Конспект лекции 10

АФФИННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 0. План лекции

Лекция Аффинные пространства.

1. Аффинный базис.

2. Аффинные координаты точек.

3. Векторное уравнение прямой.

4. Векторное уравнение плоскости.

5. Общее уравнение прямой на плоскости.

6. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

7. Уравнение прямой в отрезках.

8. Взаимное расположение прямых на плоскости. Векторный и матричный анализ.

9. Плоскость в пространстве. Вывод общего уравнения.

10. Уравнение плоскости, проходящей через три точки.

11. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве.

12. Уравнение прямых в пространстве и их взаимное расположение.

§ 1. Определение аффинного пространства

Пусть $\mathcal{A}$ — это непустое множество, элементы которого мы будем называть *точками* и обозначать прописными латинскими буквами $A, B, C, \ldots$, и $\mathcal{V}$ — векторное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Предположим, что задано отображение

$$\Phi : \ \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{V}, \quad (A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}, \tag{1.1}$$

которое упорядоченной паре точек $(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ ставит в соответствие вектор $\overrightarrow{AB} \in \mathcal{V}$.

Определение 1. *Тройка* $(\mathcal{A}, \mathcal{V}, \mathbb{K})$ *называется аффинным пространством с ассоциированным векторным пространством* $\mathcal{V}$ *над полем* $\mathbb{K}$, *если выполнены следующие условия, называемые аксиомами аффинного пространства*:

АП1: *для любой точки* $A \in \mathcal{A}$ *и любого вектора* $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ *существует единственная точка* $B \in \mathcal{A}$, *для которой* $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$;

АП2: *для любых трёх точек* $A, B, C \in \mathcal{A}$ *имеет место равенство*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC},$$

называемое правилом треугольника.

Замечание 1. Аксиома **АП1** означает, образно говоря, что точка $B \in \mathcal{A}$ получена из точки $A \in \mathcal{A}$ параллельным переносом на вектор $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$.

Замечание 2. Аксиомы **АП1** и **АП2** образуют вторую группу *аксиом Вейля* векторно–точечной аксиоматики геометрии.

Определение 2. *Размерность* $\dim \mathcal{V}$ *ассоциированного векторного пространства* $\mathcal{V}$ *с аффинным пространством* $(\mathcal{A}, \mathcal{V}, \mathbb{K})$ *называется размерностью аффинного пространства.*

Обозначение. Используемое обозначение $\dim \mathcal{A}$. Кроме того, для сокращения записи вместо тройки $(\mathcal{A}, \mathcal{V}, \mathbb{K})$ используется сокращённое обозначение $\mathcal{A}$.

Пример аффинного пространства. $\mathcal{V}_{\text{афф}} = (\mathcal{V}, \mathcal{V}, \mathbb{K})$, в котором в качестве множества «точек» выступает само векторное пространство $\mathcal{V}$, а его векторы являются одновременно точками.

$$\Phi : \ \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \overrightarrow{\mathbf{ab}} := \mathbf{b} - \mathbf{a} \in \mathcal{V}.$$

Заметим, что выполнены обе аксиомы аффинного пространства.

□ Действительно, для любой точки $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ и для любого вектора $\mathbf{c} \in \mathcal{V}$ существует единственная точка $\mathbf{b} \in \mathcal{V}$, равная

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c},$$

для которой

$$\Phi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \overrightarrow{\mathbf{ab}} := \mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{c}.$$

Для любых трёх точек $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{V}$ имеет место правило сложения треугольника

$$\overrightarrow{\mathbf{ab}} + \overrightarrow{\mathbf{bc}} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mathbf{c} - \mathbf{a} = \overrightarrow{\mathbf{ac}}. \quad \boxtimes$$

В частности, арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ столбцов является одновременно и векторным и аффинным пространством.

Дадим определение *аффинной системы координат*.

Определение 3. *Аффинная система координат, или репер, в аффинном пространстве $(\mathcal{A}, \mathcal{V}, \mathbb{K})$ — это пара, состоящая из точки $O \in \mathcal{A}$ (начало координат) и базиса $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ ассоциированного векторного пространства $\mathcal{V}$.*

Обозначение. Обычно используют обозначение $O\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$.

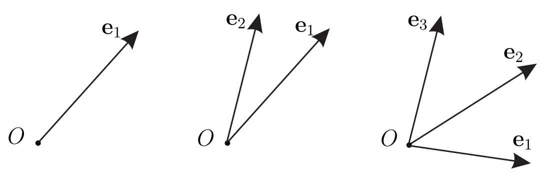

Рис. 1. Аффинные системы координат на прямой, на плоскости и в пространстве.

Определение 4. *Радиус–вектором точки $A \in \mathcal{A}$ аффинного пространства $(\mathcal{A}, \mathcal{V}, \mathbb{K})$ в аффинной системе координат $O\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n$ называется вектор $\overrightarrow{OA} \in \mathcal{V}$. Координатами точки $A \in \mathcal{A}$ называются координаты радиус–вектора $\overrightarrow{OA} \in \mathcal{V}$ в базисе $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ векторного пространства $\mathcal{V}$.*

§ 2. Прямые и плоскости в аффинном пространстве

Определение 5. *Прямой в аффинном пространстве $(\mathcal{A}, \mathcal{V}, \mathbb{R})$, задаваемой точкой $M_0 \in \mathcal{A}$ (опорной точкой) и ненулевым вектором $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ (направляющим вектором), называется множество точек $M \in \mathcal{A}$, для которых вектор $\overrightarrow{M_0M}$ лежит в линейной оболочке $L(\mathbf{a}) := \{t\mathbf{a} : t \in \mathbb{R}\}$ направляющего вектора.*

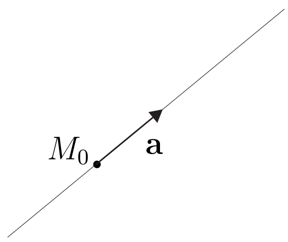

Рис. 2. К определению прямой.

Обозначение. Прямую с опорной точкой M_0 и направляющим вектором $\mathbf{a}$ будем обозначать следующим образом:

$$l(M_0, \mathbf{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ M \in \mathcal{A} : \ \overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{a}, \quad t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Векторное параметрическое уравнение прямой.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}.$$

Если $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ и $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$, то

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Лемма 1. *Пусть N_0 — это произвольная точка прямой $l(M_0, \mathbf{a})$, а $\mathbf{b} \in L(\mathbf{a})$ — это произвольный ненулевой вектор, тогда*

$$l(N_0, \mathbf{b}) = l(M_0, \mathbf{a}).$$

Лемма 2. *Через две различные точки M_0 и M_1 аффинного пространства проходит единственная прямая.*

В дальнейшем мы будем рассматривать вещественные аффинные пространства, т. е. тройку $(\mathcal{A}, \mathcal{V}, \mathbb{R})$.

Определение 6. *Говорят, что точка M прямой (M_0M_1) лежит между точками M_0 и M_1, если соответствующей этой точке значение параметра t в равенстве*

$$\overrightarrow{M_0M} = t\overrightarrow{M_0M_1}$$

удовлетворяет условию $0 < t < 1$.

Определение 7. *Множество всех точек прямой (M_0M_1), лежащих между точками M_0 и M_1 вмести с самими точками M_0 и M_1, называется отрезком прямой и обозначается $[M_0M_1]$:*

$$[M_0M_1] = \left\{ M \in \mathcal{A} : \ \overrightarrow{M_0M} = t\overrightarrow{M_0M_1}, \quad t \in [0, 1] \right\}.$$

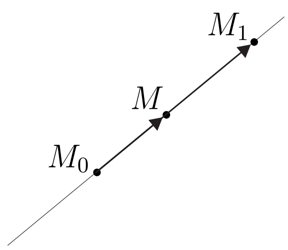

Рис. 3. К определению 7.

Плоскость в аффинном пространстве $(\mathcal{A}, \mathcal{V}, \mathbb{R})$.

Определение 8. *Плоскостью в аффинном пространстве $\mathcal{A}$, задаваемой точкой $M_0 \in \mathcal{A}$ (опорной точкой) и двумя неколлинеар-*

ными (линейно независимыми) векторами $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$ *(направляющими векторами), называется множество точек* $M \in \mathcal{A}$, *для которых вектор* $\overrightarrow{M_0M}$ *лежит в линейной оболочке* $L(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *векторов* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:

$$\overrightarrow{M_0M} \in L(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \{t\mathbf{a} + s\mathbf{b} : \ t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Обозначение. Плоскость будем обозначать как $\pi(M_0, \mathbf{a}, \mathbf{b})$.

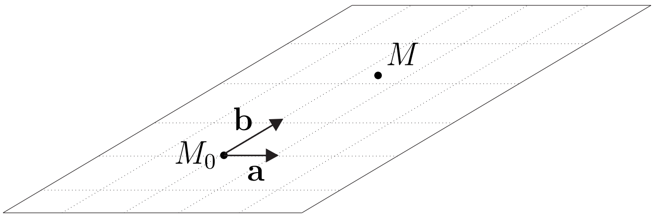

Рис. 4. Плоскость.

Замечание 3. Иначе говоря,

$$\pi(M_0, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left\{ M \in \mathcal{A} : \ \overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{a} + s\mathbf{b}, \quad s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Векторное параметрическое уравнение плоскости.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t + \mathbf{b}s, \quad t, s \in \mathbb{R}, \qquad (2.2)$$

где $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ — соответствующие радиус–векторы относительно фиксированной точки $O \in \mathcal{A}$.

Лемма 3. *Если* $N_0 \in \pi(M_0, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ *и векторы* $\mathbf{a}', \mathbf{b}' \in L(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *и линейно независимы, то*

$$\pi(N_0, \mathbf{a}', \mathbf{b}') = \pi(M_0, \mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

§ 3. Двумерная аффинная геометрия

Пусть $(\mathcal{A}, \mathcal{V}, \mathbb{R})$ — аффинное пространство и $\dim \mathcal{V} = 2$. Выберем некоторый репер $O\mathbf{ij}$. Тогда параметрическое уравнение прямой (2.1) запишем в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + a_x t, \\ y = y_0 + a_y t, \end{cases}, \quad a_x^2 + a_y^2 > 0. \qquad (3.1)$$

Каноническое уравнение прямой.

$$a_y(x - x_0) - a_x(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ a_x & a_y \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.2)$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки. Пусть прямая проходит через две точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ и $M_2(\mathbf{r}_2)$. Тогда

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)t, \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (3.3)$$

Общее уравнение прямой на плоскости.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By = D, \quad A^2 + B^2 > 0. \tag{3.4}$$

Если $D = 0$, то, очевидно, плоскость проходит через начало координат $O(0, 0)$. Если же $A \neq 0$, $B \neq 0$, $D \neq 0$, то уравнение (3.4) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{3.5}$$

которое называется *уравнением прямой в отрезках*.

§ 4. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Пусть в двумерном аффинном пространстве $(\mathcal{A}, \mathcal{V}, \mathbb{R})$ (плоскости) заданы две прямые:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}_1, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + s\mathbf{a}_2, \quad \mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}. \tag{4.1}$$

Приравняем правые части уравнений (4.1)

$$\mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_2 + s\mathbf{a}_2 \Leftrightarrow \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = t\mathbf{a}_1 - s\mathbf{a}_2. \tag{4.2}$$

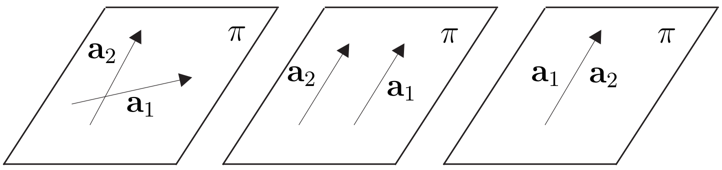

Рис. 5. Взаимное расположение прямых на плоскости.

Случай 1. Прямые пересекаются. Векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ линейно независимы (неколлинеарны). Тогда вектор $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ может быть разложен по базису $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Таким образом, найдётся пара чисел $(t_0, -s_0)$, что

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = t_0\mathbf{a}_1 - s_0\mathbf{a}_2 \Leftrightarrow \mathbf{r}_1 + t_0\mathbf{a}_1 = \mathbf{r}_2 + s_0\mathbf{a}_2.$$

Случай 2. Прямые параллельны. Векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ линейно зависимы, но вектор $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \notin L(\mathbf{a}_1) = L(\mathbf{a}_2)$.

Случай 3. Прямые совпадают. Векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ линейно зависимы и вектор $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \in L(\mathbf{a}_1) = L(\mathbf{a}_2)$.

Анализ взаимного расположения прямых на основе их общих уравнений.

$$A_1x + B_1y = D_1, \quad A_2x + B_2y = D_2, \quad A_1^2 + B_1^2 > 0, \quad A_2^2 + B_2^2 > 0.$$

Случай 1. Прямые пересекаются.

$$\triangle = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Случай 2. Прямые параллельны.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \triangle = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2.$$

Случай 3. Прямые совпадают.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \triangle = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \end{pmatrix} = 1.$$

§ 5. Трёхмерная аффинная геометрия

Пусть $(\mathcal{A}, \mathcal{V}, \mathbb{R})$ — это трёхмерное аффинное пространство с аффинной системой координат $O\mathbf{ijk}$. Тогда уравнение плоскости

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{a} + t\mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + sa_x + tb_x, \\ y = y_0 + sa_y + tb_y, \\ z = z_0 + sa_z + tb_z. \end{cases} \tag{5.1}$$

Утверждение 1.

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = s\mathbf{a} + t\mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \tag{5.2}$$

$\square$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = s\mathbf{a} + t\mathbf{b} \Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow c^1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + c^2\mathbf{a} + c^3\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

где $|c^1| + |c^2| + |c^3| > 0$. Если $c^1 = 0$, то

$$c^2\mathbf{a} + c^3\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{и} \quad |c^2| + |c^3| > 0.$$

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — линейно зависимые. Противоречие с определением плоскости. $\boxtimes$

Общее уравнение плоскости в пространстве.

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{5.3}$$

— это разложение определителя (5.2) по первой строчки, где A, B и C — это соответствующие алгебраические дополнения.

$$Ax+By+Cz=D, \quad D=Ax_0+By_0+Cz_0. \tag{5.4}$$

Утверждение 2. $A^2+B^2+C^2>0$.

□ По определению плоскости векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно независимы и поэтому

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}=2.$$

Следовательно, хотя бы один минор второго порядка из возможных трёх отличен от нуля:

$$A^2+B^2+C^2=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2>0. \quad \boxtimes$$

Если $A\neq 0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$, $D\neq 0$, то уравнение (5.4) можно переписать в виде

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{5.5}$$

Свойства плоскостей в пространстве. Справедливо следующее утверждение:

Лемма 4. *Существует единственная плоскость, проходящая через три произвольные точки M_1, M_2 и M_3, не лежащие на одной прямой.*

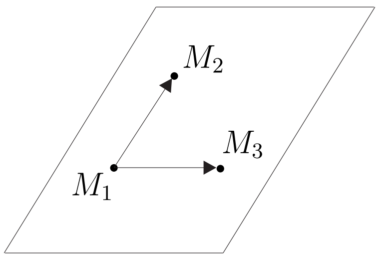

Рис. 6. Плоскость, проходящая через три точки.

Доказательство существования.

Пусть фиксирован репер $O\mathbf{ijk}$. Точки определены своими координатами $M_1=(x_1,y_1,z_1)$, $M_2=(x_2,y_2,z_2)$ и $M_3=(x_3,y_3,z_3)$. Пусть $M_1= =(x_1,y_1,z_1)$ — это опорная точка. Векторы

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1) \quad \text{и} \quad \overrightarrow{M_1M_3}=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)$$

по условию не коллинеарны (линейно независимы). Искомая плоскость как множество точек $M = (x, y, z)$ даётся равенством

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{5.6}$$

Лемма доказана.

Имеет место следующее утверждение:

Лемма 5. *Существует единственная плоскость, проходящая через две различные точки M_1 и M_2 и прямую $l(M_1, \mathbf{a})$ с направляющим вектором $\mathbf{a}$, который неколлинеарен вектору $\overrightarrow{M_1 M_2}$.*

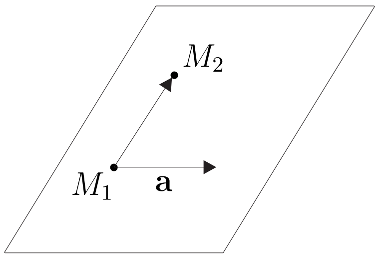

Рис. 7. К лемме 5.

Доказательство существования. Уравнение плоскости как множества точек $M = (x, y, z)$ в некотором репере $O\mathbf{ijk}$ имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0.$$

Лемма доказана.

Уравнение прямой в трехмерном аффинном пространстве.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + ta_x, \\ y = y_0 + ta_y, \\ z = z_0 + ta_z, \end{cases}$$

§ 6. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве

Рассмотрим плоскости в аффинном пространстве

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1, \quad A_2 x + B_2 y + C_2 z = D_2, \tag{6.1}$$
$$A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0, \quad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0.$$

Случай 1. Пересекающиеся плоскости.

$$\triangle = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда по формулам Крамера получим решение в следующем виде:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} D_1 - C_1 z & B_1 \\ D_2 - C_2 z & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} z, \tag{6.2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & D_1 - C_1 z \\ A_2 & D_2 - C_2 z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} z. \tag{6.3}$$

Если теперь положить $z = t$, то решение (6.2) и (6.3) можно представить в следующей параметрической форме:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Случай 2. Параллельные плоскости. Пусть

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2. \tag{6.4}$$

Случай 3. Совпадающие плоскости. Пусть

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1, \quad \operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 1.$$

§ 7. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Пусть плоскость задана общим уравнением

$$Ax + By + Cz = D, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0,$$

а прямая — параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + t a_x, \\ y = y_0 + t a_y, \\ z = z_0 + t a_z, \end{cases} \quad a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 > 0. \tag{7.1}$$

Тогда

$$t\,(A a_x + B a_y + C a_z) = D - (A x_0 + B y_0 + C z_0). \tag{7.2}$$

Случай 1. Прямая и плоскость пересекаются. Если $Aa_x + Ba_y + Ca_z \neq 0$, то имеется единственное решение

$$t_0 = \frac{D - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)}{Aa_x + Ba_y + Ca_z}.$$

Случай 2. Прямая лежит на плоскости. Если $Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = D$.

Случай 3. Прямая параллельна плоскости. Если $Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0$, но $Ax_0 + By_0 + Cz_0 \neq D$.

§ 8. Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть в трехмерном аффинном пространстве рассматриваются две прямые

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} + s\mathbf{a}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{q} + t\mathbf{b}, \tag{8.1}$$

Рассмотрим уравнение

$$\mathbf{p} + s\mathbf{a} = \mathbf{q} + t\mathbf{b} \Leftrightarrow s\mathbf{a} - t\mathbf{b} = \mathbf{q} - \mathbf{p}. \tag{8.2}$$

Векторный анализ.

Случай 1. Прямые скрещиваются. Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ линейно независимы (не компланарны), тогда уравнение (8.2) не имеет решений.

Случай 2. Прямые пересекаются. Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ линейно зависимы (компланарны), но векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно независимы (неколлинеарны).

Случай 3. Прямые параллельны. Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно зависимы (коллинеарны), но при этом вектор $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ им не коллинеарен (т. е. $\mathbf{q} - \mathbf{p} \notin L(\mathbf{a}) = L(\mathbf{b})$).

Случай 4. Прямые совпадают. Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно зависимы (коллинеарны) и вектор $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ им коллинеарен, т. е. $\mathbf{q} - \mathbf{p} \in L(\mathbf{a}) = L(\mathbf{b})$.

Координатный анализ. Пусть

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} - \mathbf{p} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$s \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} sa_x + tb_x = c_x, \\ sa_y + tb_y = c_y, \\ sa_z + tb_z = c_z. \end{cases} \tag{8.3}$$

Основная и расширенная матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{array} \right). \tag{8.4}$$

Случай 1. $\operatorname{rang} A = 2$ и $\operatorname{rang} \widetilde{A} = 3$.
Случай 2. $\operatorname{rang} A = 2$ и $\operatorname{rang} \widetilde{A} = 2$.
Случай 3. $\operatorname{rang} A = 1$ и $\operatorname{rang} \widetilde{A} = 2$.
Случай 4. $\operatorname{rang} A = 1$ и $\operatorname{rang} \widetilde{A} = 1$.