Конспект лекции 2

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 0. План лекции

ПЕРВЫЙ ЧАС. Поле комплексных чисел.
1. Аксиомы поля "4+1+2".
1.1. Определение поля;
1.2. $\exists!$ нулевого и единичного элементов;
1.3. Расширение поля и подполе;
1.4. Пример $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$.
2. Необходимость расширения поля $\mathbb{R}$.
2.1. Определение многочлена n–го порядка;
2.2. Корень многочлена;
2.3. Алгебраически замкнутые поля.
3. Поле комплексных чисел.
3.1. Определение поля комплексных чисел;
3.2. Модель поля комплексных чисел;
3.3. Теорема о существовании поля комплексных чисел;
3.4. Теорема о представлении чисел из поля комплексных чисел при условии существования.

ВТОРОЙ ЧАС. Свойства комплексных чисел.
1. Алгебраическая форма записи.
1.1. $\mathrm{Im}\, z$ и $\mathrm{Re}\, z$;
1.2. Комплексное сопряжение $\overline{z}$;
1.3. Свойства комплексного сопряжения;
1.4. Модуль комплексного числа;
1.5. Свойства модуля.
2. Тригонометрическая форма записи.
2.1. Декартовы координаты и комплексная плоскость;
2.2. Сложение комплексных чисел;
2.3. Запись в полярной системе координат $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$;
2.4. Функции $\arg z$ и $\mathrm{Arg}\, z$;
2.5. Формула перемножения двух комплексных чисел;
2.6. Формула Муавра.
3. Показательная форма записи.
3.1. Определение e^z и его обоснование;
3.2. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$;
3.3. Периодичность функции e^z;
3.4. Показательная форма записи комплексного числа.
4. Извлечение корней.
4.1. Корень n–й степени из комплексного числа;
4.2. Определение многозначной функции $\sqrt[n]{z}$;
4.3. Пример извлечения корня.
5. Дополнение. Группа–Кольцо–Поле.

§ 1. Аксиомы поля

В нашем курсе мы будем использовать понятие поля, которое для наших целей можно определить так как это сделано ниже.

Аксиомы поля.

1. Коммутативность сложения:

$$a + b = b + a \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathbb{K};$$

2. Ассоциативность сложения:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{для всех} \quad a, b, c \in \mathbb{K};$$

3. Коммутативность умножения:

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathbb{K};$$

4. Ассоциативность умножения:

$$(a \cdot b) \cdot b = a \cdot (b \cdot c) \quad \text{для всех} \quad a, b, c \in \mathbb{K};$$

5. Дистрибутивность:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \text{для всех} \quad a, b, c \in \mathbb{K}.$$

6. Вычитание: *существует единственное решение* $x \in \mathbb{K}$ *уравнения*

$$a + x = b;$$

Обозначение. $x := b - a$.

7. Деление: *для любого* $0 \neq k \in \mathbb{K}$ *существует единственное решение уравнения*

$$k \cdot x = b.$$

Обозначение. $x := b/k$.

Определение 1. *Полем* $\mathbb{K}$ *называется множество, наделенное двумя операциями* "$+$" *и* "$\cdot$", *удовлетворяющими аксиомам* 1–7. *Элементы поля* $\mathbb{K}$ *называются числами.*

Обозначение. Произвольное поле будем обозначать как $\mathbb{K}$.

Пример 1. Полями являются $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$. Множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$ полями не являются, но являются кольцами.

Определение 2. *Нулевым числом* $0 \in \mathbb{K}$ *называется такой элемент поля* $\mathbb{K}$, *что* $a + 0 = a$ *для всех* $a \in \mathbb{K}$.

Определение 3. *Единичным числом* $1 \in \mathbb{K}$ *называется такой элемент поля* $\mathbb{K}$, *что* $1 \cdot a = a$ *для всех* $a \in \mathbb{K}$.

Лемма 1. *В поле* $\mathbb{K}$ *существуют единственные нулевой элемент* $0 \in \mathbb{K}$ *и единичный элемент* $1 \in \mathbb{K}$.

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$0 \cdot a = 0 \quad \textit{для всех} \quad a \in \mathbb{K}.$$

§ 2. Необходимость введения комплексных чисел

Необходимость расширения поля Q.

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Необходимость расширения поля $\mathbb{R}$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}.$$

Определение 4. *Подмножество $\mathbb{L}$ поля $\mathbb{K}$ само являющееся полем относительно тех же двух операций называется подполем поля $\mathbb{K}$. Поле $\mathbb{K}$ называется расширением поля $\mathbb{L}$.*

Пример 1. Поле $\mathbb{R}$ является расширением поля $\mathbb{Q}$.

Замечание 1. Здесь нужно отметить, что операции в поле $\mathbb{K}$, вообще говоря, другие нежели в подполе $\mathbb{L}$. Однако, сужение операций из поля $\mathbb{K}$ на подполе $\mathbb{L}$ дают в точности те операции в $\mathbb{L}$, которые определены в нём как в самостоятельном поле.

Определение 5. *Многочленом $P(x)$ степени $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ называется функция переменной $x \in \mathbb{K}$*

$$P(x) := a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x^1 + a_n, \quad a_0 \neq 0, \tag{2.1}$$

где $a_m \in \mathbb{K}$ при $m \in \overline{0,n}$. Множество всех многочленов над полем $\mathbb{K}$ обозначаются символом $\mathbb{K}[x]$.

Определение 6. *Корнем многочлена $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ называется такое число $c \in \mathbb{K}$, что*

$$P(c) = 0.$$

Определение 7. *Поле $\mathbb{K}$ называется алгебраически замкнутым, если всякий многочлен $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ имеет корень $c \in \mathbb{K}$.*

Замечание 2. Очевидно, что поле $\mathbb{R}$ не является алгебраически замкнутым. Например, многочлен $P(x) = x^2 + 1$ не имеет вещественных корней.

§ 3. Построение поля комплексных чисел

Определение 8. *Полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ называется такое поле относительно некоторых внутренних операций "$+$" и "$\cdot$", что выполнены следующие свойства:*

I. *поле $\mathbb{C}$ содержит поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ как подполе;*

II. *поле $\mathbb{C}$ содержит такой элемент i, что*

$$i^2 := i \cdot i = -1; \tag{3.1}$$

III. *поле $\mathbb{C}$ является минимальным среди всех возможных расширений поля $\mathbb{R}$ с указанными свойствами* I *и* II.

Модель поля комплексных чисел.

Определение 9. *Комплексными числами* $\mathbb{C}$ *называется упорядоченная пара* (a, b) *из вещественных чисел* $a, b \in \mathbb{R}$, *удовлетворяющая следующим аксиомам*:

1. *Равенство.* $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c,\ b = d$;
2. *Сложение.* $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;
3. *Умножение.* $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$;
4. *Вещественные числа.* *пара* $(a, 0)$ *отождествляется со множеством вещественных чисел.*

Замечание 3. В свойстве 2 операция сложения упорядоченных пар $(a, b) + (c, d)$ и сложение вещественных чисел $a + b$ и $c + d$ имеют разный смысл. В свойстве 3 операция умножения упорядоченных пар $(a, b) \cdot (c, d)$ имеет, очевидно, имеет другой смысл нежели умножение вещественных чисел.

Теорема 1. *Множество* $\mathbb{C}$ *комплексных чисел в смысле определения* 9 *является полем и расширением поля вещественных чисел* $\mathbb{R}$ *в смысле определения* 8.

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего нам нужно проверить все аксиомы поля для комплексных чисел (a, b).

$\Box$ Действительно, первые 5 аксиом поля проверяются непосредственно. Нужно проверить, только аксиомы 6 (вычитания) и 7 (деления). Проверим выполнение аксиомы 6 вычитания. Действительно,

$$(a, b) + (x, y) = (c, d) \Leftrightarrow (a + x, b + y) = (c, d) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a + x = c, \quad b + y = d \Leftrightarrow (x, y) = (c - a, d - b).$$

Теперь проверим выполнение аксиомы 7 деления. Пусть

$$(a, b) \cdot (x, y) = (c, d), \quad (a, b) \neq (0, 0).$$

Используя определение произведения комплексных чисел из пункта 3 определения 9, получим равенство

$$(a \cdot x - b \cdot y, b \cdot x + a \cdot y) = (c, d) \Leftrightarrow a \cdot x - b \cdot y = c, \quad b \cdot x + a \cdot y = d \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{a \cdot c + b \cdot d}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{a^2 + b^2}, \quad a^2 + b^2 > 0. \quad \boxtimes$$

Заметим, что нулевой элемент имеет вид $(0, 0)$, а единичный имеет вид $(1, 0)$.

$\Box$ Действительно,

$$(a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b). \tag{3.2}$$

$$(1, 0) \cdot (a, b) = (1 \cdot a - 0 \cdot b, 1 \cdot b + 0 \cdot a) = (a, b). \quad \boxtimes \tag{3.3}$$

Шаг 2. Докажем, что в поле комплексных чисел согласно определению 9 операции сложения " + " в смысле свойства 2 и умножения

" $\cdot$ " в смысле свойства 3 индуцируют обычное сложение и обычное умножение для вещественных чисел a и b.

$\square$ Действительно, имеем согласно свойствам 2 и 3

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0);$$
$$(a,0)\cdot(b,0)=(a\cdot b-0\cdot 0, a\cdot 0+0\cdot b)=(a\cdot b,0). \quad \boxtimes$$

Поэтому мы можем писать $(a,0)\equiv a$. Таким образом, операции 2 и 3 из определения 9 на множестве вещественных чисел порождают операции сложения и умножения вещественных чисел, т. е. поле $\mathbb{R}$ является подполем поля $\mathbb{C}$.

Шаг 3. Докажем, что множество комплексных чисел содержит такое число i, для которого выполнено равенство

$$i^2=i\cdot i=-1.$$

$\square$ Действительно, пусть $i=(0,1)$. Тогда имеет место следующая цепочка равенств

$$i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1, 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)=-1 \quad \boxtimes$$

Кроме того, заметим, что

$$(b,0)\cdot(0,1)=(b\cdot 0-0\cdot 1, b\cdot 1+0\cdot 0)=(0,b).$$

Поэтому имеем

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=(a,0)+(0,1)\cdot(b,0)=a+i\cdot b.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если существует поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, то каждый его элемент $z\in\mathbb{C}$ можно представить в следующем виде*

$$z=x+i\cdot y, \quad i\in\mathbb{C}, \quad i\cdot i=-1\in\mathbb{R}, \quad x,y\in\mathbb{R}, \tag{3.4}$$

где символами " $+$ " и " $\cdot$ " мы обозначили внутренние законы сложения и умножения в поле $\mathbb{C}$, которые имеют другой смысл нежели соответствующие законы в поле вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Важное замечание. В дальнейшем мы будем вместо (a,b) писать $a+ib$. Правило сложения и умножения комплексных чисел будет сохраняться. Действительно, имеем

$$(a,b)+(c,d)=a+ib+c+id=a+c+i(b+d)=(a+c,b+d);$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(a+ib)(c+id)=ac+aid+ibc+ibid=$$
$$=ac+iad+ibc+i^2bd=ac-bd+i(ad+bc)=(ac-bd,ad+bc).$$

§ 4. Свойства комплексных чисел

Далее вместо того, чтобы писать $x+i\cdot y$ мы будем просто писать $x+iy$.

Определение 10. *Запись комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ в виде $z = x + iy$ называется алгебраической формой записи.*

Обозначения. $\operatorname{Re} z = x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} z = y \in \mathbb{R}$.

Определение 11. *Число $\overline{z} := x - iy$ называется комплексно сопряженным к числу $z := x + iy$.*

Заметим, что

$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

□ Действительно, имеем

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 + i(yx - xy) = x^2 + y^2. \quad \boxtimes$$

Вычисление частного двух чисел.

$$\frac{x + iy}{a + ib} = \frac{(x + iy)(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{(x + iy)(a - ib)}{a^2 + b^2} = \frac{xa + yb + i(ay - xb)}{a^2 + b^2}.$$

Кроме того, имеют место следующие равенства:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Имеет место утверждение.

Лемма 3. *Операция комплексного сопряжения обладает следующими свойствами*:

1. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$;
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;
3. $\overline{z_1 / z_2} = \overline{z_1} / \overline{z_2}$;
4. $\overline{\overline{z}} = z$.

Доказательство.

Докажем свойства 2 и 3.

□ Действительно, пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)} = \\ &= \overline{x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)} = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + x_2y_1),\end{aligned}$$

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (x_1 - iy_1) \cdot (x_2 - iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Для доказательства свойства 3 нужно доказать, что

$$\overline{(z^{-1})} = (\overline{z})^{-1}, \quad z = x + iy, \quad z^{-1} := \frac{1}{z}.$$

Справедливы равенства.

$$z^{-1} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \Rightarrow \overline{(z^{-1})} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2},$$

$$(\overline{z})^{-1} = \frac{1}{x - iy} = \frac{x + iy}{(x - iy)(x + iy)} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2}. \quad \boxtimes$$

Лемма доказана.

Определение 12. *Модулем* $|z|$ *комплексного числа* $z = x + iy$ *называется неотрицательное вещественное число*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,. \tag{4.2}$$

Лемма 4. *Справедливы следующие свойства модуля комплексного числа*:

1. $|z|^2 = z\overline{z}$;
2. $|z| = |\overline{z}|$;
3. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$;
4. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
5. $|-z| = |z|$.

Доказательство.

Докажем свойство 3.

□ Действительно,

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 = z_1 \overline{z}_1 z_2 \overline{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\left|\frac{1}{z}\right|^2 = \frac{1}{z}\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{|z|^2} \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \Rightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = |z_1|\left|\frac{1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}. \quad \boxtimes$$

Лемма доказана.

§ 5. Тригонометрическая форма записи

Наблюдение 1. Комплексное число $z = (x, y) = x + iy$ можно рассматривать как точку $M(x, y)$ в декартовой системе координат Oxy.

Наблюдение 2. Комплексные число $z = (x, y) = x + iy$ можно рассматривать в соответствующей полярной системе координат с полярными координатами (r, φ), где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

а $\varphi \in [0, 2\pi)$ — это полярный угол между осью Ox и радиус–вектором $\overrightarrow{OM}$ точки $M(x, y)$.

Замечание 4. В силу определения 12 модуля комплексного числа имеем $r = |z|$.

Сложение комплексных чисел. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. Тогда

$$z = z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2).$$

Определение 13. *Сопоставление комплексному числу* z *полярного угла* $\varphi \in [0, 2\pi)$ *называется функцией*

$$\varphi = \varphi(z) := \arg z$$

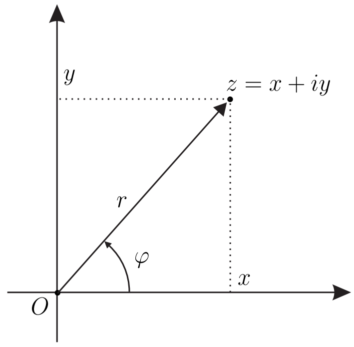

Рис. 1. Декартовы и полярные координаты комплексного числа $z = x + iy$.

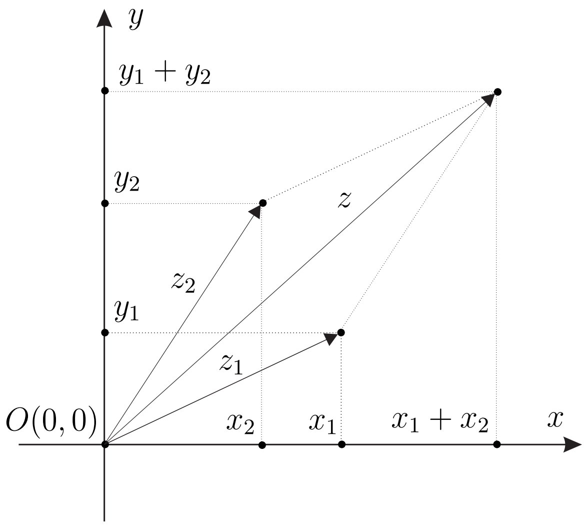

Рис. 2. Правило параллелограмма сложения комплексных чисел $z = z_1 + z_2$.

комплексного переменного $z \in \mathbb{C}$. *«Малый аргумент»*.
Замечание 5. Согласно определению 13 функция $\varphi = \arg z$ является однозначной.

Определение 14. $\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. *«Большой аргумент»*.

Тригонометрическая форма записи.

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \varphi = \arg(z). \quad (5.1)$$

Замечание 6. Теперь мы можем описать равенство двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ как равенства

$$r_1 = r_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|, \quad \arg z_1 = \arg z_2. \quad (5.2)$$

Умножение комплексных чисел. Пусть

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Тогда

$$z_1 \cdot z_2 = \\ = r_1r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] = \\ = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad (5.3)$$

где

$$r = r_1r_2, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

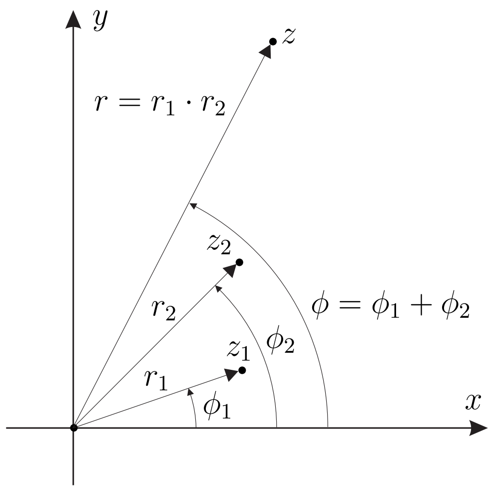

Рис. 3. Произведение комплексных чисел $z = z_1z_2$.

Формула Муавра.

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \quad (5.4)$$

§ 6. Показательная форма записи

Определение 15. *Показательная функция e^z от комплексного аргумента $z = x + iy$ определяется как*

$$e^z := e^x(\cos y + i\sin y). \quad (6.1)$$

Наблюдение 1. Для вещественных чисел $z = x + i0 = x$

$$e^z = e^x \in \mathbb{R};$$

Наблюдение 2. Для чисел $z = 0 + iy = iy$ имеем

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Лемма 5. *Имеет место следующая формула*:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}. \tag{6.2}$$

Лемма 6. *Функция* e^z, *определенная равенством* (6.1) *периодична с периодом* $2\pi i$.

Показательная форма записи.

$$z = re^{i\varphi}, \quad r = |z|, \quad \varphi \in \operatorname{Arg} z. \tag{6.3}$$

Эта форма записи комплексного числа очень удобна при возведении в некоторую натуральную степень z^n :

$$z^n = r^n e^{in\varphi}. \tag{6.4}$$

§ 7. Извлечение корней

Определение 16. *Число* $w \in \mathbb{C}$ *называется корнем* n*–й степени из комплексного числа* $z \in \mathbb{C}$, *если*

$$z = w^n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7.1}$$

Формула для вычисления корня n–й степени из заданного числа z.

Пусть

$$z = re^{i\varphi}, \quad \varphi \in \operatorname{Arg} z, \quad w = Re^{i\Phi}, \quad \Phi \in \operatorname{Arg} w. \tag{7.2}$$

Тогда

$$z = w^n \Leftrightarrow re^{i\varphi} = R^n e^{in\Phi} \Leftrightarrow r = R^n \quad \text{и} \quad n\Phi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r^{1/n} = R \quad \text{и} \quad \Phi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Существует ровно $n \in \mathbb{N}$ различных значений аргумента Φ :

$$\Phi_0 = \frac{\varphi}{n}, \quad \Phi_1 = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}, \cdots, \Phi_{n-1} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi(n-1)}{n}. \tag{7.3}$$

Лемма 7. *Функция* $\sqrt[n]{z}$ *является многозначной* (n*–значной*) *и область значений этой функции описывается следующим множеством:*

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ r^{1/n} \exp\left(i \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, ..., n-1 \right\}. \tag{7.4}$$

Наблюдение. Любое комплексное число z можно записать в следующем виде:

$$z = |z| \exp\left(i \operatorname{Arg} z\right), \quad \operatorname{Arg} z = \left\{\arg z + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Тогда

$$\sqrt[n]{z} := |z|^{1/n} \exp\left(i \frac{\operatorname{Arg} z}{n}\right), \quad \operatorname{Arg} z = \left\{\arg z + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}. \tag{7.5}$$

Пример 1. Найти все значения $\sqrt[5]{1}$.

Решение. Число 1 представим в показательной форме

$$1 = |1| \exp(i \operatorname{Arg}(1)), \quad \arg(1) = 0, \quad \operatorname{Arg}(1) = \{0 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Поэтому имеем

$$\sqrt[5]{1} = |1|^{1/5} \exp\left(i \frac{\operatorname{Arg}(1)}{5}\right) = \left\{\exp\left(i \frac{2\pi k}{5}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4\right\}.$$

Таким образом, имеется 5 различных значений корня $\sqrt[5]{1}$. А именно, следующие:

$$\left(\sqrt[5]{1}\right)_0 = 1, \quad \left(\sqrt[5]{1}\right)_1 = \exp\left(i \frac{2\pi}{5}\right), \quad \left(\sqrt[5]{1}\right)_2 = \exp\left(i \frac{4\pi}{5}\right),$$

$$\left(\sqrt[5]{1}\right)_3 = \exp\left(i \frac{6\pi}{5}\right), \quad \left(\sqrt[5]{1}\right)_4 = \exp\left(i \frac{8\pi}{5}\right).$$

Эти корни удобно изображать на комплексной плоскости в виде радиус–векторов, моделирующей множество комплексных чисел $\mathbb{C}$.

§ 8. Дополнение. Группа–Кольцо–Поле

Определение группы. *Непустое множество G с заданной на ней алгебраической операцией $*$ называется группой, если*

1. *Ассоциативность.*

$$(a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall\, a, b, c \in G;$$

2. *Нейтральный элемент. Существует нейтральный элемент $e \in G$ такой, что*

$$e * a = a * e = a \quad \forall\, a \in G;$$

3. *Обратный элемент. Для всякого $a \in G$ существует обратный элемент a^{-1} :*

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$$

Обозначение. $\langle G, * \rangle$.

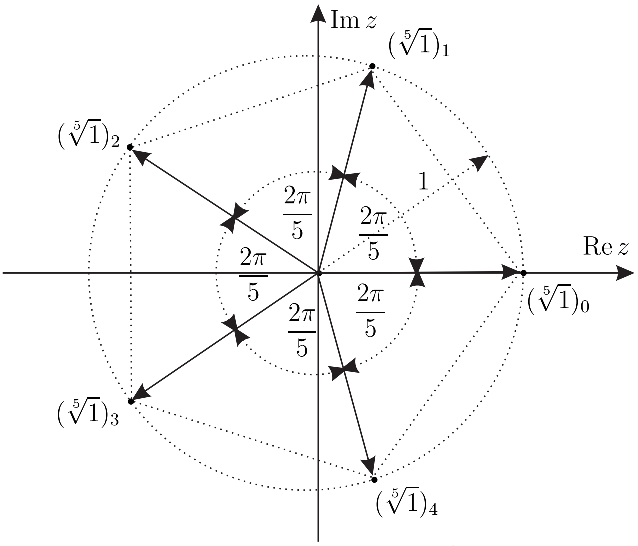

Рис. 4. Значения функции $\sqrt[5]{1}$.

Абелева группа. *Если в дополнение к свойствам* 1–3 *выполнено следующее*:

$$a * b = b * a \quad \forall\, a, b \in G,$$

то группа называется абелевой.

Примеры групп. Абелевыми являются следующие:

1. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$, $\langle \mathbb{R}, + \rangle$;
2. $\langle \mathbb{Q} \backslash 0, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{R} \backslash 0, \cdot \rangle$.

Множество $\mathbb{N}$ не является группой не относительно операции «$+$» не относительно «$\cdot$». Множество $\mathbb{Z}$ не является группой относительно операции «$\cdot$». Множество $\mathbb{J}$ иррациональных чисел не является группой не относительно операции «$+$» не относительно «$\cdot$».

Определение кольца. *Непустое множество* K, *наделённое двумя алгебраическими операциями* «$+$» *и* «$\cdot$» *называется кольцом, если эти операции обладают следующими свойствами для всех* $a, b, c \in K$:

1. $a + b = b + c$;
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$;
3. *существует единственное решение* $x \in K$ *уравнения* $a + x = b$;
4. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
5. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Примеры колец. Множества $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ образуют коммутативные (относительно «$\cdot$») кольца с единицей. Множество четных целых чисел образует коммутативное кольцо без единицы.

Лемма 8. *Коммутативное кольцо с однозначной операцией деления на числа, не равные* 0, *в смысле аксиомы* 7 *является полем.*

Примеры полей. Множества $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ являются полями. Кольцо $\mathbb{Z}$ полем не является.