Лекция 4

# ФУНКЦИЯ ГРИНА

## § 1. Вторая формула Грина

Рассмотрим открытое ограниченное множество $U \subset \mathbb{R}^N$ с достаточно «гладкой» границей $\partial U$. Наша задача вывести формулу представления решения уравнения Пуассона

$$\Delta u(x) = f(x) \quad \text{в} \quad U \tag{1.1}$$

при заданном граничном условии

$$u(x) = g(x) \quad \text{на} \quad \partial U. \tag{1.2}$$

Рассмотрим произвольную функцию $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{U})$. Зафиксируем точ-

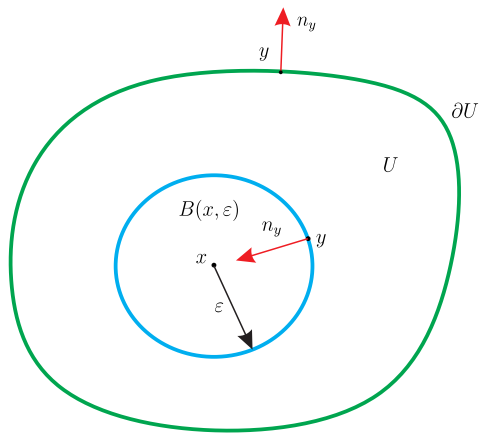


Рис. 1. Область $V_\varepsilon$.

ку $x \in U$ и выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, что $B(x,\varepsilon) \subset U$. Применим формулу Грина (**??**), имеющую следующий вид:

$$\int\limits_V [u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)]\, dx =$$

$$= \int\limits_{\partial V} \left[ u(y) \frac{\partial v(y)}{\partial n_y} - v(y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right] dS_y \quad (1.3)$$

к функциям $u = u(y)$ и $v(y) = \mathcal{E}_N(y-x)$ для области

$$V = V_\varepsilon \stackrel{def:}{=} U \backslash \overline{B(x,\varepsilon)}.$$

Находим

$$\int\limits_{V_\varepsilon} [u(y)\Delta_y \mathcal{E}_N(y-x) - \mathcal{E}_N(y-x)\Delta u(y)] \, dy =$$

$$= \int\limits_{\partial V_\varepsilon} \left[ u(y) \frac{\partial \mathcal{E}_N(y-x)}{\partial n_y} - \mathcal{E}_N(y-x) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right] dS_y, \quad (1.4)$$

где $n_y$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial V_\varepsilon$. Напомним, что по построению фундаментальное решение $\mathcal{E}_N(y-x)$ при $y \neq x$ удовлетворяет равенству

$$\Delta_y \mathcal{E}_N(y-x) = 0.$$

Кроме того, заметим, что

$$\left| \int\limits_{\partial B(x,\varepsilon)} \mathcal{E}_N(y-x) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \, dS_y \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{B(x,\varepsilon)} |D_x u(x)| \omega_N \varepsilon^{N-1} \begin{cases} c_N \varepsilon^{2-N}, & \text{если} \quad N \geqslant 3; \\ c_2 |\ln \varepsilon|, & \text{если} \quad N = 2. \end{cases} \to +0 \quad (1.5)$$

при $\varepsilon \to +0$. Справедлива следующие равенства:

$$D_y \mathcal{E}_N(y-x) = \frac{1}{\omega_N} \frac{y-x}{|y-x|^N} \quad \text{и} \quad n_y = \frac{y-x}{|y-x|} = \frac{y-x}{\varepsilon} \quad \text{на} \quad \partial B(x,\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \mathcal{E}_N(y-x)}{\partial n_y} = (n_y, D_y \mathcal{E}_N(y-x)) = \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \quad \text{на} \quad \partial B(x,\varepsilon).$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y) \frac{\partial \mathcal{E}_N(y-x)}{\partial n_y} \, dS_y = \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int\limits_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y) \, dS_y \to u(x) \quad (1.6)$$

при $\varepsilon \to +0$. Полагая $\varepsilon \to +0$ в равенстве (1.4) получим следующее равенство:

$$u(x) =$$

$$= \int\limits_{\partial U} \left[ \mathcal{E}_N(y-x) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} - u(y) \frac{\partial \mathcal{E}_N(y-x)}{\partial n_y} \right] dS_y - \int\limits_{U} \mathcal{E}_N(y-x) \Delta_y u(y)\, dy, \tag{1.7}$$

которое справедливо для любых $x \in U$ и $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{U})$. Формула (1.7) носит название *третьей формулой Грина*.

Полученная формула позволяет найти $u(x)$ зная значения $\Delta u$ внутри области $U$ и значения $u$, $\partial u/\partial n$ на границе области $\partial U$.

Однако формулу нужно модифицировать для задачи Дирихле, [1]) поскольку мы не знаем значения нормальной производной на границе в этом случае. С этой целью нужно ввести корректирующую функцию $\varphi^x = \varphi^x(y)$ как решение следующей краевой задачи:

$$\Delta_y \varphi^x(y) = 0 \quad \text{при} \quad y \in U, \quad \varphi^x(y) = \mathcal{E}_N(y-x) \quad \text{при} \quad y \in \partial U. \tag{1.8}$$

Применив снова вторую формулу Грина (1.3), в которой нужно взять

$$u = u(y) \quad \text{и} \quad v(y) = \varphi^x(y).$$

В результате получим следующие равенства:

$$- \int\limits_{U} \varphi^x(y) \Delta_y u(y)\, dy = \int\limits_{\partial U} \left[ u(y) \frac{\partial \varphi^x(y)}{\partial n_y} - \varphi^x(y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right] dS_y =$$
$$= \int\limits_{\partial U} \left[ u(y) \frac{\partial \varphi^x(y)}{\partial n_y} - \mathcal{E}_N(y-x) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right] dS_y. \tag{1.9}$$

Дадим определение.

Определение 1. *Функцией Грина задачи Дирихле для области $U$ называется функция*

$$G(x,y) \stackrel{def:}{=} \mathcal{E}_N(y-x) - \varphi^x(y), \quad x, y \in U, \quad x \neq y. \tag{1.10}$$

Складывая равенства (1.7) и (1.9), получим следующее равенство:

$$u(x) = - \int\limits_{\partial U} u(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} dS_y - \int\limits_{U} G(x,y) \Delta_y u(y)\, dy, \quad x \in U. \tag{1.11}$$

Таким образом, нами доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Если $u(x) \in \mathbb{C}^{(2)}(\overline{U})$ — это решение задачи Дирихле* (1.1), (1.2), *то справедливо следующее равенство*:

$$u(x) = - \int\limits_{\partial U} g(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} dS_y - \int\limits_{U} G(x,y) f(y)\, dy, \quad x \in U, \tag{1.12}$$

[1]) Как, впрочем, и для задачи Неймана.

*где* $G(x,y)$ — *это обобщенная функция, удовлетворяющая условиям*

$$\Delta_y G(x,y) = \delta(y-x), \quad G(x,y) = 0 \quad \textit{при} \quad y \in \partial U.$$

З а м е ч а н и е 1. Уравнения для функции $G(x,y)$ означают, что с одной стороны $G(x,y)$ — это обобщенная функция, которая имеет регулярный представитель, который поточечно удовлетворяет равенству на границе $\partial U$ как обычная функция.

Справедлива следующая важная теорема:

Т е о р е м а 2. *Для любых* $x, y \in U$ *при* $x \neq y$ *имеет место равенство*

$$G(y,x) = G(x,y).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

*Шаг 1.* Фиксируем $x, y \in U$, $x \neq y$. Положим

$$v(z) \stackrel{def:}{=} G(x,z), \quad w(z) \stackrel{def:}{=} G(y,z) \quad z \in U. \tag{1.13}$$

Тогда

$$\Delta_z v(z) = 0, \quad \Delta_z w(z) = 0 \quad \text{при} \quad x \neq z, \quad y \neq z,$$
$$w(z) = v(z) = 0 \quad \text{при} \quad z \in \partial U.$$

*Шаг 2.* Применяя вторую формулу Грина в области

$$V = U \backslash \left( \overline{B(x,\varepsilon)} \cup \overline{B(y,\varepsilon)} \right)$$

при достаточно малом $\varepsilon > 0$ для функций $v(z)$ и $w(z)$, получим

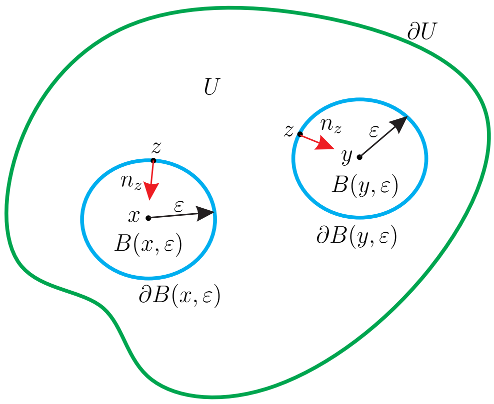


Рис. 2. Область $V$.

следующее равенство (см. рисунок 17):

$$\int\limits_{\partial B(x,\varepsilon)} \left[ \frac{\partial v(z)}{\partial n_z} w(z) - \frac{\partial w(z)}{\partial n_z} v(z) \right] dS_z =$$

$$= \int\limits_{\partial B(y,\varepsilon)} \left[\frac{\partial w(z)}{\partial n_z} v(z) - \frac{\partial v(z)}{\partial n_z} w(z)\right] dS_z, \quad (1.14)$$

где $n_z$ — это векторное поле единичных нормалей к $\partial B(x,\varepsilon) \cup \partial B(y,\varepsilon)$.

*Шаг 3.* Прежде всего заметим, что функция $w(z)$ регулярна в малой окрестности точки $x \in U$, поэтому

$$\left| \int\limits_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial w(z)}{\partial n_z} v(z)\, dS_z \right| \leqslant c_1 \varepsilon^{N-1} \sup_{z \in \partial B(x,\varepsilon)} |v(z)| \to +0$$

при $\varepsilon \to +0$. С другой стороны, $v(z) = \mathcal{E}_N(z-x) - \varphi^x(z)$, где $\varphi^x(z)$ гладкая в $U$. Поэтому получаем

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial v(z)}{\partial n_z} w(z)\, dS_z = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial \mathcal{E}_N(z-x)}{\partial n_z} w(z)\, dS_z. \quad (1.15)$$

Справедлива следующая цепочка выражений:

$$D_z \mathcal{E}_N(z-x) = \frac{1}{\omega_N} \frac{z-x}{|z-x|^N} \quad \text{и} \quad n_z = \frac{z-x}{|z-x|} = \frac{z-x}{\varepsilon} \quad \text{на} \quad \partial B(x,\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \mathcal{E}_N(z-x)}{\partial n_z} = (n_z, D_z \mathcal{E}_N(z-x)) = \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \quad \text{на} \quad \partial B(x,\varepsilon).$$

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial v(z)}{\partial n_z} w(z)\, dS_z = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int\limits_{\partial B(x,\varepsilon)} w(z)\, dS_z = w(x). \quad (1.16)$$

Значит, левая часть равенства (1.14) при $\varepsilon \to +0$ сходится к $w(x)$. Аналогичным образом доказывается, что правая часть равенства (1.14) при $\varepsilon \to +0$ сходится к $v(y)$. Итак,

$$G(y,x) = w(x) = v(y) = G(x,y).$$

Теорема доказана.

## § 2. Функция Грина для полупространства

В этом и следующем параграфе мы рассмотрим вопрос о построении функции Грина $G(x,y)$ в случае специальных областей.

Рассмотрим полупространство

$$\mathbb{R}^N_+ = \left\{x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N : \; x_N > 0\right\}$$

с границей

$$\partial \mathbb{R}^N_+ = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \; x_N = 0\right\}.$$

Дадим следующее определение:

Определение 2. *Отражением точки* $x = (x_1, ..., x_{N-1}, x_N) \in \in \mathbb{R}^N_+$ *относительно плоскости* $\partial\mathbb{R}^N_+$ *называется точка* $\widetilde{x} = = (x_1, ..., x_{N-1}, -x_N)$. Для нахождения функции Грина задачи Дири-

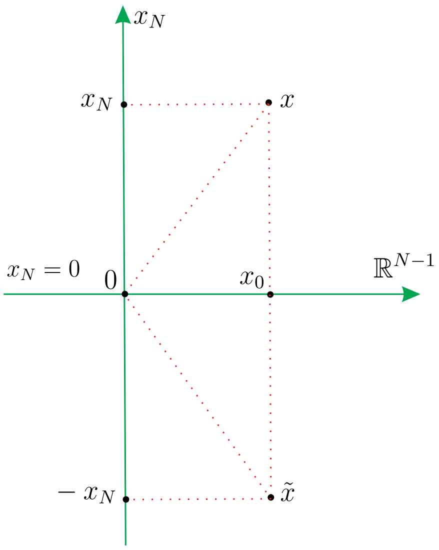


Рис. 3. Отражение точки.

хле (1.1), (1.2) для полупространства будем искать корректирующую функцию $\varphi^x(y)$ в следующем виде:

$$\varphi^x(y) = \mathcal{E}_N(y - \widetilde{x}) = \mathcal{E}_N(y_1 - x_1, ..., y_{N-1} - x_{N-1}, y_N + x_N). \qquad (2.1)$$

Заметим, что функция $\varphi^x(y)$ удовлетворяет задаче

$$\Delta_y \varphi^x(y) = 0 \quad \text{при} \quad y \in \mathbb{R}^N_+, \qquad (2.2)$$

$$\begin{aligned}\varphi^x(y) = \mathcal{E}_N(y - x) = \mathcal{E}_N(y_1 - x_1, ..., y_{N-1} - x_{N-1}, x_N) = \\ = \mathcal{E}_N(y_1 - x_1, ..., y_{N-1} - x_{N-1}, -x_N) \quad \text{при} \quad y \in \partial\mathbb{R}^N_+, \end{aligned} \qquad (2.3)$$

где последнее равенство выполнено, в силу явного вида, а именно потому что фундаментальное решение зависит от $|x - y|$. Дадим следующее определение:

Определение 3. *Функция Грина* $G(x, y)$ *для полупространства* $\mathbb{R}^N_+$ *определяется формулой*

$$G(x, y) \stackrel{def:}{=} \mathcal{E}_N(y - x) - \mathcal{E}_N(y - \widetilde{x}), \quad x \neq y, \quad x, y \in \mathbb{R}^N_+. \qquad (2.4)$$

Теперь мы должны вычислить нормальную производную

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}$$

функции Грина $G(x,y)$ на границе $y_N = 0$ полупространства $\mathbb{R}^N_+$. С этой целью заметим, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\Big|_{y_N=0} &= -\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_N}\Big|_{y_N=0} = \\ &= -\left(\frac{\partial \mathcal{E}_N(y-x)}{\partial y_N} - \frac{\partial \mathcal{E}_N(y-\widetilde{x})}{\partial y_N}\right)\Big|_{y_N=0} = \\ &= \frac{1}{\omega_N}\left(\frac{y_N - x_N}{|y-x|^N} - \frac{y_N + x_N}{|y-\widetilde{x}|^N}\right)\Big|_{y_N=0} = -\frac{2}{\omega_N}\frac{x_N}{|x-y|^N}\Big|_{y_N=0}.\end{aligned}$$

Следует ожидать, что решение краевой задачи Дирихле для полупространства

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N_+, \quad u(x) = g(x) \quad \text{на} \quad \partial\mathbb{R}^N_+ \tag{2.5}$$

имеет следующий явный вид:

$$u(x) = \frac{2x_N}{\omega_N}\int\limits_{\partial\mathbb{R}^N_+}\frac{g(y)}{|x-y|^N}\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^N_+. \tag{2.6}$$

Функция

$$K(x,y) \overset{def}{=} \frac{2x_N}{\omega_N}\frac{1}{|x-y|^N}, \quad x \in \mathbb{R}^N_+, \quad y \in \partial\mathbb{R}^N_+ \tag{2.7}$$

называется *ядром Пуассона*. Справедлива следующая теорема:
Т е о р е м а 3. *Пусть* $g(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^{N-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})$, *и функция* $u(x)$ *определена формулой* (2.6). *Тогда*

$$\begin{gathered}u(x) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N_+), \\ \Delta u(x) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^N_+, \quad \lim_{x\to x_0,\ x\in\mathbb{R}^N_+} u(x) = g(x_0)\end{gathered} \tag{2.8}$$

*для каждой точки* $x_0 \in \partial\mathbb{R}^N_+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

*Шаг 1.* Прежде всего заметим, что функция Грина $G(x,y)$ при фиксированной точке $x$ является гармонической функцией всюду за исключением точки $x = y$. Поскольку $G(x,y) = G(y,x)$, то функция Грина является гармонической по $x$. Значит, функция

$$-\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_N} = K(x,y)$$

является гармонической по $x \in \mathbb{R}^N_+$ при $y \in \partial\mathbb{R}^N_+$.

*Шаг 2.* Прямым вычислением проверяем, что

$$\int\limits_{\partial\mathbb{R}^N_+} K(x,y)\,dy = 1 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}^N_+. \tag{2.9}$$

Поскольку функция $g(x)$ ограничена, то функция $u(x)$, определенная формулой (2.6), также ограничена. Поскольку $K(x,y)$ гладкая по $x$ при $x \neq y$, легко проверить, что $u(x) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N_+)$ и

$$\Delta_x u(x) = \int\limits_{\partial\mathbb{R}^N_+} \Delta_x K(x,y) g(y)\,dy = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N_+.$$

*Шаг 3.* Фиксируем точку $x_0 \in \partial\mathbb{R}^N_+$ и число $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ настолько малым, что

$$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |y - x_0| < \delta, \quad y \in \partial\mathbb{R}^N_+. \tag{2.10}$$

Пусть $|x - x_0| < \delta/2$ и $x \in \mathbb{R}^N_+$, то

$$|u(x) - g(x_0)| = \left| \int\limits_{\partial\mathbb{R}^N_+} K(x,y)[g(y) - g(x_0)]\,dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\partial\mathbb{R}^N_+ \cap B(x_0,\delta)} K(x,y)|g(y) - g(x_0)|\,dy +$$

$$+ \int\limits_{\partial\mathbb{R}^N_+ \setminus B(x_0,\delta)} K(x,y)|g(y) - g(x_0)|\,dy = I_1 + I_2. \tag{2.11}$$

Отметим, что из (2.9) и (2.10)

$$I_1 \leqslant \varepsilon \int\limits_{\partial\mathbb{R}^N_+} K(x,y)\,dy = \varepsilon.$$

Более того, если

$$|x - x_0| \leqslant \delta/2 \quad \text{и} \quad |y - x_0| \geqslant \delta,$$

то

$$|y - x_0| \leqslant |y - x| + |x - x_0| \leqslant |y - x| + \frac{\delta}{2} \leqslant |y - x| + \frac{1}{2}|y - x_0|,$$

поэтому

$$\frac{1}{2}|y - x_0| \leqslant |y - x|.$$

Таким образом,

$$I_2 \leqslant 2\|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}^N_+)} \int\limits_{\partial\mathbb{R}^N_+\setminus B(x_0,\delta)} K(x,y)\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{N+2}\|g\|_{L^\infty(\partial\mathbb{R}^N_+)} x_N}{\omega_N} \int\limits_{\partial\mathbb{R}^N_+\setminus B(x_0,\delta)} \frac{1}{|y-x_0|^N}\,dy \to +0$$

при $x_N \to +0$. В силу неравенства (2.11) получаем

$$|u(x) - g(x_0)| \leqslant 2\varepsilon, \quad \text{если} \quad |x - x_0| \leqslant \delta/2.$$

Теорема доказана.

## § 3. Функция Грина для шара

Чтобы построить функцию Грина для единичного шара $B(0,1)$ нужно опять воспользоваться отражением, но относительно границы единичной сферы $\partial B(0,1)$. Дадим следующее определение:

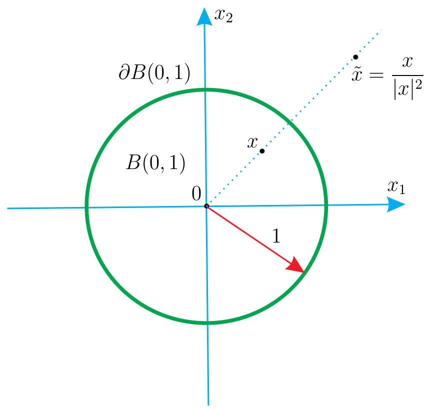


Рис. 4. Отражение точки $x$ относительно границы $\partial B(0,1)$ шара $B(0,1)$.

Определение 4. *Для точки $x \in \mathbb{R}^N\setminus\{0\}$ точка*

$$\widetilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$$

*называется сопряженной к $x$ относительно сферы $\partial B(0,1)$. Отображение $x \to \widetilde{x}$ называется инверсией относительно единичной сферы $\partial B(0,1)$.*

Опять нам нужно подобрать так корректирующую функцию $\varphi^x(y)$, чтобы

$$\Delta_y \varphi^x(y) = 0 \quad \text{при} \quad y \in B(0,1), \tag{3.1}$$

$$\varphi^x(y) = \mathcal{E}_N(y - x) \quad \text{при} \quad y \in \partial B(0,1). \tag{3.2}$$

С этой целью заметим, что функция $\mathcal{E}_N(y-\widetilde{x})$ является гармонической для всех $y \in B(0,1)$ при $x \in B(0,1)$, поскольку инверсия $x \to \widetilde{x}$ переводит особую точку $x \in B(0,1)$ за пределы шара $B(0,1)$. Кроме того, заметим, что при $N \geqslant 3$ функция

$$|x|^{2-N}\mathcal{E}_N(y-\widetilde{x}) = \mathcal{E}_N(|x|(y-\widetilde{x}))$$

гармонической в $U = B(0,1)$ по $y \in B(0,1)$. Отметим, что если $y \in \in \partial B(0,1)$ и $x \neq 0$, то

$$|x|^2|y-\widetilde{x}|^2 = |x|^2\left(|y|^2 - \frac{2(x,y)}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2}\right) = |x|^2 - 2(x,y) + 1 = |x-y|^2,$$

следовательно,

$$(|x||y-\widetilde{x}|)^{-(N-2)} = |x-y|^{-(N-2)} \quad \text{при} \quad |y| = 1.$$

Поэтому функция

$$\varphi^x(y) = \mathcal{E}_N(|x|(y-\widetilde{x})) \tag{3.3}$$

удовлетворяет задаче (3.1), (3.2). Дадим определение.

Определение 5. *Функцией Грина задачи Дирихле для единичного шара называется функция*

$$G(x,y) \overset{def:}{=} \mathcal{E}_N(y-x) - \mathcal{E}_N(|x|(y-\widetilde{x})) \tag{3.4}$$

*при* $x, y \in B(0,1)$ *и* $x \neq y$.

Замечание 2. Такая же формула справедлива и в случае $N = 2$.

Предположим, что $u(x)$ — это решение краевой задачи

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in B(0,1), \tag{3.5}$$

$$u(x) = g(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial B(0,1). \tag{3.6}$$

В силу формулы (1.12) решение имеет следующий вид:

$$u(x) = -\int\limits_{\partial B(0,1)} g(y)\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\, dS_y. \tag{3.7}$$

Заметим, что единичная внешняя нормаль $n_y$ в точке $y \in \partial B(0,1)$ имеет следующий явный вид:

$$n_y = \frac{y}{|y|} = y = \{y_1, ..., y_N\}, \quad |y| = 1.$$

Поэтому имеем

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} = \sum_{i=1}^N y_i \frac{\partial G(x,y)}{\partial y_i}.$$

Итак, вычисляем

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial y_i} = \frac{\partial \mathcal{E}_N(y-x)}{\partial y_i} - \frac{\partial \mathcal{E}_N(|x|(y-\widetilde{x}))}{\partial y_i}.$$

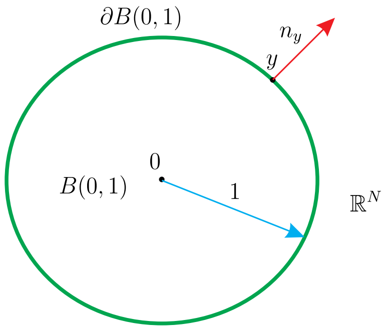


Рис. 5. Поле единичных нормалей $n_y$ к поверхности единичного шара $\partial B(0,1)$.

Однако,

$$\frac{\partial \mathcal{E}_N(y-x)}{\partial y_i} = \frac{1}{\omega_N} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^N},$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_N(|x|(y-\widetilde{x}))}{\partial y_i} = -\frac{1}{\omega_N} \frac{y_i|x|^2 - x_i}{(|x||y-\widetilde{x}|)^N} = -\frac{1}{\omega_N} \frac{y_i|x|^2 - x_i}{|x-y|^N}$$

при $|y| = 1$. Следовательно,

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} = \sum_{i=1}^{N} y_i \frac{\partial G(x,y)}{\partial y_i} =$$

$$= -\frac{1}{\omega_N} \frac{1}{|x-y|^N} \sum_{i=1}^{N} y_i \Big( (y_i - x_i) - y_i|x|^2 + x_i \Big) = -\frac{1}{\omega_N} \frac{1-|x|^2}{|x-y|^N}.$$

Таким образом, формула (3.7) примет следующий вид:

$$u(x) = \frac{1-|x|^2}{\omega_N} \int\limits_{\partial B(0,1)} \frac{g(y)}{|x-y|^N}\, dS_y. \tag{3.8}$$

Рассмотрим теперь следующую задачу:

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in B(0,r), \tag{3.9}$$

$$u(x) = g(x) \quad \text{при} \quad x \in \partial B(0,r). \tag{3.10}$$

Тогда $\widetilde{u}(x) = u(rx)$ является решением задачи (3.5), (3.6) с граничной функцией $\widetilde{g}(x) = g(rx)$. Сделав замену переменных, получим *формулу Пуассона*

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{\omega_N r} \int\limits_{\partial B(0,r)} \frac{g(y)}{|x-y|^N}\, dS_y \quad \text{при} \quad x \in B(0,r). \tag{3.11}$$

*Ядром Пуассона* для шара $B(0,r)$ называется функция

$$K(x,y) \stackrel{def:}{=} \frac{r^2-|x|^2}{\omega_N r}\frac{1}{|x-y|^N}, \quad x,y\in B(0,r), \quad x\neq y.$$

Справедлива следующая теорема:
Т е о р е м а 4. *Пусть* $g(x)\in\mathbb{C}(\partial B(0,r))$ *и функция* $u(x)$ *определена формулой* (3.11). *Тогда*

$$u(x)\in\mathbb{C}^\infty(B(0,r)),$$

$$\Delta u(x)=0 \quad \text{\textit{при}} \quad x\in B(0,r), \tag{3.12}$$

$$\lim_{x\to x_0,\ x\in B(0,r)} u(x)=g(x_0) \quad \text{\textit{для каждой}} \quad x_0\in\partial B(0,r). \tag{3.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.
Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.
Т е о р е м а д о к а з а н а.