл будет нам в дальнейшем понятен из курса «Функциональный анализ», который мы только начали изучать. Решение уравнения (1.2) может быть получено при помощи так называемого преобразования Фурье и оно имеет следующий явный вид:

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{\vartheta(t)}{(4\pi t)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \quad (1.3)$$

где $\vartheta(t)$ — это функция Хевисайда, определенная равенством

$$\vartheta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geq 0; \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Однако, построить фундаментальное решение можно используя симметрию уравнения (1.1) относительно преобразования

$$(x, t) \rightarrow (\lambda x, \lambda^2 t).$$

Итак, будем искать *частное решение* уравнения теплопроводности (1.1) в следующем автомоделльном виде:

$$u(x, t) = \frac{1}{t^\alpha} v(y), \quad y = \frac{x}{t^\beta}. \quad (1.4)$$

После подстановки этого выражения в уравнение (1.1) мы получим следующее уравнение:

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} (y, D_y) v(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0, \quad (1.5)$$

где $D_y = (\partial_{y_1}, \dots, \partial_{y_N})$. Положим в этом уравнении $\beta = 1/2$, тогда получим

$$\alpha v(y) + \frac{1}{2} (y, D_y) v(y) + \Delta v(y) = 0. \quad (1.6)$$

Упростим это уравнение предположив, что функция $v(y)$ радиальна, т. е.

$$v = w(|y|) \Rightarrow \alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{N-1}{r} w' = 0, \quad r = |y|. \quad (1.7)$$

Положив в этом уравнении $\alpha = N/2$, получим более простое уравнение

$$(r^{N-1} w')' + \frac{1}{2} (r^N w)' = 0. \quad (1.8)$$

Таким образом,

$$r^{N-1} w' + \frac{1}{2} r^N w = a,$$

где a — константа. Положим $a = 0$, тогда

$$w' = -\frac{1}{2} r w \Rightarrow w(r) = b e^{-r^2/4} \Rightarrow u(x, t) = \frac{b}{t^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

Константу $b > 0$ выберем так, чтобы имело место равенство

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{b}{t^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{(4\pi)^{N/2}}.$$

Итак, с учетом того, что $t \geq 0$ мы приходим к фундаментальному решению (1.3).

§ 2. Задача Коши для уравнения теплопроводности

Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения теплопроводности:

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0, +\infty), \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (2.2)$$

Докажем, что при некоторых условиях на начальную функцию $u_0(x)$ классическое решение задачи (2.1), (2.2) дается следующей формулой:

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y) dy. \quad (2.3)$$

З а м е ч а н и е 1. Заметим, что мы ниже используем следующее обозначение:

$$\mathbb{C}_b(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{u(z) \in \mathbb{C}(\Omega) : |u(z)| \leq B < +\infty\},$$

где $B = B(u) > 0$ — это постоянная своя для каждого $u(z)$, а $\Omega \subset \mathbb{R}^M$ — это область и $M \in \mathbb{N}$.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. Пусть $u_0(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^N)$ и $u(x, t)$ определено формулой (2.3). Тогда

$$u(x, t) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N \otimes (0, +\infty)),$$

$u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) и выполнено предельное свойство

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0), x \in \mathbb{R}^N, t > 0} u(x, t) = u_0(x_0) \quad \text{для любого } x_0 \in \mathbb{R}^N. \quad (2.4)$$

Доказательство.

Шаг 1. Поскольку функция

$$\frac{1}{t^{N/2}} e^{-|x|^2/(4t)}$$

бесконечное число раз дифференцируема и интегралы от производных в (2.3) равномерно сходятся на любом множестве $\Omega \otimes [\delta, +\infty) \subset \mathbb{R}^N \otimes (0, +\infty)$ для любого $\delta > 0$ и для любого замкнутого, ограниченного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, имеем $u(x, t) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N \otimes (0, +\infty))$.

Шаг 2. Кроме того,

$$u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} [\mathcal{E}_t(x-y, t) - \Delta_x \mathcal{E}(x-y, t)] u_0(y) dy = 0 \quad (2.5)$$

при $x \in \mathbb{R}^N$ и $t > 0$.

Шаг 3. Фиксируем $x_0 \in \mathbb{R}^N$ и $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$|u_0(y) - u_0(x_0)| < \varepsilon \quad \text{при } |y - x_0| < \delta, \quad y \in \mathbb{R}^N. \quad (2.6)$$

Пусть $|x - x_0| < \delta/2$, то с учетом равенства

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \exp\left(-|y|^2/(4t)\right) dy = 1, \quad t > 0$$

справедлива следующая цепочка выражений:

$$\begin{aligned}
|u(x, t) - u_0(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x - y, t) [u_0(y) - u_0(x_0)] dy \right| \leq \\
&\leq \int_{B(x_0, \delta)} \mathcal{E}(x - y, t) |u_0(y) - u_0(x_0)| dy + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0, \delta)} \mathcal{E}(x - y, t) |u_0(y) - u_0(x_0)| dy = I_1 + I_2. \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Прежде всего справедливы неравенства

$$I_1 \leq \varepsilon \int_{B(x_0, \delta)} \mathcal{E}(x - y, t) \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x - y, t) = \varepsilon. \quad (2.8)$$

Кроме того, если

$$\begin{aligned}
|x - x_0| \leq \delta/2, \quad |y - x_0| \geq \delta &\Rightarrow \\
\Rightarrow |y - x_0| \leq |y - x| + |x - x_0| \leq |y - x| + \delta/2 &\leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x_0| \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}|y - x_0| \leq |y - x|.
\end{aligned}$$

Следовательно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq 2 \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |u_0(x)| \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0, \delta)} \mathcal{E}(x - y, t) dy \leq \\
&\leq \frac{c_1}{t^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0, \delta)} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4t}\right) dy \leq \\
&\leq \frac{c_1}{t^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x_0, \delta)} \exp\left(-\frac{|y - x_0|^2}{16t}\right) dy = \\
&= \frac{c_2}{t^{N/2}} \int_{\delta}^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{16t}\right) r^{N-1} dr = c_2 \int_{\delta/\sqrt{t}}^{+\infty} \exp(-z^2/16) z^{N-1} dz \rightarrow +0
\end{aligned}$$

при $t \rightarrow +0$. ¹⁾ Таким образом, если

$$|x - x_0| < \frac{\delta}{2} \quad \text{и} \quad t > 0 \quad \text{достаточно мало,}$$

¹⁾ Здесь мы сделали замену переменных $z = y - x_0$ и перешли к сферической системе координат.

то

$$|u(x, t) - u_0(x_0)| < 2\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Нелинейное уравнение Бюргерса [6]. Существует важная связь между уравнением теплопроводности

$$u_t = \mu u_{xx}, \quad t > 0, \quad \mu > 0, \quad u(x, t) \geq 0 \quad (2.9)$$

и уравнением Бюргерса

$$v_t + vv_x = \mu v_{xx}, \quad (2.10)$$

устанавливаемая следующей заменой Коула–Хопфа

$$v(x, t) = -2\mu \frac{\partial}{\partial x} \ln u(x, t). \quad (2.11)$$

Действительно, учитывая замену (2.11), получим

$$v_t + vv_x - \mu v_{xx} = -2\mu \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{u} (u_t - \mu u_{xx}) \right] = 0 \quad (2.12)$$

в силу уравнения (2.9). Преобразование Коула–Хопфа позволяет найти решение задачи Коши для уравнения Бюргерса.

Действительно, пусть в начальный момент времени

$$v(x, 0) = \varphi(x), \quad (2.13)$$

тогда из (2.11) получаем

$$u(x, 0) = \Psi(x) = \exp \left[-\frac{1}{2\mu} \int_0^x \varphi(y) dy \right]. \quad (2.14)$$

Решение задачи Коши (2.9), (2.14) как мы уже показали ниже дается формулой

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(z) \exp \left[-\frac{(x-z)^2}{4\mu t} \right] dz. \quad (2.15)$$

Используя (2.15), получаем решение задачи Коши (2.10), (2.13) для уравнения Бюргерса в следующем виде:

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-z}{t} \exp \left\{ -\frac{G(z, x, t)}{2\mu} \right\} dz / \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{G(z, x, t)}{2\mu} \right\} dz, \quad (2.16)$$

где

$$G(z, x, t) = \frac{(x-z)^2}{2t} + \int_0^z \varphi(y) dy. \quad (2.17)$$

§ 3. Неоднородная задача Коши

Теперь мы рассмотрим следующую задачу:

$$u_t - \Delta u = f(x, t) \quad \text{при } (x, t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0, +\infty), \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^N. \quad (3.2)$$

Решение неоднородной задачи Коши (3.1), (3.2) будем искать в виде *интеграла Дюамеля*:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x - y, t - s) f(y, s) dy ds = \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t - s))^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4(t - s)}\right) f(y, s) dy ds \end{aligned} \quad (3.3)$$

при $x \in \mathbb{R}^N$ и $t > 0$.

Замечание 2. Заметим, что ниже мы используем следующие пространства:

$$\mathbb{C}_{x,t}^{2,1}(\mathbb{R}^N \otimes (0, +\infty)),$$

которое является пространством функций $u(x, t)$ таких, что

$$u(x, t), \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes (0, +\infty)), \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Кроме того, определим носитель функции $u(x, t)$

$$\text{supp}(u(x, t)) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{(x, t) \in D : u(x, t) \neq 0\}}.$$

Символом $\mathbb{C}_0(D)$ мы обозначаем пространство функций $u(x, t) \in \mathbb{C}(D)$, у которых компактен носитель $\text{supp}(u(x, t)) \subset \mathbb{R}^M$, $M \in \mathbb{N}$.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. Пусть функция $u(x, t)$ определена формулой (3.3) и функция $f(x, t) \in \mathbb{C}_{x,t}^{2,1}(\mathbb{R}^N \otimes (0, +\infty)) \cap \mathbb{C}_0(\mathbb{R}^N \otimes (0, +\infty))$. Тогда $u(x, t) \in \mathbb{C}_{x,t}^{2,1}(\mathbb{R}^N \otimes (0, +\infty))$, $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (3.1) и

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0), x \in \mathbb{R}^N, t > 0} u(x, t) = 0 \quad \text{для каждой точки } x_0 \in \mathbb{R}^N. \quad (3.4)$$

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего сделаем замену переменных в выражении (3.3):

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y, s) f(x - y, t - s) dy ds. \quad (3.5)$$

Поскольку $f(x, t) \in \mathbb{C}_{x,t}^{2,1}(\mathbb{R}^N \otimes (0, +\infty))$ и финитна, а функция $\mathcal{E} = \mathcal{E}(y, s)$ гладкая в окрестности $s = t > 0$, получаем

$$u_t(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y, s) f_t(x - y, t - s) dy ds + \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y, t) f(x - y, 0) dy,$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y, s) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x - y, t - s) dy ds \quad \text{при } i, j = \overline{1, N}.$$

Таким образом, $u, u_t, D_x u$ и $D_x^2 u$ ¹⁾ принадлежат $\mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes (0, +\infty))$.

Шаг 2. Заметим, что

$$\frac{\partial f(x - y, t - s)}{\partial t} = - \frac{\partial f(x - y, t - s)}{\partial s},$$

$$\Delta_x f(x - y, t - s) = \Delta_y f(x - y, t - s).$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y, s) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) f(x - y, t - s) \right] dy ds + \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y, t) f(x - y, 0) dy = \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y, s) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x - y, t - s) \right] dy ds + \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y, t) f(x - y, 0) dy = \\ &= \int_{\varepsilon}^t \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y, s) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x - y, t - s) \right] dy ds + \\ &+ \int_0^{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y, s) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x - y, t - s) \right] dy ds + \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y, t) f(x - y, 0) dy =: I_1 + I_2 + J. \quad (3.6) \end{aligned}$$

¹⁾ Символами $D_x u$ и $D_x^2 u$ мы обозначили любую частную производную первого порядка и любую частную производную второго порядка соответственно.

Прежде всего имеем

$$|I_2| \leq \sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0, +\infty)} [|f_t(x,t)| + |\Delta_x f(x,t)|] \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) dy ds \leq c_1 \varepsilon. \quad (3.7)$$

Справедлива цепочка выражений.

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \frac{\partial f(x-y,t-s)}{\partial s} dy ds &= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial (\mathcal{E}(y,s) f(x-y,t-s))}{\partial s} dy ds - \\ &- \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y,t-s) \frac{\partial \mathcal{E}(y,s)}{\partial s} dy ds = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,t) f(x-y,0) dy - \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon) dy - \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y,t-s) \frac{\partial \mathcal{E}(y,s)}{\partial s} dy ds. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x-y,t-s) \right] dy ds = \\ &= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y,t-s) \left[\left(\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) \mathcal{E}(y,s) \right] dy ds + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon) dy - \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,t) f(x-y,0) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon) dy - J, \quad (3.8) \end{aligned}$$

поскольку

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) \mathcal{E}(y,s) = 0, \quad s > 0, \quad y \in \mathbb{R}^N.$$

Кроме того, в силу выкладок шага 3 теоремы 1

$$\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon) dy \rightarrow f(x,t) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0.$$

Заметим, что с учетом выражения (3.8) из (3.6) мы видим, что

$$I_1 + J = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y, \varepsilon) f(x - y, t - \varepsilon) dy.$$

Следовательно, мы доказали, что функция $u(x, t)$, определенная формулой (3.3), удовлетворяет уравнению (3.1).

Шаг 3. Наконец, имеем

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |u(x, t)| &\leq \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0, +\infty)} |f(x, t)| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y, s) dy ds = \\ &= c_1 t \rightarrow +0 \quad \text{при } t \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Замечание 3. Комбинируя результаты этих двух теорем, мы получим, что при указанных условиях на $u_0(x)$ и $f(x, t)$ одно из классических решений неоднородной задачи Коши

$$u_t - \Delta u = f(x, t) \quad \text{при } (x, t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0, +\infty), \quad (3.9)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^N \quad (3.10)$$

дается формулой

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y) dy + \\ &+ \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right) f(y, s) dy ds. \quad (3.11) \end{aligned}$$

§ 4. Слабый принцип максимума для уравнения теплопроводности

Пусть $U \subset \mathbb{R}^N$ — это открытое ограниченное множество. Тогда положим

$$\begin{aligned} D &:= U \otimes (0, T), \quad \partial' D := B \cup S, \quad S := \partial U \otimes [0, T], \\ B_T &:= U \otimes \{t = T\}, \quad B := U \otimes \{t = 0\}. \end{aligned}$$

В дальнейшем мы будем использовать следующую терминологию. Открытое множество $B_T \subset \mathbb{R}^N \otimes \{t = T\}$ называется *верхней крышкой*, открытое множество $B \subset \mathbb{R}^N \otimes \{t = 0\}$ называется *нижней крышкой*, замкнутое в \mathbb{R}^{N+1} множество S называется *боковой границей* цилиндрической области D . Полная граница ∂D открытого множества D имеет вид

$$\partial D = S \cup B \cup B_T,$$

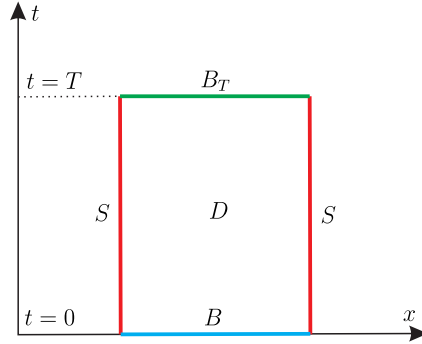


Рис. 1. Область D и множества S , B и B_T .

но в дальнейшем (в принципе максимума) важную роль играет только часть $\partial' D \subset \partial D$, имеющая вид

$$\partial' D \stackrel{\text{def}}{=} B \cup S,$$

называемая *параболической границей*. Кроме того, важной является часть параболической границы

$$\partial'' D \stackrel{\text{def}}{=} B \cup (S \setminus \partial B_T),$$

где $\partial B_T = \partial U \otimes \{t = T\}$ — это граница верхней крышки $B_T = U \otimes \{t = T\} \subset \mathbb{R}^N \otimes \{t = T\}$.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. Пусть $u(x, t) \in \mathbb{C}_{x,t}^{2,1}(D) \cap \mathbb{C}(\bar{D})$ — решение уравнения теплопроводности

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in D \cup B_T, \quad (4.1)$$

тогда

$$\max_{(x,t) \in \bar{D}} u(x, t) = \max_{(x,t) \in \partial' D} u(x, t), \quad (4.2)$$

$$\min_{(x,t) \in \bar{D}} u(x, t) = \min_{(x,t) \in \partial' D} u(x, t). \quad (4.3)$$

Доказательство.

Прежде всего докажем, что если $u(x, t) \in \mathbb{C}_{x,t}^{2,1}(D) \cap \mathbb{C}(\bar{D})$ такое решение уравнения теплопроводности, что

$$u(x, t) \leq 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in \partial'' D, \quad (4.4)$$

то отсюда следует, что

$$u(x, t) \leq 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in D. \quad (4.5)$$

Шаг 1. Выберем константу $\gamma > 0$ и определим следующую функцию:

$$v(x, t) = u(x, t) - \frac{\gamma}{T-t}. \quad (4.6)$$

Пусть z_γ — это точка в \overline{D} , в которой $v(x, t)$ принимает максимальное положительное значение¹⁾. Прежде всего заметим, что в силу ограниченности решения $u(x, t)$ в D

$$v(z) \rightarrow -\infty \quad \text{при} \quad z \rightarrow \overline{B}_T = \{x \in \overline{U}, t = T\}.$$

Поэтому z_γ не может принадлежать замыканию верхней крышке \overline{B}_T , т. е.

$$z_\gamma \in D \cup \partial'' D.$$

Шаг 2. Если $v(z_\gamma) \geq 0$, то z_γ не может лежать в D , т. е. быть внутренней точкой цилиндрической области D .

□ Действительно, в противном случае имеем

$$\Delta v(z_\gamma) \leq 0, \quad v_t(z_\gamma) = 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Поэтому в точке z_γ выполнена следующая цепочка выражений:

$$0 = \Delta u(x, t) - u_t = \Delta v(z_\gamma) - v_t(z_\gamma) - \frac{\gamma}{(T-t)^2} \leq -\frac{\gamma}{(T-t)^2} < 0. \quad \boxtimes$$

Шаг 3. Полученное противоречие доказывает, что либо $v(z_\gamma) < 0$ в D либо $z_\gamma \in \partial'' D$ и тогда в силу (4.4) имеем $v(z_\gamma) \leq 0$. Итак, в любом случае имеем

$$v(x, t) \leq v(z_\gamma) \leq 0 \quad \text{в} \quad D \Rightarrow u(x, t) \leq \frac{\gamma}{T-t} \quad \text{для всех} \quad (x, t) \in D.$$

Поскольку $u(x, t)$ не зависит от произвольного $\gamma > 0$, то для всякого фиксированного $(x, t) \in D$ устремим $\gamma \rightarrow +0$ и получим неравенство

$$u(x, t) \leq 0 \quad \text{для всех} \quad (x, t) \in D.$$

Шаг 4. Теперь докажем равенство (4.2). Действительно, пусть

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(x,t) \in \partial' D} u(x, t), \quad v(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x, t) - M.$$

Тогда функция $v(x, t)$ удовлетворяет тоже уравнению теплопроводности

$$\Delta v - v_t = 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in D \quad \text{и} \quad v(x, t) \leq 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in \partial' D.$$

Следовательно, по доказанному имеем

$$v(x, t) \leq 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in D \Rightarrow u(x, t) \leq M \Rightarrow$$

¹⁾ Если максимальное значение неположительное, то в силу произвольности $\gamma > 0$ мы предельным переходом $\gamma \rightarrow +0$ для каждого фиксированного $(x, t) \in D$ приходим к утверждению теоремы.

$$\Rightarrow \max_{(x,t) \in \bar{D}} u(x,t) = M = \max_{(x,t) \in \partial' D} u(x,t).$$

Шаг 5. Теперь докажем равенство (4.3). Определим следующую величину:

$$m \stackrel{\text{def}}{=} \min_{(x,t) \in \partial' D} u(x,t).$$

Рассмотрим функцию

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) - m \Rightarrow v(x,t) \geq 0 \text{ на } \partial' D.$$

Итак, функция $-v(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \Delta(-v(x,t)) - (-v(x,t))_t &= 0 \text{ в } D, \\ -v(x,t) &\leq 0 \text{ на } \partial' D. \end{aligned}$$

Следовательно, по доказанному имеем

$$-v(x,t) \leq 0 \text{ в } D \Rightarrow v(x,t) \geq 0 \text{ в } D.$$

Итак,

$$u(x,t) \geq m \text{ в } D.$$

Теорема доказана.

Замечание 4. Отметим, что решение $u(x,t) \neq \text{const}$ уравнения теплопроводности

$$u_t = \Delta u$$

может достигать глобального минимального и глобального максимального значений на \bar{D} во внутренних точках области D . Действительно, рассмотрим следующий пример:

Пример. [9] Рассмотрим область $D = \{|x| < 1\} \otimes (0, T)$, в которой рассматривается уравнение теплопроводности

$$u_t = u_{xx}. \tag{4.7}$$

Пусть $t_0 \in (0, T)$, $x_0 = 2$ и введем следующую функцию:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x,t) \in \{|x| \leq 1\} \otimes [0, t_0]; \\ \mathcal{E}(x,t; x_0, t_0), & \text{если } (x,t) \in \{|x| \leq 1\} \otimes (t_0, T], \end{cases} \tag{4.8}$$

где

$$\mathcal{E}(x,t; x_0, t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vartheta(t-t_0)}{\sqrt{4\pi(t-t_0)}} \exp\left\{-\frac{|x-x_0|^2}{4(t-t_0)}\right\}, \quad x_0 = 2.$$

Ясно, что такая функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности (4.8), поскольку сшивка при $t = t_0$ является бесконечное число раз гладкой, так как $x_0 = 2$. Минимальным значением функции $u(x,t)$ является 0 и это минимальное значение достигается внутри области D . Заметим, однако, что тем не менее при $t \leq t_0$ функция

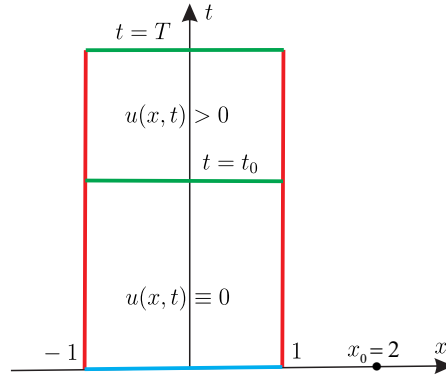


Рис. 2. К примеру.

$u(x, t) = 0$. И этот результат может быть получен в общем виде и носит название *сильного принципа максимума*.

З а м е ч а н и е 5. Отметим, что этот пример не означает, что нарушена единственность.

З а м е ч а н и е 6. Заметим, что в случае *эллиптического* оператора минимальное и максимальное значения решения $u(x) \neq const$ уравнения Лапласа

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{в } D$$

не может достигаться внутри области D . В этом серьезное отличие эллиптического случая от параболического.

З а м е ч а н и е 7. Фактически, используя методику доказательства на шагах 1–3 может быть доказано следующее первое утверждение: Если $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(D) \cap C(\bar{D})$ удовлетворяет неравенствам

$$\Delta u - u_t \geq 0 \quad \text{в } D, \quad (4.9)$$

$$u \leq 0 \quad \text{на } \partial' D, \quad (4.10)$$

то $u \leq 0$ в D . Применением этого утверждения к функции $-u(x, t)$, получим также следующее второе утверждение: Если $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(D) \cap C(\bar{D})$ удовлетворяет неравенствам

$$\Delta u - u_t \leq 0 \quad \text{в } D, \quad (4.11)$$

$$u \geq 0 \quad \text{на } \partial' D, \quad (4.12)$$

то $u \geq 0$ в D .

Прежде, чем рассматривать ниже следующие задачи, применения принципа максимума, мы предлагаем следующий рисунок цилиндрической области $D = (a, b) \otimes (0, t_0)$, причем

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{x = a\} \otimes \{0 \leq t \leq t_0\} \cup \{x = b\} \otimes \{0 \leq t \leq t_0\},$$

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{a < x < b\} \otimes \{t = 0\},$$

$$B_{t_0} \stackrel{\text{def}}{=} \{a < x < b\} \otimes \{t = t_0\},$$

причем $\partial D = S \cup B \cup B_{t_0}$, а нормальная граница или параболическая граница $\partial' D = S \cup B$. Напомним, что область $B \subset \mathbb{R}^1 \otimes \{t = 0\}$ называется нижней крышкой, область $B_{t_0} \subset \mathbb{R}^1 \otimes \{t = t_0\}$ называется верхней крышкой, а множество S называется боковой границей. Множества S , B и B_{t_0} попарно непересекаются.

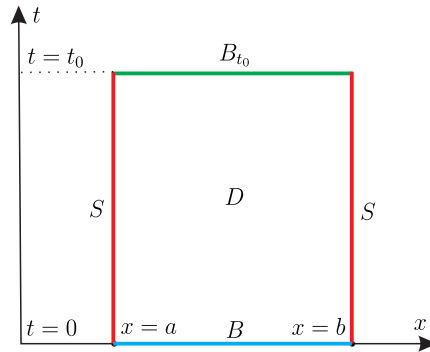


Рис. 3. К задачам.

З а м е ч а н и е 8. Заметим, что множество S является замкнутым и не связным в \mathbb{R}^2 .

З а д а ч а 1. [2] Пусть $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(\bar{D})$ — это решение в $\bar{D} = [0, 1] \otimes [0, 1]$ задачи

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \quad \text{при } (x, t) \in \bar{D}, \\ u|_{x=0} &= u|_{x=1} = 0 \quad \text{при } t > 0, \\ u|_{t=0} &\neq 0 \quad \text{при } x \in (0, 1), \end{aligned}$$

причем выполнены условия согласования $u(0, 0) = u(1, 0) = 0$. Может ли функция

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 u^2(x, t) dx$$

иметь максимум при $t \in (0, 1)$?

Р е ш е н и е. Итак, предположим, что в некоторой точке $t_0 \in (0, 1)$ достигается максимум функции $f(t)$. Поскольку $f(t) \geq 0$ и решение $u(x, t) \neq 0$, то

$$f(t_0) > 0.$$

Тогда имеет место цепочка выражений

$$f'(t_0) = 0 \Rightarrow \int_0^1 u(x, t_0) u_t(x, t_0) dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 u(x, t_0) u_{xx}(x, t_0) dx = 0.$$

Интегрируя по частям в последнем равенстве, с учетом граничных условий в рассматриваемом классе гладкости получим равенство

$$-\int_0^1 (u_x(x, t_0))^2 dx = 0 \Rightarrow u_x(x, t_0) = 0 \Rightarrow u(x, t_0) = \text{const} \quad \forall x \in [0, 1],$$

из которого опять в силу граничных условий получим $u(x, t_0) = 0$, что в свою очередь означает

$$f(t_0) = \int_0^1 u^2(x, t_0) dx = 0.$$

Но это противоречит определению точки $t_0 \in (0, 1)$.

Задача 2. [2] Пусть $u(x, t)$ — это регулярное решение в $D = (0, \pi) \otimes (0, +\infty)$ задачи

$$u_t = u_{xx}, \quad u|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad (4.13)$$

где $\varphi(0) = \varphi'(\pi) = 0$. Проверить, что

1. Выполнено ли неравенство

$$\sup_{0 < x < \pi} |u(x, 1)| \leq \sup_{0 < x < \pi} |\varphi(x)|? \quad (4.14)$$

2. Верно ли, что

$$\sup_{0 < x < \pi} |u(x, 1)| \leq \frac{1}{2} \sup_{0 < x < \pi} |\varphi(x)|? \quad (4.15)$$

Решение. Для того чтобы в дальнейшем воспользоваться принципом максимума, нам нужно получить эквивалентную задачу, но с условиями Коши–Дирихле. С этой целью продолжим функцию $u(x, t)$ четным образом через точку $x = \pi$ на множество $x \in (\pi, 2\pi)$, т.е. положим

$$\tilde{u}(x, t) = u(2\pi - x, t) \quad \text{при} \quad x \in (\pi, 2\pi) \Rightarrow \tilde{u}_x(\pi, t) = u_x(\pi, t) = 0.$$

Построенная функция является решением краевой задачи

$$\tilde{u}_t = \tilde{u}_{xx}, \quad x \in (0, 2\pi), \quad t > 0, \quad (4.16)$$

$$\tilde{u}|_{x=0} = \tilde{u}|_{x=2\pi} = 0, \quad \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{\varphi}, \quad (4.17)$$

где функция $\tilde{\varphi}(x)$ четным образом продолженная на интервал $(\pi, 2\pi)$. Задачи (4.13) и (4.16), (4.17) эквивалентны. Теперь мы можем применить принцип максимума и получить, что максимум модуля функции $\tilde{u}(x, t)$ достигается при $t = 0$, поскольку на боковой границе при $x = 0$ и $x = 2\pi$ $\tilde{u}(x, t) = 0$. Итак,

$$\sup_{0 < x < \pi} |u(x, 1)| = \sup_{0 < x < 2\pi} |\tilde{u}(x, 1)| \leq \sup_{0 < x < 2\pi} |\tilde{\varphi}(x)| = \sup_{0 < x < \pi} |\varphi(x)|. \quad (4.18)$$

Тем самым утверждение (4.14) доказано.

Неравенство (4.15) неверно. Действительно, возьмем

$$\varphi(x) = \sin(x/2),$$

которому соответствует решение ¹⁾

$$u(x, t) = e^{-t/4} \sin(x/2) \Rightarrow \sup_{0 < x < \pi} |u(x, 1)| = e^{-1/4}, \quad \sup_{0 < x < \pi} |\varphi(x)| = 1.$$

Заметим, что

$$e^{-1/4} > \frac{1}{2},$$

поскольку $e < 2^4$.

Задача 3. [2] Пусть $D = (0, 1) \otimes (0, 1)$. Существует ли функция $u(x, t) \in \mathbb{C}_{x,t}^{2,1}(D) \cap \mathbb{C}(\bar{D})$ — решение следующей первой краевой задачи:

$$u_t = u_{xx} \quad \text{в } D, \quad (4.19)$$

$$u|_{t=0} = 2 \sin \pi x \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1, \quad (4.20)$$

$$u|_{x=0} = \sin \pi t, \quad u|_{x=1} = \sin \pi t + 2 \sin \pi t \quad \text{при } 0 < t \leq 1, \quad (4.21)$$

$$u|_{t=1} = 3 \sin \pi x \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1? \quad (4.22)$$

Решение. Эта задача для самостоятельного решения.

Задача 4. [2] Существует ли решение $u(x, t) \in \mathbb{C}_{x,t}^{2,1}(\bar{Q})$ задачи

$$u_t = u_{xx} + 1 \quad \text{в } \bar{Q}, \quad Q = \{(x, t) : x^2 + t^2 < 1\}, \quad (4.23)$$

$$xu_x = tu \quad \text{при } (x, t) \in \partial Q = \{(x, t) : x^2 + t^2 = 1\}? \quad (4.24)$$

Решение. Используя формулу Грина в \mathbb{R}^2 , получим равенства

$$\int_Q u_t \, dx \, dt = \int_{\partial Q} u(x, t) \cos(n_{x,t}, e_t) \, dl, \quad (4.25)$$

$$\int_Q u_{xx} \, dx \, dt = \int_{\partial Q} u_x(x, t) \cos(n_{x,t}, e_x) \, dl, \quad (4.26)$$

где $n_{x,t}$ — это внешняя нормаль в точке $(x, t) \in \partial Q$. Легко проверить, что

$$n_{x,t} = (x, t), \quad \cos(n_{x,t}, e_t) = t, \quad \cos(n_{x,t}, e_x) = x.$$

Поэтому интегрируя обе части уравнения (4.23), мы получим равенство

$$\int_{\partial Q} u(x, t)t \, dl = \int_{\partial Q} u_x(x, t)x \, dl + 2\pi,$$

¹⁾ Полученное методом разделенных переменных.

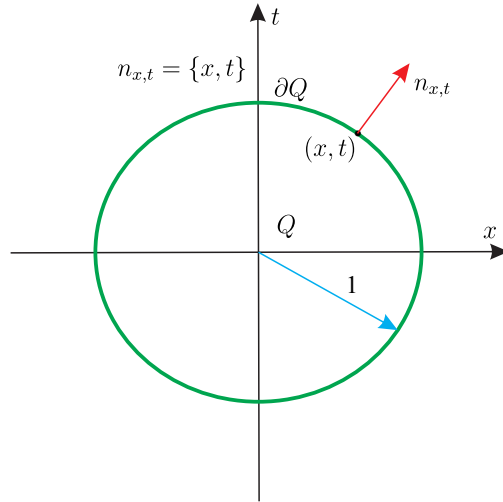


Рис. 4. К задаче 4.

а с учетом граничного условия (4.24) мы получим противоречивое равенство

$$0 = 2\pi.$$

Задача 5. [2] Пусть функции $u_k(x, t) \in \mathbb{C}_{x,t}^{2,1}(D_k) \cap \mathbb{C}(\bar{D}_k)$, $k = 1, 2$, являются решениями в

$$D_k \stackrel{\text{def}}{=} (-k, k) \otimes (0, T)$$

краевых задач

$$(u_k)_t = (u_k)_{xx}, \quad u_k|_{x=\pm k} = 0, \quad u_k|_{t=0} = \varphi(x), \quad |x| \leq k. \quad (4.27)$$

Здесь $\varphi(x) \in \mathbb{C}^{(1)}([-2, 2])$, $\varphi(x) \geq 0$ при $|x| \leq 1$ и $\varphi(x) = 0$ при $1 \leq |x| \leq 2$, $\varphi(x) \not\equiv 0$. Доказать, что

$$u_1(x, t) \leq u_2(x, t) \quad \text{при} \quad (x, t) \in [-1, 1] \otimes (0, T]. \quad (4.28)$$

Решение. Прежде всего заметим, что в силу принципа максимума $u_k(x, t) \geq 0$ в D_k . Рассмотрим разность

$$v(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} u_2(x, t) - u_1(x, t).$$

Введенная функция удовлетворяет задаче

$$v_t = v_{xx}, \quad v|_{x=\pm 1} > 0, \quad v|_{t=0} = 0. \quad (4.29)$$

В силу принципа максимума имеем $v(x, t) \geq 0$ в D , т. е. выполнено неравенство (4.28).

Задача 6*. ¹⁾ [2] Функция $u(x, t) \not\equiv \text{const}$ удовлетворяет уравнению

$$u_t = u_{xx}$$

в области $D \equiv \{(x, t) : 0 < t < T, 0 < x < 5 - \exp(-t)\}$. Доказать, что глобальный максимум этой функции на \bar{D} не может достигаться ни во внутренних точках области D , ни при $t = T$.

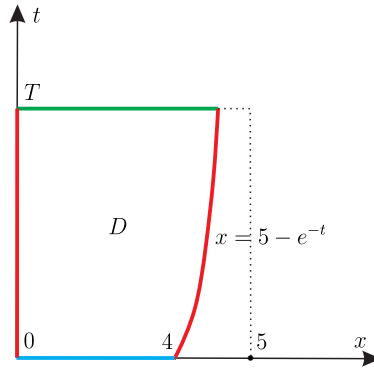


Рис. 5. К задаче 6.

Указание. Проследите доказательство теоремы 3. Можно и в данном случае не цилиндрической области доказать принцип максимума рассматривая функцию

$$v(x, t) := u(x, t) - \frac{\gamma}{T - t}.$$

Решение. Эта задача для самостоятельной работы.

Задача 7. [2], [4] Пусть $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(D) \cap C(\bar{D})$ является решением уравнения

$$u_t = \Delta u + f(x), \quad f(x) \geq 0 \quad \text{при } (x, t) \in D, \quad (4.30)$$

$$u(x, t) = 0 \quad \text{при } (x, t) \in \partial' D. \quad (4.31)$$

Докажите, что $u_t(x, t) \geq 0$ в D .

Решение. Итак, в области D выполнено неравенство

$$\Delta u - u_t \leq 0,$$

тогда с учетом второго утверждения в замечании 7 и равенства (4.31) получим, что выполнено неравенство

$$u(x, t) \geq 0 \quad \text{в } D. \quad (4.32)$$

¹⁾ Эта задача повышенной сложности.

Рассмотрим функцию

$$w(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x, t + \varepsilon) - u(x, t), \quad \varepsilon > 0. \quad (4.33)$$

Эта функция удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$w_t = \Delta w \quad \text{в} \quad D_\varepsilon = U \otimes (0, T - \varepsilon), \quad (4.34)$$

причем

$$w(x, t) = u(x, t + \varepsilon) \geq 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in \partial' D_\varepsilon, \quad (4.35)$$

поскольку

$$u(x, t) = 0 \quad \text{на} \quad \partial' D \supset \partial' D_\varepsilon.$$

Применяя теперь второе утверждение из замечания 7, получим

$$\begin{aligned} w(x, t) \geq 0 \quad \text{в} \quad D_\varepsilon &\Rightarrow \frac{u(x, t + \varepsilon) - u(x, t)}{\varepsilon} \geq 0 \quad \text{в} \quad D_\varepsilon \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{u(x, t + \varepsilon) - u(x, t)}{\varepsilon} = u_t(x, t) \geq 0 \quad \text{в} \quad D. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Задача 8. Вариант неравенства Чебышева. [4] Пусть $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(D) \cap C(\bar{D})$ является решением дифференциального неравенства

$$\Delta u - u_t \geq 0 \quad \text{в} \quad D = \Omega \otimes (0, T). \quad (4.37)$$

Предположим, что

$$u(x, t) \leq 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in S = \partial\Omega \otimes [0, T], \quad (4.38)$$

$$u(x, t) \leq 1 \quad \text{при} \quad (x, t) \in \bar{B} = \bar{\Omega} \otimes \{t = 0\}. \quad (4.39)$$

Пусть $v = v(x)$ — это гладкая неотрицательная функция в $\bar{\Omega}$ такая, что

$$\Delta v(x) \leq -1 \quad \text{при} \quad x \in \Omega. \quad (4.40)$$

Доказать, что

$$u(x, t) \leq \frac{v(x)}{t} \quad \text{при} \quad (x, t) \in D. \quad (4.41)$$

Решение. Прежде всего заметим, что в силу принципа максимума имеем ¹⁾

$$u(x, t) \leq 1 \quad \text{при} \quad (x, t) \in D. \quad (4.42)$$

Рассмотрим следующую вспомогательную функцию:

$$w(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x, t) - \frac{v(x)}{t}. \quad (4.43)$$

Прежде всего применим к этой функции оператор

$$\Delta - \frac{\partial}{\partial t}$$

¹⁾ Нужно применить утверждение 1 замечания 7 к функции $u(x, t) - 1$.

и получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Delta w - w_t &= \Delta u - u_t - \frac{\Delta v(x)}{t} - \frac{v(x)}{t^2} \geq \\ &\geq -\frac{\Delta v(x)}{t} - \frac{v(x)}{t^2} \geq \frac{1}{t^2} (t - v(x)). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Разобьем область D на три части

$$\begin{aligned} D &= D_1 \cup D_2 \cup D_3, \\ D_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \{(x, t) \in D : v(x) > t\}, \quad D_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, t) \in D : v(x) < t\}, \\ D_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \{(x, t) \in D : v(x) = t\}. \end{aligned}$$

На множестве D_1 выполнено неравенство

$$\frac{v(x)}{t} > 1 \geq u(x, t) \Rightarrow w(x, t) \leq 0. \quad (4.45)$$

На множестве $D_2 \cup D_3$ в силу (4.44) выполнено неравенство

$$v(x) \leq t \Rightarrow \Delta w - w_t \geq 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in D_2 \cup D_3. \quad (4.46)$$

Теперь заметим, что в силу определения (4.43) функции $w(x, t)$ и неравенств (4.38), (4.39) на параболической границе $\partial' D = S \cup \bar{B}$ области D выполнено неравенство

$$w(x, t) \leq 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in \partial' D. \quad (4.47)$$

Часть границы множества $D_2 \cup D_3$, не входящая в $\partial' D$ совпадает с $D_3 \setminus D$ и на множестве D_3 имеет место следующее неравенство:

$$w(x, t) = u(x, t) - \frac{v(x)}{t} \leq 1 - 1 = 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in D_3. \quad (4.48)$$

Итак, в силу утверждения 1 из замечания 7 мы из неравенств (4.46), (4.47) и (4.48) получим неравенство

$$w(x, t) = u(x, t) - \frac{v(x)}{t} \leq 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in D_2. \quad (4.49)$$

Следовательно, объединяя неравенства (4.45), (4.48) и (4.49), получим неравенство

$$w(x, t) \leq 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in D.$$

Задача 9. [2] Справедлив ли принцип максимума в области $D = \Omega \otimes (0, T)$ для обратного параболического уравнения

$$u_t + \Delta u = 0 \quad (4.50)$$

в том виде, в каком он справедлив для уравнения теплопроводности?

Ответ. Нет.

Решение. Глобальный максимум и минимум функции $u(x, t) \in \mathbb{C}_{x,t}^{2,1}(D) \cap \mathbb{C}(\bar{D})$ может достигаться при $(x, t) \in B_T \cup S$. Таким обра-

зом, в *принципе максимума* для уравнения (4.50) нужно заменить B на B_T .

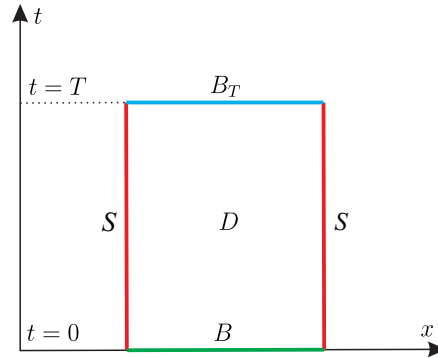


Рис. 6. К задаче 9.

Задача для самостоятельного решения 1. Пусть $u(x, t) \in \mathbb{C}_{x,t}^{2,1}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ и, кроме того, $f(x, t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$. Рассмотрите неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t - \Delta u = f(x, t) \quad \text{при} \quad (x, t) \in D = \Omega \otimes (0, T),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей. Докажите, что имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \min_{(x,t) \in \partial' D} u(x, t) - T \max_{(x,t) \in \overline{D}} |f(x, t)| &\leq u(x, t) \leq \\ &\leq \max_{(x,t) \in \partial' D} u(x, t) + T \max_{(x,t) \in \overline{D}} |f(x, t)|. \end{aligned}$$

Указание. Необходимо рассмотреть следующие две функции:

$$\begin{aligned} v_1(x, t) &\stackrel{\text{def}}{=} u(x, t) + tK, & v_2(x, t) &\stackrel{\text{def}}{=} u(x, t) - tK, \\ K &\stackrel{\text{def}}{=} \max_{(x,t) \in \overline{D}} |f(x, t)|. \end{aligned}$$

§ 5. Слабый принцип максимума для задачи Коши

Сейчас мы рассмотрим важный *слабый принцип максимума* для задачи Коши для уравнения теплопроводности, который позволит доказать, как его следствие, единственность решения задачи Коши. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 4. Пусть $u(x, t) \in \mathbb{C}_{x,t}^{2,1}(\mathbb{R}^N \otimes (0, T]) \cap \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes [0, T])$ — это решение задачи Коши

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0, T), \quad (5.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (5.2)$$

удовлетворяющее условию роста

$$u(x, t) \leq M e^{\beta|x|^2} \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [0, T], \quad (5.3)$$

где $M > 0$ и $\beta > 0$ — это константы. Тогда

$$\sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0, T]} u(x, t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} g(x). \quad (5.4)$$

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего допустим, что

$$4\beta T < 1 \Rightarrow 4\beta(T + \varepsilon) < 1 \quad (5.5)$$

при некотором малом $\varepsilon > 0$. Фиксируем $y \in \mathbb{R}^N$, $\mu > 0$ и определим функцию

$$v(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{N/2}} \exp\left(\frac{|x - y|^2}{4(T + \varepsilon - t)}\right) \quad (5.6)$$

при $x \in \mathbb{R}^N$ и $t > 0$. Прямым вычислением можно показать ¹⁾, что

$$v_t - \Delta v = 0 \quad \text{при } (x, t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0, T]. \quad (5.7)$$

Шаг 2. Фиксируем $r > 0$ и положим

$$U \stackrel{\text{def}}{=} B(y, r), \quad D = B(y, r) \otimes (0, T), \quad B(y, r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^N : |x - y| < r\}.$$

В силу теоремы 3 имеем

$$\max_{(x,t) \in \bar{D}} v(x, t) = \max_{(x,t) \in \partial' D} v(x, t). \quad (5.8)$$

Шаг 3. Если $x \in \mathbb{R}^N$ и $t = 0$ то

$$v(x, 0) = u(x, 0) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{N/2}} \exp\left(\frac{|x - y|^2}{4(T + \varepsilon)}\right) \leq u(x, 0) = u_0(x). \quad (5.9)$$

Если $(x, t) \in S$, т. е. $|x - y| = r$ и $t \in [0, T]$, то

$$|x| \leq |x - y| + |y| = r + |y|$$

и имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{N/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T + \varepsilon - t)}\right) \leq \\ &\leq M \exp(\beta|x|^2) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{N/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T + \varepsilon - t)}\right) \leq \\ &\leq M \exp(\beta(|y| + r)^2) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{N/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T + \varepsilon)}\right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

¹⁾ Поскольку $t \in [0, T]$, а $\varepsilon > 0$, то сингулярности как у фундаментального решения у функции $v(x, t)$ на сегменте $[0, T]$ нет.

В силу неравенства (5.5) при некотором $\gamma > 0$ имеет место равенство

$$\frac{1}{4(T + \varepsilon)} = \beta + \gamma.$$

Пусть

$$c_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u_0(x) \in (-\infty, +\infty). \quad (5.11)$$

Продолжим оценивать правую часть неравенства (5.10) и получим

$$\begin{aligned} v(x, t) &\leq \\ &\leq M \exp\left(\beta(|y| + r)^2\right) - \mu(4(\beta + \gamma))^{N/2} \exp((\beta + \gamma)r^2) \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (5.12)$$

при $r \rightarrow +\infty$. Следовательно, при достаточно большом $r > 0$ будет выполнено неравенство

$$M \exp\left(\beta(|y| + r)^2\right) - \mu(4(\beta + \gamma))^{N/2} \exp((\beta + \gamma)r^2) \leq c_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u_0(x).$$

Итак, при некотором таком $r > 0$ будем иметь

$$v(x, t) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u_0(x). \quad (5.13)$$

Шаг 4. Итак, в силу (5.9), (5.13) и (5.8) имеем

$$v(y, t) \leq \sup_{(x, t) \in D} v(x, t) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u_0(x)$$

для всех $y \in \mathbb{R}^N$ и $t \in [0, T]$. Переходя к пределу при $\mu \rightarrow +0$ мы получим утверждение теоремы.

Шаг 5. Если условие (5.5) не выполняется, тогда нужно применить схему доказательства на временных интервалах

$$[0, T_1], \quad [T_1, 2T_1], \dots, [(n-1)T_1, nT_1], \dots,$$

при $T_1 = 1/(8\beta)$. При этом на втором шаге, например, начальным условием является функция $u(x, T_1)$. И мы в результате получим следующую цепочку неравенств:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} u_0(x) \geq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(x, T_1) \geq \dots \geq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(x, nT_1) \geq u(x, t)$$

при $t \in [nT_1, (n+1)T_1]$ и $x \in \mathbb{R}^N$.

Теорема доказана.

Следствие 1. При условиях теоремы и неравенства

$$u(x, t) \geq -Me^{\beta|x|^2} \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [0, T]$$

выполнено следующее равенство:

$$\inf_{(x, t) \in \mathbb{R}^N} u(x, t) = \inf_{x \in \mathbb{R}^N} u_0(x).$$

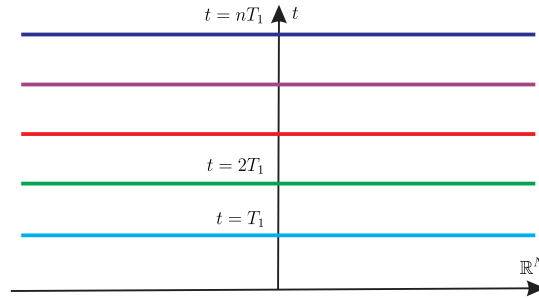


Рис. 7. К шагу 5.

Доказательство. Действительно, достаточно рассмотреть вместо функции $u(x, t)$ функцию $-u(x, t)$.

Следствие доказано.

Следствие 2. Пусть выполнено неравенство

$$|u(x, t)| \leq M e^{\beta|x|^2} \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [0, T]$$

при $M > 0$ и $\beta > 0$. Если $u(x, 0) \leq 0$, то $u(x, t) \leq 0$ для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0, T]$. Если $u(x, 0) \geq 0$, то $u(x, t) \geq 0$ для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0, T]$.

Доказательство. Действительно, в силу теоремы справедлива следующая цепочка неравенств:

$$u(x, t) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u_0(x) \leq 0 \quad \text{для всех } (x, t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0, T].$$

Аналогично в силу следствия 1 приходим ко второму утверждению.

Следствие доказано.

Задача 10. [4] Пусть функция $u(x, t) \in \mathbb{C}_{x,t}^{2,1}(D)$ удовлетворяет условию роста (5.3) и является решением задачи Коши

$$u_t = \Delta u \quad \text{в } D = (0, T) \otimes \mathbb{R}^N, \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{в } x \in \mathbb{R}^N, \quad (5.14)$$

причем начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leq a|x - y|^\delta, \quad \delta \in (0, 1). \quad (5.15)$$

Тогда

$$|u(x, t) - u(y, t)| \leq a|x - y|^\delta \quad \text{при } t \in (0, T). \quad (5.16)$$

Кроме того,

$$|u(x, t) - u(x, s)| \leq b|t - s|^{\delta/2} \quad \text{при } t, s \in (0, T), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (5.17)$$

Решение. Доказательство проведем за несколько шагов.

Шаг 1. Прежде всего введем функцию

$$w(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x + y, t) - u(x, t) \quad (5.18)$$

при фиксированном $y \in \mathbb{R}^N$. Эта функция удовлетворяет уравнению

$$w_t = \Delta w, \quad w(x, 0) = u_0(x + y) - u_0(x), \quad |w(x, 0)| \leq a|y|^\delta.$$

Введем две функции

$$v_1(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} w(x, t) - a|y|^\delta, \quad v_2(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} w(x, t) + a|y|^\delta.$$

Эти функции удовлетворяют задачам

$$\begin{aligned} v_{kt} &= \Delta v_k, \quad k = 1, 2, \\ v_1(x, 0) &\leq 0, \quad v_2(x, 0) \geq 0. \end{aligned}$$

Применяя слабый принцип максимума (следствие 2), мы получим, что

$$v_1(x, t) \leq 0, \quad v_2(x, t) \geq 0 \quad \text{в } D.$$

Следовательно,

$$|w(x, t)| \leq a|y|^\delta. \quad (5.19)$$

Шаг 2. Теперь мы можем доказать неравенство (5.17). Действительно, введем следующую функцию:

$$w(x, t; y, s) \stackrel{\text{def}}{=} u(x, t + s) - u(y, s). \quad (5.20)$$

При $t = 0$ по доказанному имеем

$$|w(x, 0; y, s)| = |u(x, s) - u(y, s)| \leq a|x - y|^\delta. \quad (5.21)$$

Заметим, что из арифметического неравенства Юнга

$$a_1 a_2 \leq \frac{1}{q_1} a_1^{q_1} + \frac{1}{q_2} a_2^{q_2}, \quad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1, \quad a_1, a_2 \geq 0$$

вытекает арифметическое трехпараметрическое неравенство Юнга

$$a_1 a_2 \leq \varepsilon a_1^{q_1} + \mu(\varepsilon) a_2^{q_2}, \quad \mu(\varepsilon) = \frac{1}{q_2 (q_1 \varepsilon)^{q_2/q_1}}. \quad (5.22)$$

Применяя неравенство (5.22) при

$$q_1 = \frac{2}{\delta}, \quad q_2 = \frac{2}{2 - \delta},$$

мы получим следующее неравенство:

$$a|x - y|^\delta \leq \varepsilon|x - y|^2 + \mu(\varepsilon), \quad \mu = \mu(\varepsilon) = \frac{c_1}{\varepsilon^{\delta/(2-\delta)}}, \quad \delta \in (0, 1). \quad (5.23)$$

Используя это неравенство из (5.21), мы получим следующее неравенство:

$$-\varepsilon|x - y|^2 - \mu(\varepsilon) \leq u(x, s) - u(y, s) \leq \varepsilon|x - y|^2 + \mu(\varepsilon), \quad (5.24)$$

причем выполнено двустороннее неравенство

$$-\varepsilon v(x, 0; y) - \mu(\varepsilon) \leq w(x, 0; y, s) \leq \varepsilon v(x, 0; y) + \mu(\varepsilon), \quad (5.25)$$

где функция

$$v(x, t; y) = |x - y|^2 + 2Nt$$

при фиксированном $y \in \mathbb{R}^N$ является решением уравнения теплопроводности. Поэтому в силу принципа максимума ¹⁾ получим, что имеет место неравенство

$$-\varepsilon(|x - y|^2 + 2Nt) - \mu(\varepsilon) \leq w(x, t; y, s) \leq \varepsilon(|x - y|^2 + 2Nt) + \mu(\varepsilon). \quad (5.26)$$

Шаг 3. Положим в этом неравенстве $x = y$ и получим неравенства

$$-\varepsilon 2Nt - \mu(\varepsilon) \leq u(x, t + s) - u(x, s) \leq \varepsilon 2Nt + \mu(\varepsilon). \quad (5.27)$$

Осталось выбрать оптимальное $\varepsilon > 0$. Возьмем

$$\varepsilon = \frac{1}{t^\alpha}.$$

Рассмотрим выражение

$$2Nt^{1-\alpha} + c_1 t^{\alpha\delta/(2-\delta)}, \quad (5.28)$$

в котором мы положим

$$1 - \alpha = \alpha \frac{\delta}{2 - \delta} \Rightarrow \alpha = \frac{2 - \delta}{2}.$$

В результате выражение (5.28) примет следующий вид:

$$(2N + c_1)t^{\delta/2}. \quad (5.29)$$

Итак, неравенства (5.27) примут следующий вид:

$$|u(x, t + s) - u(x, s)| \leq bt^{\delta/2}, \quad b = 2N + c_1. \quad (5.30)$$

З а м е ч а н и е 9. Комбинируя неравенства (5.16) и (5.17) мы приходим к следующему неравенству:

$$|u(x, t) - u(y, s)| \leq c_2 \left(|x - y|^\delta + |t - s|^{\delta/2} \right). \quad (5.31)$$

И это итоговое неравенство является следствием лишь условия (5.15) на начальную функцию $u_0(x)$ и принципа максимума!

§ 6. Единственность решения задачи Коши

Теперь мы можем доказать важный результат, доказанный А. Н. Тихоновым [11], о единственности решения задачи Коши при дополнительном условии, которое мы уже ввели, на рост решения при $|x| \rightarrow +$

¹⁾ Нужно опять рассмотреть две функции: $w_1 = w - \varepsilon v - \mu(\varepsilon)$ и $w_2 = w + \varepsilon v + \mu(\varepsilon)$, и воспользоваться следствием 2.

$+\infty$, называемым условием А. Н. Тихонова. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 5. Пусть $u_0(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N)$, $f(x, t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes [0, T])$. Тогда существует не более одного решения $u(x, t) \in \mathbb{C}_{x,t}^{2,1}(\mathbb{R}^N \otimes (0, T]) \cap \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes [0, T])$ задачи Коши

$$u_t - \Delta u = f(x, t) \quad \text{при } (x, t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0, T), \quad (6.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^N \quad (6.2)$$

в классе А. Н. Тихонова

$$|u(x, t)| \leq M \exp(\beta|x|^2) \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [0, T], \quad (6.3)$$

где $M > 0$ и $\beta > 0$ — константы.

Доказательство.

Пусть утверждение не выполнено и существует два различных решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$. Тогда рассмотрим функцию

$$w_1(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} u_1(x, t) - u_2(x, t),$$

которая удовлетворяет соответствующей однородной задаче Коши и условию

$$w_1(x, t) \leq 2M \exp(\beta|x|^2), \quad w_1(x, 0) = 0,$$

причем константа M значения не имеет. Поэтому в силу теоремы 4 имеем

$$w_1(x, t) \leq 0.$$

Теперь рассмотрим функцию

$$w_2(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} u_2(x, t) - u_1(x, t) = -w_1(x, t)$$

и точно также получим, что

$$w_2(x, t) \leq 0.$$

Следовательно,

$$u_1(x, t) = u_2(x, t).$$

Теорема доказана.

Замечание о классе единственности А. Н. Тихонова. Отметим, что есть результаты, которые говорят о том, что существует бесконечно много решений однородной задачи Коши

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{при } (x, t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0, T), \quad (6.4)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^N. \quad (6.5)$$

А. Н. Тихонов предложил пример к теореме единственности о том, что условие роста А. Н. Тихонова нельзя заменить на более слабое вида

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u(x, t)| \exp[-k|x|^{2+\varepsilon}] dx dt < +\infty \quad \text{при } \varepsilon > 0. \quad (6.6)$$

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t \in [0, 1], \quad u(x, 0) = 0 \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^1. \quad (6.7)$$

Будем искать решения задачи Коши (6.7) в классе

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^1} |u(x, t)| \exp[-k|x|^{2+\varepsilon}] dx dt < +\infty \quad \text{при } \varepsilon > 0. \quad (6.8)$$

В качестве решения возьмем ряд следующего вида:

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(m)}(t)}{(2m)!} x^{2m}. \quad (6.9)$$

Можно проверить, что формально ряд (6.9) является решением уравнения теплопроводности.

Известно, что для любого $\delta > 0$ существуют бесконечно дифференцируемые функции $f(t)$, тождественно не равные нулю, удовлетворяющие условиям

$$f(t) = 0, \quad \text{если } t < 0 \text{ и } t > 1, \quad |f^{(m)}(t)| \leq C^m m^{(1+\delta)m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Ряд (6.9) и его производные первого порядка по t и второго порядка по x сходятся равномерно в любой ограниченной области переменных (x, t) при условии $\delta < 1$. При этом имеет место следующие неравенства:

$$|u(x, t)| \leq C_1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{C_2^m x^{2m}}{m^{2m-(1+\delta)m}} \leq C_3 \exp[C_4|x|^{2/(1-\delta)}].$$

Каждое такое решение, за исключением $u(x, t) \equiv 0$, растёт «очень быстро» при $|x| \rightarrow +\infty$.

Задача 11. [2] Пусть $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(\mathbb{R}^1 \otimes (0, T)) \cap C_b(\mathbb{R}^1 \otimes [0, T])$ — неотрицательное ограниченное решение уравнения теплопроводности

$$u_t = \Delta u \quad \text{в } \mathbb{R}^3 \otimes (0, T), \quad (6.10)$$

причем

$$u(x, t) = 0 \quad \text{при } (x, t) \in (0, 1) \otimes (0, T). \quad (6.11)$$

Доказать, что $u(x, t) = 0$ в слое $\mathbb{R}^3 \otimes (0, T)$.

Решение. Это задача для самостоятельного решения.

Список литературы

1. Боголюбов А. Н., Кравцов В. В., Свешников А. Г. Лекции по математической физике. М.: Издательство МГУ; Наука, 2004.— 416 с.
2. Вентцель Т. Д., Горицкий А. Ю., Капустина Т. О. и др. Сборник задач по уравнениям с частными производными. Под редакцией А. С. Шамаева. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005, 158 с.
3. Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа// УМН, 17:3(105), 1962, 3–146 с.
4. Крылов Н. В. Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гельдера. Новосибирск: Научная книга, 1998, 178 с.
5. Крылов Н. В. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. Москва: Наука, 1985, 376 с.
6. Кудряшов Н. А. Методы нелинейной математической физики. Издательский дом «Интеллект», 2010.— 368 с.
7. Ландис Е. М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. Москва: Наука, 1971, 288 с.
8. Нефедов Н. Н. Дополнительные главы к курсу Методы математической физики. "Нелинейные эллиптические уравнения. Метод дифференциальных неравенств.". Москва: Изд-во физического факультета МГУ, 1998.
9. Олейник О. А. Лекции об уравнениях с частными производными. I часть. Москва: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2005. — 252 с.
10. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. Москва: Наука, 1987, 480 с.
11. Тихонов А. Н. Теорема единственности для уравнения теплопроводности// Мат. сборник.— 1935.— т. 42, N 2, — с. 189–216.
12. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. Москва: Мир, 1968, 428 с.
13. Эванс Л. К. Уравнения с частными производными. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003, 562 с. — (Университетская серия; Т. 7).
14. *Hu Bei* Blow-up theories for semilinear parabolic equations. Lecture Notes in Mathematics, 2018. Springer, Heidelberg, 2011. 125 pp.
15. *Krylov N. V.* Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces. Graduate Studies in Mathematics Volume 96 American Mathematical Society. 2000, 374 pp.
16. *Patrizia Pucci, James Serrin* The Maximum Principle. Birkhauser, Basel–Boston–Berlin. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Volume 73. 2007, 240 pp.
17. *Protter M. H., Weinberger H. F.* Maximum principles in differential equations. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1967, 261 pp.

18. *Vicentiu D. Radulescu* Qualitative Analysis of Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations: Monotonicity, Analytic, and Variational Methods. Hindawi Publishing Corporation. 2008, 205 pp.
19. *Vazquez J. L.* The porous medium equation. Mathematical theory. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007, 624 pp.
20. *Zhuoqun Wu, Jingxue Yin, Chunpeng Wang* Elliptic and Parabolic Equations. World Scientific. 2006, 425 pp.