Спектральный анализ разностных схем

1 Исследование схем на устойчивость по начальным данным методом гармоник

Одним из достаточно простых и эффективных способов исследования линейных разностных схем на устойчивость по начальным данным является метод гармоник. Его можно использовать как для двухслойных схем вида

$$B\frac{\hat{y}-y}{\tau}+Ay=\varphi, \tag{1.1}$$

так и для трехслойных схем вида

$$B\frac{\hat{y}-\check{y}}{2\tau}+R(\hat{y}-2y+\check{y})+Ay=\varphi, \tag{1.2}$$

где A, B и R — линейные разностные операторы с постоянными коэффициентами, действующие на сеточную функцию y как на функцию пространственной переменной x. Заметим, что рассмотренные нами схемы для уравнения теплопроводности принадлежат к классу (1.1), а для уравнения колебаний — к классу (1.2).

Далее будем рассматривать частный случай — разностные схемы для задач Коши на прямой $x \in (-\infty, +\infty)$. Пусть схемы (1.1) и (1.2) заданы на равномерной сетке:

$$x_n = n\cdot h,\ \ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ ...;\quad t_j = j\cdot\tau,\ \ j=0,1,...$$

Исследуя устойчивость по начальным данным, фиксируем правую часть φ в уравнениях (1.1) и (1.2). Пусть $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ — решения соответствующих разностных уравнений при двух разных начальных условиях. Тогда их разность $\delta y = y^{(1)} - y^{(2)}$ будет удовлетворять однородному уравнению

$$B\frac{\delta\hat{y}-\delta y}{\tau}+A\delta y=0 \tag{1.3}$$

в случае двухслойной схемы, и уравнению

$$B\frac{\delta\hat{y} - \delta\check{y}}{2\tau} + R(\delta\hat{y} - 2\delta y + \delta\check{y}) + A\delta y = 0 \tag{1.4}$$

в случае трехслойной схемы.

Разложим $\delta y(x_n, t_j) = \delta y_n^j$ в ряд по пространственным гармоникам e^{iqx_n}:

$$\delta y_n^j = \sum_q \delta y_{n,q}^j = \sum_q C_q(t_j) e^{iqx_n}.$$

Так как уравнения (1.3) и (1.4) линейны, их можно рассматривать для каждой гармоники $\delta y_{n,q}^j = C_q(t_j)e^{iqx_n}$ в отдельности.

Рассмотрим подробно случай двухслойной схемы (1.3). При каждом фиксированном q получаем:

$$\left(C_q(t_{j+1}) - C_q(t_j)\right) Be^{iqx_n} + \tau C_q(t_j) Ae^{iqx_n} = 0. \tag{1.5}$$

Так как выражения Be^{iqx_n} и Ae^{iqx_n} представляют собой конечные линейные комбинации выражений $e^{iqx_n} = e^{i\alpha_q n}$, $e^{iqx_{n-1}} = e^{i\alpha_q(n-1)}$, $e^{iqx_{n+1}} = e^{i\alpha_q(n+1)}$ и т.д., где $\alpha_q = qh$, то, сокращая на $e^{i\alpha_q n}$, из равенства (1.5) получаем, что

$$C_q(t_{j+1}) = \lambda_q \cdot C_q(t_j),$$

где λ_q — число, которое не зависит ни от n, ни от j. Число λ_q называют множителем роста для q-й гармоники. Его можно найти из уравнения:

$$(\lambda_q - 1)\, Be^{iqx_n} + \tau Ae^{iqx_n} = 0.$$

Таким образом, для двухслойной схемы получаем:

$$\delta y_n^{j+1} = \sum_q \lambda_q C_q(t_j) e^{iqx_n}, \quad \delta y_n^{j+2} = \sum_q \lambda_q^2 C_q(t_j) e^{iqx_n},$$

и так далее.

Аналогичный результат имеет место и в случае трехслойной схемы. Рассматривая уравнение (1.4) для каждой гармоники в отдельности и учитывая, что $\delta y_{n,q}^{j-1}$, $\delta y_{n,q}^j$ и $\delta y_{n,q}^{j+1}$ связаны соотношениями

$$\delta y_{n,q}^{j-1} = C_q(t_{j-1})e^{iqx_n}, \quad \delta y_{n,q}^j = \lambda_q \delta y_{n,q}^{j-1} = \lambda_q C_q(t_{j-1})e^{iqx_n}, \quad \delta y_{n,q}^{j+1} = \lambda_q^2 \delta y_{n,q}^{j-1} = \lambda_q^2 C_q(t_{j-1})e^{iqx_n},$$

для множителей роста приходим к следующему квадратному уравнению:

$$(\lambda_q^2 - 1)Be^{iqx_n} + 2\tau(\lambda_q^2 - 2\lambda_q + 1)Re^{iqx_n} + 2\tau\lambda Ae^{iqx_n} = 0.$$

Теорема 1.1 *Для равномерной устойчивости схем (1.1) и (1.2) по начальным данным необходимо и достаточно, чтобы для любых q выполнялось условие:*

$$|\lambda_q| \leqslant 1 + c\tau, \quad c \geqslant 0, \tag{1.6}$$

где константа c не зависит ни от q, ни от шагов сетки τ и h.

Доказательство.

Необходимость. Пусть хотя бы для одной гармоники с номером q_0 условие (1.6) не выполняется. Это означает, что для любого сколь угодно большого c имеет место неравенство:

$$|\lambda_{q_0}| \geqslant 1 + c\tau.$$

Если на произвольном слое t_j в этой гармонике имеется возмущение $\delta y^j_{n,q_0}$, то к моменту времени $T = t_j + J \cdot \tau$ его амплитуда будет порядка

$$|\lambda_{q_0}|^J = |\lambda_{q_0}|^{(T-t_j)/\tau} \geqslant (1 + c\tau)^{(T-t_j)/\tau} \approx (e^{c\tau})^{(T-t_j)/\tau} = e^{c(T-t_j)},$$

где c может быть сколь угодно велико. Это и означает неустойчивость по начальным данным.

Достаточность. Разложим возмущение на некотором слое t_j в ряд по гармоникам:

$$\delta y(t_j) = \sum_q C_q(t_j) e^{iqx_n}.$$

При $t = t_{j+J}$ возмущение будет иметь вид:

$$\delta y(t_{j+J}) = \sum_q C_q(t_{j+J}) e^{iqx_n} = \sum_q \lambda_q^J C_q(t_j) e^{iqx_n}.$$

Гармоники e^{iqx_n} с различными q ортогональны между собой на отрезке длиной 2π. Оценим погрешность решения на слое $j + J$ по норме L_2 на отрезке длиной 2π:

$$\|\delta y(t_{j+J})\|^2_{L_2} = \sum_q |\lambda_q|^{2J} |C_q(t_j)|^2 \|e^{iqx_n}\|^2_{L_2} \leqslant (1+c\tau)^{2J} \underbrace{\sum_q |C_q(t_j)|^2 \|e^{iqx_n}\|^2_{L_2}}_{\|\delta y(t_j)\|^2_{L_2}} \leqslant e^{2c(t-t_j)} \|\delta y(t_j)\|^2_{L_2}.$$

Последнее неравенство означает равномерную устойчивость по начальным данным. ■

2 Примеры использования метода гармоник

Пример 2.1. *Исследуйте на устойчивость с помощью метода гармоник явную схему для задачи:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \;\; t \in (0, T], \\ u(x, 0) = \mu(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

Решение. Введем равномерную сетку

$$x_n = n \cdot h,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...; \quad t_j = j \cdot \tau,\ j = 0, 1, ..., J,\ J \cdot \tau = T.$$

На этой сетке явная схема для рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} - a^2 \dfrac{y_{n+1}^j - 2y_n^j + y_{n-1}^j}{h^2} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \quad j = 0, 1, ..., J-1; \\ y_n^0 = \mu(x_n) \equiv \mu_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \end{cases}$$

При этом погрешность δy, обусловленная погрешностью начальных данных, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\delta y_n^{j+1} - \delta y_n^j}{\tau} - a^2 \frac{\delta y_{n+1}^j - 2\delta y_n^j + \delta y_{n-1}^j}{h^2} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \quad j = 0, 1, ..., J-1. \tag{2.1}$$

В соответствии с методом гармоник получаем:

$$\delta y_n^j = \sum_q \delta y_{n,q}^j = \sum_q C_q(t_j) e^{iqx_n} = \sum_q C_q(t_j) e^{i\alpha_q n},$$

$$\delta y_n^{j+1} = \sum_q \lambda_q \delta y_{n,q}^j = \sum_q \lambda_q C_q(t_j) e^{iqx_n} = \sum_q \lambda_q C_q(t_j) e^{i\alpha_q n},$$

где $\alpha_q = qh$. Гармоники $\delta y_{n,q}^j$ и $\delta y_{n,q}^{j+1}$ на слоях j и $j+1$ связаны соотношениями:

$$\delta y_{n,q}^{j+1} = \lambda_q \delta y_{n,q}^j, \quad \delta y_{n,q}^j = C_q(t_j) e^{i\alpha_q n} \quad j = 1, 2, ..., J-1.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (2.1) и сокращая на $e^{i\alpha_q n}$, получаем:

$$\frac{\lambda_q - 1}{\tau} - a^2 \frac{e^{i\alpha_q} - 2 + e^{-i\alpha_q}}{h^2} = 0.$$

Так как

$$\frac{e^{i\alpha_q} - 2 + e^{-i\alpha_q}}{4} = -\left(\frac{e^{i\frac{\alpha_q}{2}} - e^{-i\frac{\alpha_q}{2}}}{2i} \right)^2 = -\sin^2 \frac{\alpha_q}{2},$$

то

$$\lambda_q(\alpha_q) = 1 - 4ra^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2}, \quad r = \frac{\tau}{h^2}.$$

При изменении α_q число $\lambda_q(\alpha_q)$ пробегает весь спектр оператора перехода со слоя на слой. В данном случае спектр расположен на отрезке $1 - 4ra^2 \leqslant \lambda \leqslant 1$ (см. рис. 1). Условие устойчивости (1.6) схемы выполнено, если

$$1 - 4ra^2 \geqslant -1 \;\Rightarrow\; r \leqslant \frac{1}{2a^2} \;\Leftrightarrow\; \tau \leqslant \frac{h^2}{2a^2}.$$

Таким образом, явная схема для уравнения теплопроводности является условно устойчивой. Ее можно использовать только в том случае, когда шаги сетки удовлетворяют неравенству $\tau \leqslant \dfrac{h^2}{2a^2}$.

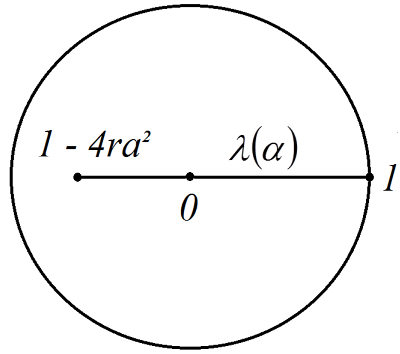

Рис. 1: Спектр оператора перехода со слоя на слой явной схемы для уравнения теплопроводности

Пример 2.2. *Исследуйте на устойчивость с помощью метода гармоник неявную схему для задачи:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \;\; t \in (0,T], \\ u(x,0) = \mu(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

Решение. Пользуясь той же сеткой, что и в предыдущем примере, запишем неявную схему для рассматриваемой задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} - a^2 \dfrac{y_{n+1}^{j+1} - 2y_n^{j+1} + y_{n-1}^{j+1}}{h^2} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \quad j = 0, 1, ..., J-1; \\ y_n^0 = \mu(x_n) \equiv \mu_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ... \end{cases}$$

Так как гармоники погрешности δy на слоях j и $j+1$ связаны соотношениями:

$$\delta y_{n,q}^{j+1} = \lambda_q \delta y_{n,q}^j, \qquad \delta y_{n,q}^j = C_q(t_j) e^{i\alpha_q n} \quad j = 1, 2, ..., J-1,$$

а сама погрешность в данном случае удовлетворяет уравнению

$$\frac{\delta y_n^{j+1} - \delta y_n^j}{\tau} - a^2 \frac{\delta y_{n+1}^{j+1} - 2\delta y_n^{j+1} + \delta y_{n-1}^{j+1}}{h^2} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \quad j = 0, 1, ..., J-1,$$

получаем:

$$\lambda_q - 1 - \frac{a^2 \tau}{h^2} \lambda_q \left(e^{i\alpha_q} - 2 + e^{-i\alpha_q} \right) = 0 \;\; \Rightarrow$$

$$\lambda_q(\alpha_q) = \frac{1}{1 + 4ra^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2}}, \quad r = \frac{\tau}{h^2}.$$

Спектр $\lambda(\alpha)$ заполняет отрезок вещественной оси:

$$\frac{1}{1 + 4ra^2} \leqslant \lambda(\alpha) \leqslant 1,$$

то есть условие устойчивости (1.6) схемы выполнено при любом r. Следовательно, неявная схема для уравнения теплопроводности является безусловно устойчивой по начальным данным, то есть устойчивой при любом соотношении шагов сетки.

Пример 2.3. *Исследуйте на устойчивость по начальным данным схему «крест» для задачи Коши для уравнения колебаний на прямой:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \;\; t \in (0,T]; \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^1, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $a > 0$ — заданное число.

Решение. Соответствующая разностная схема имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{y_n^{j+1} - 2y_n^j + y_n^{j-1}}{\tau^2} - a^2 \dfrac{y_{n+1}^j - 2y_n^j + y_{n-1}^j}{h^2} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \quad j = 1, 2, ..., J-1, \\ y_n^0 = \varphi_n, \quad \dfrac{y_n^1 - y_n^0}{\tau} = \psi_n + \dfrac{\tau a^2}{2} \varphi_n'', \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \end{cases}$$

где $\varphi_n = \varphi(x_n)$, $\varphi_n'' = \varphi''(x_n)$, $\psi_n = \psi(x_n)$. При этом погрешность δy решения удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\delta y_n^{j+1} - 2\delta y_n^j + \delta y_n^{j-1}}{\tau^2} - a^2 \frac{\delta y_{n+1}^j - 2\delta y_n^j + \delta y_{n-1}^j}{h^2} = 0, \tag{2.3}$$

при $n = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \;\; j = 1, 2, ..., J-1$. Так как

$$\delta y_n^j = \sum_q \delta y_{n,q}^j = \sum_q C_q^j e^{iqx_n},$$

где

$$y_{n,q}^{j+1} = \lambda_q y_{n,q}^j = \lambda_q C_q^j e^{iqx_n},$$

то, рассматривая уравнение (2.3) для каждой гармоники по отдельности и сокращая на $C_q^j e^{iqx_n} = C_q^j e^{i\alpha_q n}$, где $\alpha_q = qh$, для множителей роста λ_q приходим к квадратному уравнению:

$$\frac{\lambda_q^2 - 2\lambda_q + 1}{\tau^2} - \lambda_q a^2 \frac{e^{i\alpha_q} - 2 + e^{-i\alpha_q}}{h^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_q^2 - 2\left(1 - 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2}\right)\lambda_q + 1 = 0, \;\; r = \frac{\tau a}{h}.$$

Произведение корней полученного квадратного уравнения равно 1. Если его дискриминант

$$D(\alpha_q) = 4\left(1 - 2r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2}\right)^2 - 4 = 16 r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} \left(r^2 \sin^2 \frac{\alpha_q}{2} - 1\right)$$

отрицателен, то корни $\lambda_q^1(\alpha_q)$ и $\lambda_q^2(\alpha_q)$ комплексно сопряжены и равны 1 по модулю.

При $r < 1$ дискриминант отрицателен при всех α_q, поэтому при изменении α_q комплексно-сопряженные корни $\lambda_q^1(\alpha_q)$ и $\lambda_q^2(\alpha_1)$ пробегают часть окружности радиуса 1 на комплексной плоскости (рис.2 а). При $r = 1$ спектр заполняет всю единичную окружность (рис.2 б). При $r > 1$ по мере изменения α_q корни квадратного уравнения движутся из точки $\lambda_1 = 1$

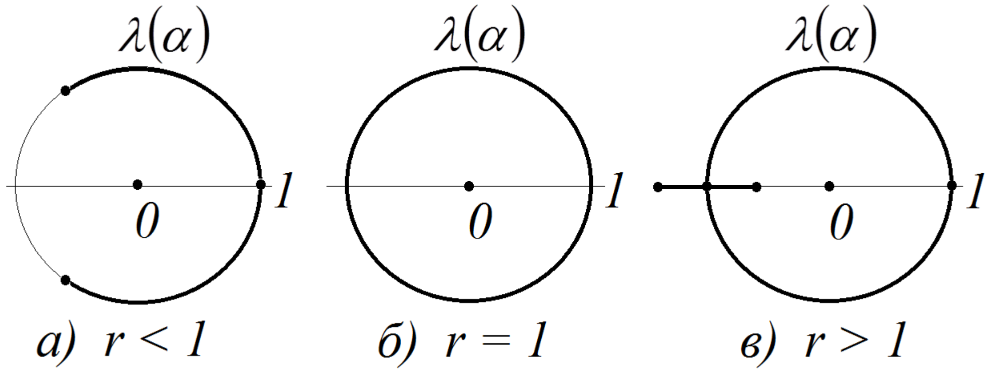

Рис. 2: Спектр оператора перехода со слоя на слой в схеме «крест» для уравнения колебаний

по единичной окружности, один по часовой стрелке, а другой против часовой стрелки, пока не сойдутся в точке $\lambda_q = -1$. Затем один из корней пойдет по вещественной оси из точки $\lambda_q = -1$ влево, а другой — вправо, причем $\lambda_q^1 \cdot \lambda_q^2 = 1$ (рис.2 в).

Спектральное условие устойчивости схемы по начальным данным выполнено, если спектр оператора перехода со слоя на слой принадлежит единичной окружности на комплексной плоскости, то есть при $r \leqslant 1$. Следовательно, схема «крест» является условно устойчивой. Она устойчива, если шаги сетки удовлетворяют неравенству $\tau a \leqslant h$.

Пример 2.4. *Исследуйте на устойчивость по начальным данным неявную схему для задачи Коши для уравнения колебаний на прямой:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \;\; t \in (0, T]; \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^1, \end{cases} \tag{2.4}$$

где $a > 0$ — заданное число.

Решение. Соответствующая разностная схема имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{y_n^{j+1} - 2y_n^j + y_n^{j-1}}{\tau^2} - \sigma a^2 \dfrac{y_{n+1}^{j+1} - 2y_n^{j+1} + y_{n-1}^{j+1}}{h^2} - \sigma a^2 \dfrac{y_{n+1}^{j-1} - 2y_n^{j-1} + y_{n-1}^{j-1}}{h^2} - \\ \qquad -(1-2\sigma) a^2 \dfrac{y_{n+1}^j - 2y_n^j + y_{n-1}^j}{h^2} = 0, \quad j = 1, 2, ..., J-1, \\ y_n^0 = \varphi_n, \qquad \dfrac{y_n^1 - y_n^0}{\tau} = \psi_n + \dfrac{\tau a^2}{2} \varphi_n''. \end{cases}$$

Для множителей роста λ_q получаем квадратное уравнение:

$$\frac{\lambda_q^2 - 2\lambda_q + 1}{\tau^2} + \sigma \frac{a^2 \lambda_q^2}{h^2} 4\sin^2\frac{\alpha_q}{2} + \sigma \frac{a^2}{h^2} 4\sin^2\frac{\alpha_q}{2} + (1-2\sigma)\frac{a^2\lambda_q}{h^2} 4\sin^2\frac{\alpha_q}{2} = 0$$

Введем обозначение

$$\beta_q = \frac{a\tau}{h} \sin\frac{\alpha_q}{2}$$

и перепишем уравнение для λ_q в виде:

$$\lambda_q^2 - 2\frac{1-2(1-2\sigma)\beta_q^2}{1+4\sigma\beta_q^2}\lambda_q + 1 = 0. \tag{2.5}$$

Как и в предыдущем примере, спектр оператора перехода со слоя на слой будет полностью принадлежать единичной окружности на комплексной плоскости (то есть будет выполнено условие устойчивости схемы), если дискриминант

$$D = 4\frac{\left(1-2(1-2\sigma)\beta_q^2\right)^2}{(1+4\sigma\beta_q^2)^2} - 4 = 16\beta_q^2\frac{(1-4\sigma)\beta_q^2-1}{(1+4\sigma\beta_q^2)^2}$$

уравнения (2.5) будет меньше либо равен нуля. Следовательно, схема будет устойчивой, если выполнено условие:

$$\left(\frac{a\tau}{h}\right)^2(1-4\sigma) \leqslant 1. \tag{2.6}$$

Из неравенства (2.6) видно, что при $\sigma \geqslant \dfrac{1}{4}$ неявная схема для уравнения колебаний безусловно устойчива. Если $\sigma < \dfrac{1}{4}$, то схема оказывается условно устойчивой при

$$a\tau \leqslant \frac{h}{\sqrt{1-4\sigma}}.$$

На практике целесообразно выбирать вес σ в пределах $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right]$, так как при $\sigma > \dfrac{1}{2}$ центральный слой схемы имеет отрицательный вес $(1-2\sigma)$.