Конспект лекции 1

# СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

## § 0. План лекции

**1. Аксиомы геометрии и роль систем координат.**

**2. Декартова система координат на прямой.**

**2.1.** Ось, направленный отрезок, величина направленного отрезка на оси;

**2.2.** Декартова координата точки $M$ на оси $Ox$ с фиксированной точкой начала координат $O$;

**2.3.** Орт оси.

**3. Прямоугольная декартова система координат на плоскости.**

**3.1.** Ортогональная проекция точки на ось;

**3.2.** Прямоугольная декартова система координат на плоскости.

**3.3.** Ось абсцисс, ось ординат, правая система координат;

**3.4.** Задача 1 о вычислении расстояния между точками на плоскости.

**4. Прямоугольная декартова система координат в пространстве.**

**4.1.** Ортогональная проекция точки на ось в пространстве;

**4.2.** Декартовы координаты точки в пространстве;

**4.3.** Ось аппликат и правая система координат;

**4.4.** Задача 3 о вычислении расстояния между точками в пространстве.

**5. Косоугольная система декартовых координат в пространстве.**

**5.1.** Наводящие соображения;

**5.2.** Косоугольная система координат $Oxyz$ и плоскости $\pi_{xy}$, $\pi_{xz}$ и $\pi_{yz}$;

**5.3.** Определение $\mathrm{Pr}_l^\pi M$;

**5.4.** Косоугольные координаты.

**6. Полярная система координат на плоскости.**

**6.1.** Полюс $O$, полярная ось и радиус–вектор точки на плоскости;

**6.2.** Полярные координаты $(r, \varphi)$;

**6.3.** Связь со специальной правой декартовой системой координат на плоскости;

**7. Полярная система координат в пространстве.**

**7.1.** Полярная плоскость и ось $Oz$;

**7.2.** Связь с прямоугольной правой системой координат $Oxyz$;

**8. Сферическая система координат в пространстве.**

**8.1.** Зенитный угол $\vartheta$ и азимутальный угол $\varphi$ и радиус–вектор точки $M$;

**8.2.** Связь с правой прямоугольной декартовой системой координат $Oxyz$.

**9. Проекция направленных отрезков в пространстве.**

**9.1.** Ортогональная проекция направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ на ось;

**9.2.** Косоугольная проекция направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ на ось;

**9.3.** Равные направленные отрезки;

**9.4.** Лемма о равенстве проекций равных направленных отрезков;

**9.5.** Направляющие косинусы радиус вектора точки $M$;

**9.6.** Задача о делении отрезка в заданном отношении.

## § 1. Аксиомы геометрии

Существуют несколько систем аксиом геометрии, восходящих к Евклиду. В школьной геометрии аксиомы строятся в основном согласно системе Д. Гильберта. Перечислять аксиомы Д. Гильберта мы не будем. Отметим, что основными понятиями в этой системе являются *точка*, *прямая* и *плоскость*. Основным недостатком аксиоматики Гильберта является то, что она используется в основном только в школьной геометрии.

Вместо системы Гильберта в математике используется аксиоматика Г. Вейля, основными понятиями которой являются *точка* и *вектор*, и эта аксиоматика нашла своё развитие во всех областях физики и математики.

## § 2. Декартовы координаты на прямой

В этой лекции мы рассмотрим различные системы координат на прямой, на плоскости и в пространстве.

Определение 1. *Прямая с выбранным на ней направлением называется осью. Выбранное направление называется положительным.*

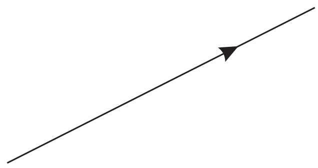

Рис. 1. Ось.

Определение 2. *Отрезок $[A, B]$ называется направленным, если указано какая из граничных точек является началом и какая — концом.*

Обозначение. $\overrightarrow{AB}$.

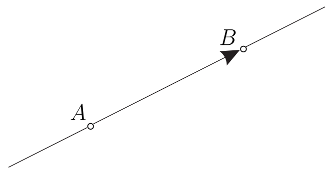


Рис. 2. Направленный отрезок.

О п р е д е л е н и е 3. *Величиной направленного отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *на некоторой оси* $l$ *называется число*

$$AB = \begin{cases} +|\overrightarrow{AB}|, & \text{если} \quad \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow l; \\ -|\overrightarrow{AB}|, & \text{если} \quad \overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow l, \end{cases}$$

*где символом* $|\overrightarrow{AB}|$ *мы обозначили длину направленного отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *в некотором масштабе.*

О п р е д е л е н и е 4. *Ось* $l$ *с некоторой фиксированной точкой* $O \in l$ *и фиксированным масштабом измерения длин отрезков называется декартовой системой координат на прямой.*

О б о з н а ч е н и е. $Ox$.

О п р е д е л е н и е 5. *Декартовой координатой* $x$ *точки* $M \in Ox$ *будем называть величину направленного отрезка* $\overrightarrow{OM}$.

О п р е д е л е н и е 6. *Единичный в выбранном масштабе направленный отрезок с началом в точке* $O$, *сонаправленный с осью* $Ox$, *называется ортом.*

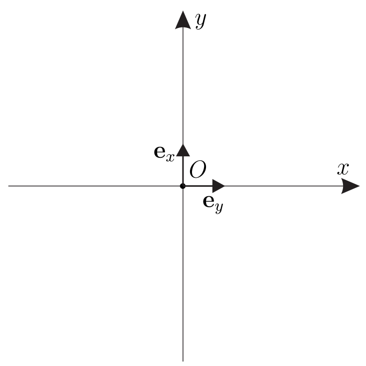


Рис. 3. Декартова система координат $Oxy$ и её орты.

## § 3. Декартовы координаты на плоскости

Пусть $\pi$ — это некоторая фиксированная плоскость в пространстве.

О п р е д е л е н и е 7. *Две взаимно перпендикулярные оси* (*обозначаемые как* $Ox$ *и* $Oy$) *на плоскости* $\pi$ *вместе с точкой* $O$ *их пересечения и одинаковым масштабом измерения длин отрезков на каждой из осей называется декартовой системой координат на плоскости с началом координат в точке* $O$ *пересечения осей.*

О б о з н а ч е н и е. $Oxy$, $Ox$ — ось абсцисс, $Oy$ — ось ординат.

З а м е ч а н и е 1. Обычно оси абсцисс $Ox$ и ординат $Oy$ выбирают таким образом, чтобы при повороте оси абсцисс $Ox$ против часовой стрелки на угол $90^\circ$ она совпала с положительным направлением оси ординат $Oy$. Такая система координат $Oxy$ называется правой.

Определение 8. *Точка $M_l \in \pi$ пересечения прямой $l_\perp \in \pi$, перпендикулярной к оси $l \in \pi$ и проходящей через точку $M$, с осью $l$ называется ортогональной проекцией точки $M$ на ось $l$.*

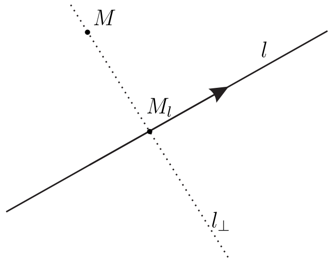


Рис. 4. Ортогональная проекция точки $M$ на ось $l$.

Пусть $M_x$ — это *прямоугольная проекция* точки $M$ на ось $Ox$, а $M_y$ — это *прямоугольная проекция* точки $M$ на ось $Oy$.

Определение 9. *Декартовыми прямоугольными координатами $(x, y)$ точки $M \in \pi$ в фиксированной прямоугольной системе координат $Oxy$ на плоскости $\pi$ называется упорядоченная пара из чисел $x$ и $y$ величин соответствующих направленных отрезков $\overrightarrow{OM_x}$ и $\overrightarrow{OM_y}$.*

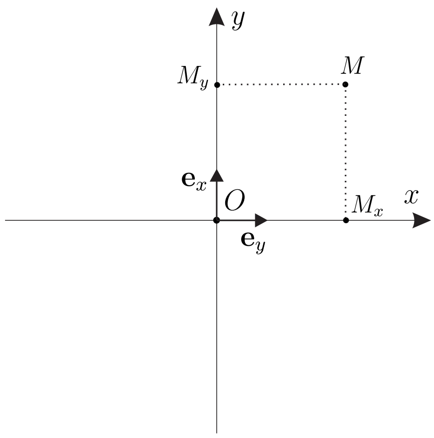


Рис. 5. Декартовы координаты точки $M$.

## § 4. Декартовы координаты в пространстве

Определение 10. *Три различные попарно перпендикулярные оси в пространстве* (*обозначаемые как $Ox$, $Oy$ и $Oz$*), *пересекающиеся в некоторой точке $O$, и с одинаковым масштабом измерения* *длин отрезков на каждой из осей называется декартовой системой координат в пространстве с началом в точке $O$.*

По сравнению со случаем декартовой системы координат на плоскости появляется еще одна ось — ось, которую обозначают как $Oz$ и называют осью *аппликат*.

Замечание 2. Обычно прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве выбирают так, чтобы при повороте оси абсцисс $Ox$ против часовой стрелки на $90^\circ$, если смотреть с положительного конца оси аппликат $Oz$, ось абсцисс $Ox$ совпадёт с положительным направлением оси ординат $Oy$. Такая система координат $Oxyz$ называется правой.

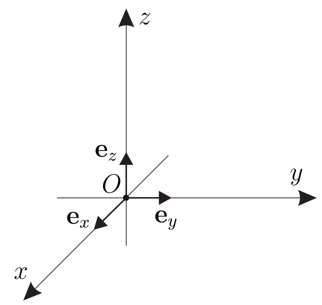


Рис. 6. Декартова система координат $Oxyz$ в пространстве и её орты.

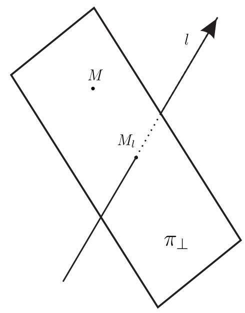


Рис. 7. Ортогональная проекция $M_l$ точки $M$ пространства на ось $l$.

Определение 11. *Ортогональной проекцией точки $M$ пространства на ось $l$ называется точка $M_l$ пересечения плоскости $\pi_\perp$, перпендикулярной к оси $l$ и проходящей через точку $M$, с осью $l$.*

Пусть $M_x$, $M_y$ и $M_z$ — это ортогональные проекции произвольной точки $M$ пространства на соответствующие оси $Ox$, $Oy$ и $Oz$.

Определение 12. *Декартовыми прямоугольными координатами $(x, y, z)$ точки $M$ пространства относительно фиксированной прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$ называется* *упорядоченная тройка из чисел $x$, $y$ и $z$ величин соответствующих направленных отрезков $\overrightarrow{OM_x}$, $\overrightarrow{OM_y}$ и $\overrightarrow{OM_z}$.*

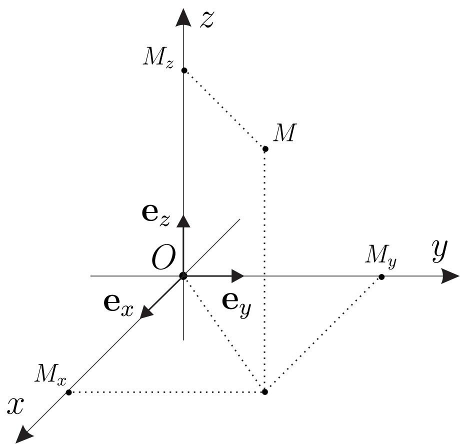


Рис. 8. Декартовы координаты точки $M$ пространства.

Задача 1. Требуется вычислить расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на плоскости с координатами в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxy$.

Решение. Смотри наглядный рисунок 9.

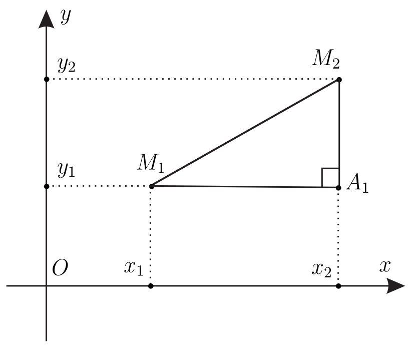


Рис. 9. К решению задачи 1.

Задача 2. Требуется вычислить расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ пространства с координатами в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$.

Решение. Смотри наглядный рисунок 10.

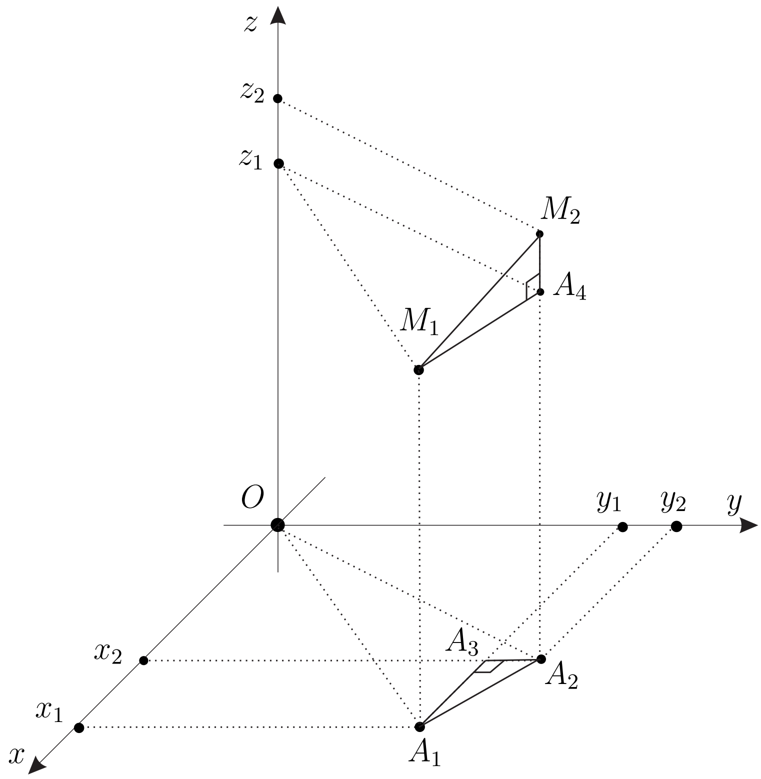


Рис. 10. К решению задачи 2.

## § 5. Системы косоугольных декартовых координат

На рисунках 11 и 12 мы изобразили примеры косоугольных декартовых координат на плоскости и в пространстве.

Определение 13. *Три различные оси в пространстве (обозначаемые как $Ox$, $Oy$ и $Oz$), не лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в точке $O$, с одинаковым масштабом измерения длин отрезков на осях $Ox$, $Oy$ и $Oz$ определяют произвольную косоугольную декартову систему координат $Oxyz$ в пространстве.*

Замечание 3. Оси $Ox$, $Oy$ и $Oz$ в определении 13 однозначно определяют следующие три плоскости $\pi_{xy}$, $\pi_{zx}$ и $\pi_{yz}$: плоскость $\pi_{xy}$ содержит оси $Ox$ и $Oy$; плоскость $\pi_{zx}$ содержит оси $Oz$ и $Ox$; плоскость $\pi_{yz}$ содержит оси $Oy$ и $Oz$.

Определение 14. *Точка $M_l^\pi \in l$ называется проекцией точки $M$ пространства на ось $l$ параллельно плоскости $\pi$, если она является точкой пересечения плоскости, проходящей через точку $M$ параллельно плоскости $\pi$, с осью $l$.*

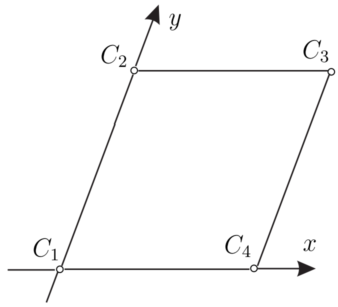


Рис. 11. Косоугольная система координат на плоскости, связанная с кристаллической решеткой.

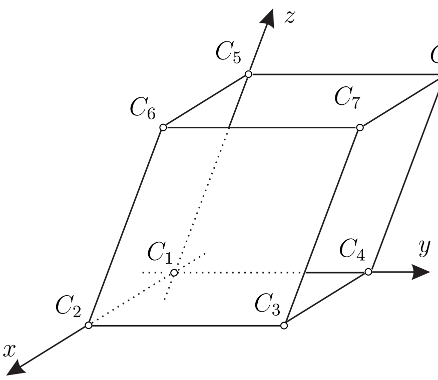


Рис. 12. Косоугольная система координат в пространстве, связанная с кристаллической решеткой.

Обозначение. $M_l := \mathrm{Pr}_l^{\pi} M$.
Пусть

$$M_x = \mathrm{Pr}_{Ox}^{\pi_{yz}} M, \quad M_y = \mathrm{Pr}_{Oy}^{\pi_{zx}} M, \quad M_z = \mathrm{Pr}_{Oz}^{\pi_{xy}} M.$$

Определение 15. *Декартовыми косоугольными координатами $(x, y, z)$ точки $M$ относительно некоторой фиксированной косоугольной декартовой системы координат $Oxyz$ называется величины соответствующих направленных отрезков $\overrightarrow{OM_x}$, $\overrightarrow{OM_y}$ и $\overrightarrow{OM_z}$.*

Задача 3. На рисунке 12 изображён ромб, у которого длина рёбер в некотором масштабе равны 1. В указанной на рисунке 13 косоугольной системе координат $C_1xyz$ найти координаты точек $C_1$, $C_3$, $C_7$ и $C_8$.

Ответ. $C_1(0, 0, 0)$, $C_3(1, 1, 0)$, $C_7(1, 1, 1)$ и $C_8(0, 1, 1)$.

## § 6. Полярная система координат на плоскости

Введем полярную систему координат на плоскости. Пусть на плоскости $\pi$ выбрана точка $O$, который называется *полюсом*. Выберем луч $OP$, исходящий из полюса $O$, называемый *полярной осью*. Для произвольной точки $M \in \pi$ рассмотрим направленный отрезок $\overrightarrow{OM}$, который называется *радиус–вектором* точки $M$. Рассмотрим ориентированный угол $\varphi$ между полярной осью $OP$ и радиусом–вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый против часовой стрелки от полярной оси $OP$ к радиус вектору $\overrightarrow{OM}$. Длину $\left|\overrightarrow{OM}\right|$ радиус–вектора $\overrightarrow{OM}$ обозначим через $r$.

Определение 16. *Упорядоченная пара чисел $(r, \varphi)$ называется полярными координатами точки $M \in \pi$.*

Замечание 4. По своему определению $0 \leqslant r < +\infty$ и $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Для полюса $O$ не определён угол $\varphi$, но полюс вполне определяется равенством $r = 0$.

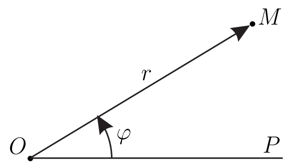


Рис. 13. Полярная система координат на плоскости и полярные координаты $(r, \varphi)$ точки $M$.

Определение 17. *Декартова система координат $Oxy$, в которой ось абсцисс $Ox$ совпадает по направлению с полярной осью $OP$, а ось $Oy$ является осью ординат, называется декартовой системой координат на плоскости, согласованной с полярной системой координат.*

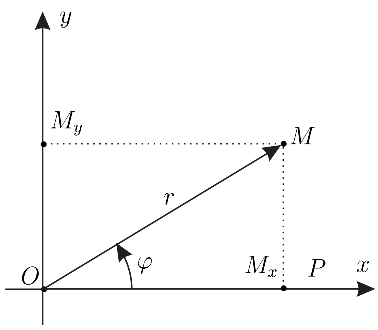


Рис. 14. Полярная система координат на плоскости и согласованная с ней прямоугольная система декартовых координат.

Ф о р м у л ы  с в я з и  д е к а р т о в ы х  и  п о л я р н ы х  к о о р д и н а т.

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \tag{6.1}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{6.2}$$

П р и м е р 1. У р а в н е н и е  э л л и п с а  в  м о д и ф и ц и р о в а н н о й  п о л я р н о й  с и с т е м е  к о о р д и н а т.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi.$$

## § 7. Цилиндрическая система координат в пространстве

Пусть на плоскости $\pi$ определена некоторая полярная система координат с полярной осью $OP$ и ориентированным углом $\varphi$. Рассмотрим ось $Oz$, перпендикулярную к плоскости $\pi$ и проходящую через полюс $O$, ориентированную таким образом, чтобы смотря со стороны положительного направления оси $Oz$ ориентированный угол $\varphi$ отсчитывался против часовой стрелки. Пусть $M_z$ — это ортогональная проекция

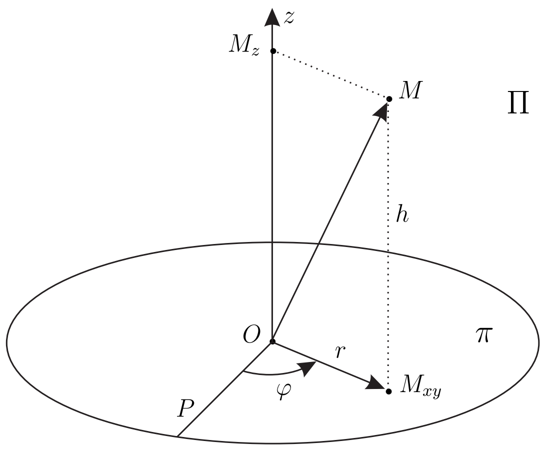


Рис. 15. Цилиндрическая система координат.

точки $M$ на ось $Oz$, имеющая декартову координату $z$, а $M_{xy}$ — это ортогональная проекция точки $M$ на плоскость $\pi$, имеющая полярные координаты $(r, \varphi)$.

О п р е д е л е н и е 18. *Упорядоченная тройка* $(r, \varphi, z)$ *называется цилиндрическими координатами точки* $M$.

З а м е ч а н и е 5. Отметим, что точки лежащие на оси $Oz$ вполне определяются своей декартовой координатой $z$ и равенством $r = 0$ и не имеют угловой координаты $\varphi$.

Формулы связи декартовых и цилиндрических координат.

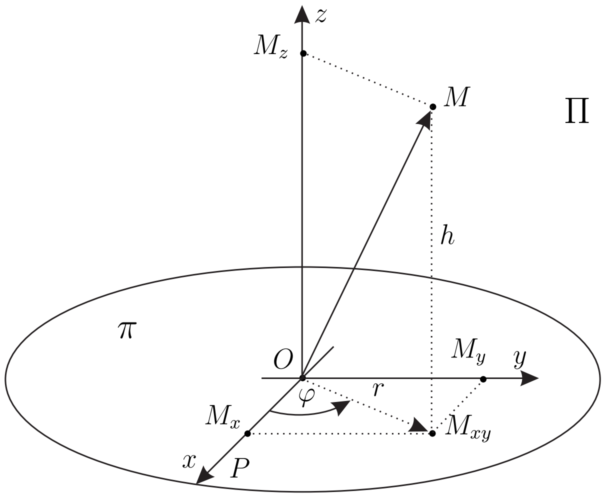


Рис. 16. Цилиндрическая система координат и согласованная с ней декартова система координат $Oxyz$.

Пусть на плоскости $\pi$ введена декартова система координат $Oxy$, согласованная с полярной. Тогда справедливы формулы, связывающие декартовы координаты $(x, y, z)$ точки $M$ с её цилиндрическими $(r, \varphi, z)$.

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z. \tag{7.1}$$

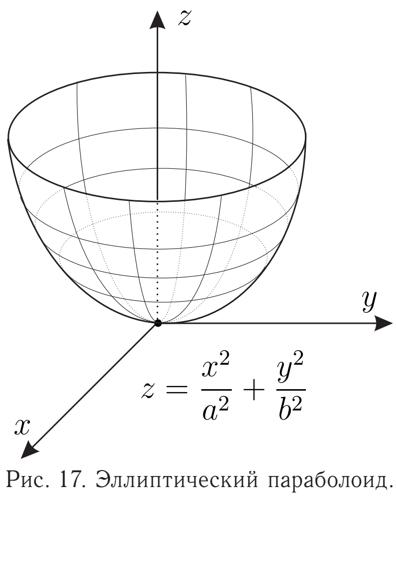


Рис. 17. Эллиптический параболоид.

Пример 2. Уравнение эллиптического параболоида в модифицированной цилиндрической системе координат.

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow z = r^2, \quad x = ar\cos\varphi, \quad y = br\sin\varphi.$$

Пример 3. Уравнение конуса в модифицированной цилиндрической системе координат.

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow |z| = cr, \quad x = ar\cos\varphi, \quad y = br\sin\varphi.$$

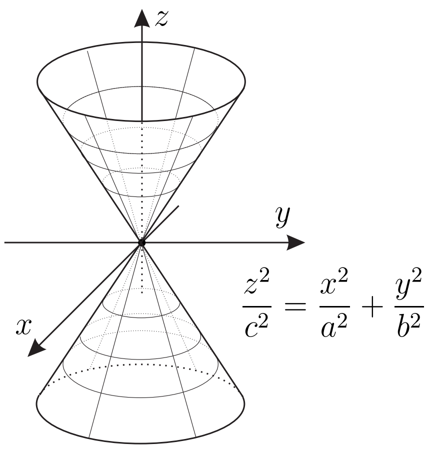


Рис. 18. Эллиптический конус.

## § 8. Сферическая система координат

Сферическую систему координат в пространстве удобно вводить вместе с цилиндрической системой координат. Сначала выбирается плоскость $\pi$ пространства. На плоскости выбирается полюс $O$ и полярная ось $OP$. Наконец, также как и ранее выбирается ось $Oz$, перпендикулярная к плоскости $\pi$ и проходящая через полюс $O \in \pi$. Пусть $M$ — произвольная точка пространства. Обозначим через $r$ длину радиус–вектора $\overrightarrow{OM}$, через $\vartheta$ — ориентированный угол между осью $Oz$ и радиус–вектором $\overrightarrow{OM}$, через $\varphi$ — ориентированный угол между направленным отрезком $\overrightarrow{OM_{xy}}$ ($M_{xy}$ — ортогональная проекция точки $M$ на плоскость $\pi$) и полярной осью $OP$. При этом угол $\varphi$ называется *азимутальным углом*, а угол $\vartheta$ — *зенитным углом*.

Определение 19. *Упорядоченная тройка $(r, \vartheta, \varphi)$ называется сферическими координатами точки $M$ пространства.*

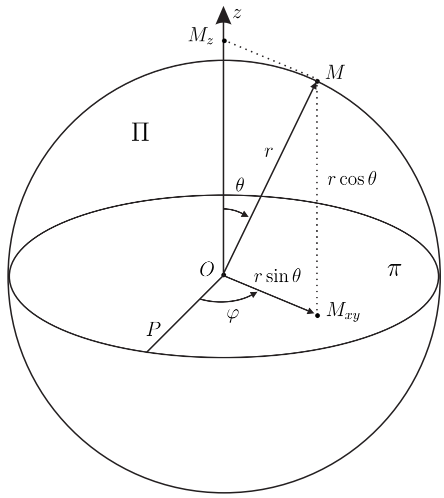


Рис. 19. Сферическая система координат в пространстве.

Замечание 6. Отметим, что полюс $O$ сферической системы координат не имеет угловых координат $(\vartheta, \varphi)$, но вполне определяется равенством $r = 0$.

Формулы связи декартовых и сферических координат.

Пусть на плоскости $\pi$ введена специальная декартова система координат $Oxy$. Тогда справедливы формулы, связывающие декартовы координаты $(x, y, z)$ точки $M$ с её сферическими координатами $(r, \vartheta, \varphi)$.

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta, \tag{8.1}$$
$$0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Пример 4. Уравнение эллипсоида в сферической системе координат.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow x = a\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = b\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = c\cos\vartheta.$$

Выкладки.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\vartheta, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1.$$

## § 9. Проекции направленных отрезков

Определение 20. *Проекцией направленного отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *на ось* $Ox$ *в пространстве называется величина направленного отрезка* $\overrightarrow{A_xB_x}$, *где* $A_x$ *и* $B_x$ — *это ортогональные проекции точек* $A$ *и* $B$ *на ось* $Ox$ *соответственно.*

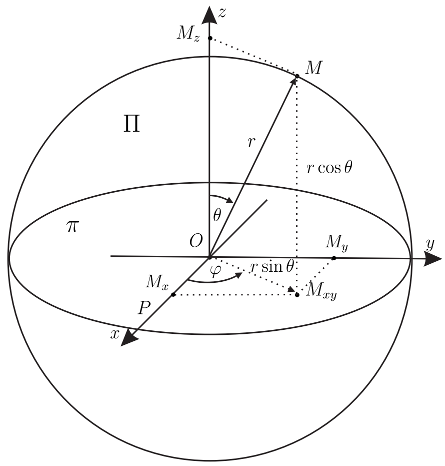


Рис. 20. Сферическая система координат в пространстве и согласованная с ней декартова система координат $Oxyz$.

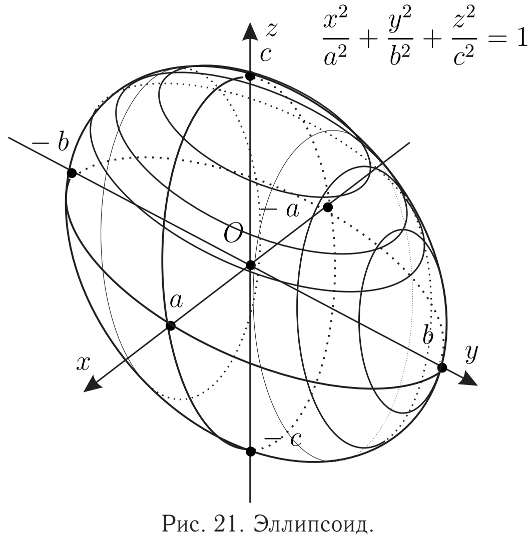


Рис. 21. Эллипсоид.

Лемма 1. *Если $A_x$ имеет декартову координату $x_1$, а $B_x$ имеет декартову координату $x_2$, тогда величина направленного отрезка $\overrightarrow{A_xB_x}$ равна*

$$A_xB_x = x_2 - x_1.$$

Обозначение. $A_xB_x = \mathrm{Pr}_{Ox}\,\overrightarrow{AB}$.

Определение 21. *Два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются равными, если при совмещении точек $A$ и $C$ точки $B$ и $D$ тоже совпадают.*

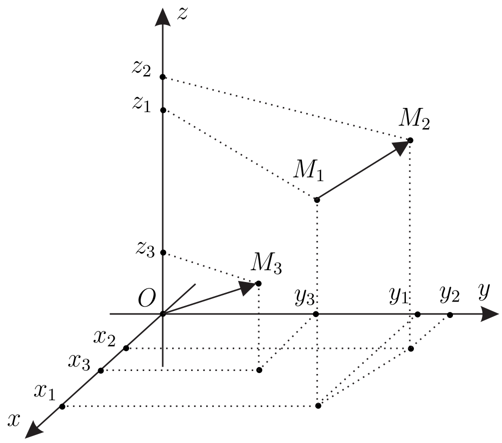


Рис. 22. Некоторый направленный отрезок $\overline{M_1M_2}$ и равный ему направленный отрезок $\overline{OM_3}$.

Пусть фиксирована некоторая декартова система координат $Oxyz$. Рассмотрим точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Заметим, что

$$\mathrm{Pr}_{Ox}\,\overrightarrow{M_1M_2} = M_{1x}M_{2x} = x_2 - x_1, \tag{9.1}$$

$$\mathrm{Pr}_{Oy}\,\overrightarrow{M_1M_2} = M_{1y}M_{2y} = y_2 - y_1, \tag{9.2}$$

$$\mathrm{Pr}_{Oz}\,\overrightarrow{M_1M_2} = M_{1z}M_{2z} = z_2 - z_1. \tag{9.3}$$

Лемма 2. *Равные направленные отрезки имеют равные проекции.*

Пусть точка $M_3$ такова, что направленный отрезок $\overrightarrow{OM_3}$ равен направленному отрезку $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Лемма 3. $M_3(x_3, y_3, z_3) = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

Доказательство. Действительно, согласно лемме 2 имеем

$$\mathrm{Pr}_{Ox}\,\overrightarrow{OM_3} = \mathrm{Pr}_{Ox}\,\overrightarrow{M_1M_2} = x_2 - x_1,$$
$$\mathrm{Pr}_{Oy}\,\overrightarrow{OM_3} = \mathrm{Pr}_{Oy}\,\overrightarrow{M_1M_2} = y_2 - y_1,$$
$$\mathrm{Pr}_{Oz}\,\overrightarrow{OM_3} = \mathrm{Pr}_{Oz}\,\overrightarrow{M_1M_2} = z_2 - z_1.$$

Заметим, что справедливы равенства для величин

$$x_3 = OM_{3x} = \mathrm{Pr}_{Ox}\,\overrightarrow{OM_3},\ y_3 = OM_{3y} = \mathrm{Pr}_{Oy}\,\overrightarrow{OM_3},\ z_3 = OM_{3z} = \mathrm{Pr}_{Oz}\,\overrightarrow{OM_3}.$$

соответствующих направленных отрезков

$$\overrightarrow{OM_{3x}}, \quad \overrightarrow{OM_{3y}}, \quad \overrightarrow{OM_{3z}}.$$

Лемма доказана.

Теперь мы рассмотрим радиус–вектор $\overrightarrow{OM}$ в некоторой прямоугольной декартовой системой координат $Oxyz$. Введём углы $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ между указанным радиус–вектором и осями $Ox$, $Oy$ и $Oz$ соответственно. Пусть рассматриваемая точка $M$ имеет координаты $\{x, y, z\}$. Тогда

$$x = \mathrm{Pr}_{Ox}\,\overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos\alpha, \tag{9.4}$$

$$y = \mathrm{Pr}_{Oy}\,\overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos\beta, \tag{9.5}$$

$$z = \mathrm{Pr}_{Oz}\,\overrightarrow{OM} = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cos\gamma. \tag{9.6}$$

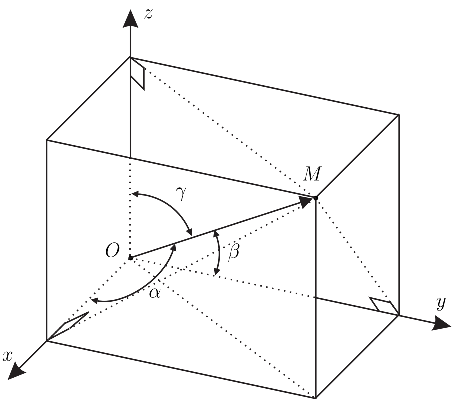


Рис. 23. Углы между радиус–вектором $\overline{OM}$ и осями координат.

Поскольку как мы установили в задаче 2

$$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,, \tag{9.7}$$

то

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \tag{9.8}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \tag{9.9}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{9.10}$$

Определение 22. *Числа* $\cos\alpha$, $\cos\beta$ *и* $\cos\gamma$ *называются направляющими косинусами радиус–вектора* $\overrightarrow{OM}$.

Очевидно, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Задача 4. Пусть точки $M_1$ и $M_2$ заданы своими координатами $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ относительно произвольной (прямоугольной или косоугольной) декартовой системы координат $Oxyz$. Пусть точка $M_3$ делит отрезок $[M_1, M_2]$ в отношении $\alpha : \beta$, считая от точки $M_1$. Требуется найти координаты $\{x_3, y_3, z_3\}$ точки $M_3$.

Решение. Спроектируем направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ с выбранной указанным в условии точкой $M_3$ этого отрезка на оси $Ox$, $Oy$ и

$Oz$. В результате получим направленные отрезки $\overrightarrow{M_{1x}M_{2x}}$, $\overrightarrow{M_{1y}M_{2y}}$ и $\overrightarrow{M_{1z}M_{2z}}$ с проекциями $M_{3x}$, $M_{3y}$ и $M_{3z}$ точки $M_3$.

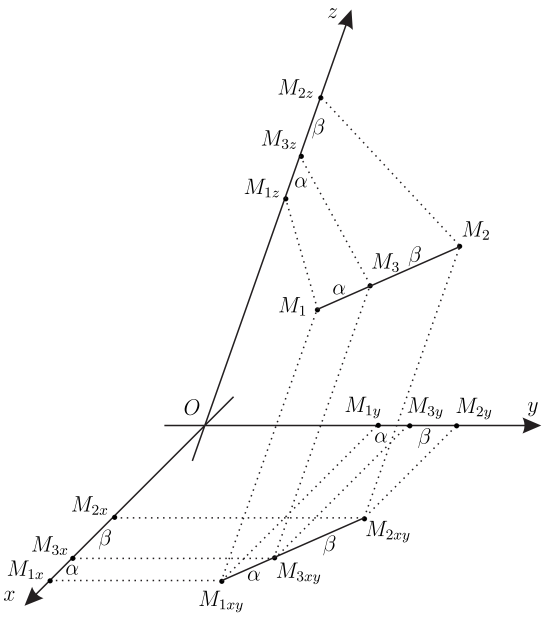


Рис. 24. Построения к задаче 3 в косоугольной системе декартовых координат.

Очевидно, точка $M_{3x}$ делит направленный отрезок $\overrightarrow{M_{1x}M_{2x}}$ в отношении $\alpha : \beta$, считая от точки $M_{1x}$. Следовательно,

$$\frac{M_{1x}M_{3x}}{M_{3x}M_{2x}} = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow x_3 - x_1 = \frac{\alpha}{\beta}(x_2 - x_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) x_3 = x_1 + \frac{\alpha}{\beta} x_2 \Rightarrow x_3 = \frac{\beta x_1 + \alpha x_2}{\alpha + \beta}.$$

Аналогичным образом мы получаем оставшиеся координаты.

$$y_3 = \frac{\beta y_1 + \alpha y_2}{\alpha + \beta}, \quad z_3 = \frac{\beta z_1 + \alpha z_2}{\alpha + \beta}. \quad \boxtimes$$