Конспект лекции 3

МАТРИЦЫ

§ 0. План лекции

ЛЕКЦИЯ МАТРИЦЫ.
1. Матрицы и способы их задания.
1.1 Определение матрицы;
1.2. Запись через столбцы A_k и строки A^j;
1.3. Специальные матрицы.
1.3.1. Нулевая;
1.3.2. Квадратная;
1.3.3. Диагональная. Главная диагональ и побочная диагональ;
1.3.4. Верхнетреугольная и нижнетреугольная;
1.3.5. Блочные матрицы;
1.3.6. Матрицы–строчки и матрицы–столбцы.
2. Линейные операции над матрицами.
2.1. Сложение матриц;
2.2. Умножение матриц на число;
2.3. «4+2+2» линейные свойства.
3. Умножение матриц.
3.1. Определение «строка» на «столбец»;
3.2. Единичная матрица;
3.3. Свойства умножения.
3.3.1. Ассоциативность $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
3.3.2. Дистрибутивность слева и справа

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \quad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C;$$

3.3.3. Единичные матрицы $\mathbb{I}_m \cdot A = A \cdot \mathbb{I}_n$;
3.3.4 След квадратной матрицы и свойство $\mathrm{tr}(A \cdot B) = \mathrm{tr}(B \cdot A)$.

3.4. Вывод формул $C_k = A \cdot B_k$, $\quad C^j = A^j \cdot B$ или в развёрнутой форме

$$C_k = \|A_1, A_2, ..., A_p\| \cdot B_k, \quad C^j = A^j \cdot \begin{Vmatrix} B^1 \\ B^2 \\ \vdots \\ B^p \end{Vmatrix}.$$

4. Обратная матрица.
4.1. Определение и свойства.
4.1.1. Единичная матрица обратима;
4.1.2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
4.1.3. $(A^{-1})^{-1} = A$.
4.2. Определитель матриц 2×2;
4.3. Формула для A^{-1}.
5. Транспонированная матрица.
5.1. Определение;
5.2. Свойства.
5.2.1. $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$;
5.2.2. $(A^T)^T = A$;
5.2.3. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$;
5.2.4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
5.3. Симметричные и кососимметричные матрицы.
6. Матричная модель комплексных чисел.

§ 1. Определение матрицы

Определение 1. *Матрицей размера $m \times n$ над множеством X называется упорядоченный набор из $m \cdot n$ элементов этого множества, записанных в виде прямоугольной таблицы, состоящей из m строк и n столбцов. Множество всех матриц размера $m \times n$ обозначается $X^{m \times n}$.*

Обозначение 1.

$$A = (a^j_k)^m_n, \quad A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & \cdots & a^m_n \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Обозначение 2.

$$A = (a_{jk})_{mn}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Операция извлечение элемента из матрицы.

$$A = (a^j_k)^m_n \Rightarrow \{A\}^j_k \overset{\text{def}}{=} a^j_k; \quad A = (a_{jk})_{mn} \Rightarrow \{A\}_{jk} \overset{\text{def}}{=} a_{jk}.$$

Обозначение. $\mathbb{K}^{m \times n}$ — матрицы с числами из поля $\mathbb{K}$.

Определение 2. *Матрица A размера $1 \times n$ называется вектор–строкой*:

$$A = (a_1, a_2, ..., a_n).$$

Обозначение $\mathbb{K}_n$. *Матрица A размера $m \times 1$ называется вектор–столбцом*

$$A = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^m \end{pmatrix}.$$

Обозначение $\mathbb{K}^m$.

§ 2. Различные способы записи матриц

Запись через столбцы.

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & \cdots & a^m_n \end{pmatrix} = \|A_1 \; A_2 \; \cdots \; A_n\|, \tag{2.1}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix}.$$

Запись через строки.

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{matrix} \right\|, \tag{2.2}$$

$$A^1 = (a_1^1\, a_2^1\, \cdots\, a_n^1), \quad A^2 = (a_1^2\, a_2^2\, \cdots\, a_n^2), \quad \cdots, \quad A^m = (a_1^m\, a_2^m\, \cdots\, a_n^m).$$

Пример блочных матриц.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right) = \left\| \begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right\|,$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} a_{33} \end{pmatrix}.$$

§ 3. Специальные матрицы

1. Нулевая матрица. Эта матрица, все элементы которой равны $0 \in \mathbb{K}$.

2. Квадратная матрица порядка n.

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Определение 3. *Главной диагональю матрицы $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ называются элементы*

$$a_1^1, \ a_2^2, \ \cdots \ a_n^n$$

матрицы. Побочной диагональю матрицы $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ называются элементы

$$a_n^1, \ a_{n-1}^2, \ \cdots, \ a_2^{n-1}, \ a_1^n.$$

Следом $\operatorname{tr} A$ *квадратной матрицы $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ называется число*

$$\operatorname{tr} A := a_1^1 + a_2^2 + \cdots + a_n^n.$$

3. Диагональная матрица.

Определение 4. *Квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю называется диагональной.*

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(a_1^1, a_2^2, \cdots, a_n^n).$$

4. Верхнетреугольные матрицы и нижнетреугольные матрицы. Понятие главной диагонали можно ввести и для случая произвольной матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$:

Определение 3*. *Главной диагональю матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ называются элементы*

$$a_1^1,\ a_2^2,\ \cdots\ a_p^p, \quad p = \min\{m, n\}$$

матрицы.

Определение 5. *Матрица A размера $m \times n$ называется верхнетреугольной, если $a_k^j = 0$ при $j > k$. т. е. все элементы лежащие ниже главной диагонали равны нулю.*

Определение 6. *Матрица A размера $m \times n$ называется нижнетреугольной, если $a_k^j = 0$ при $j < k$, т. е. все элементы лежащие выше главной диагонали равны нулю.*

§ 4. Линейные операции над матрицами

Определение 7. *Матрицы A и B называются равными, если их размеры совпадают и все элементы $\{A\}_k^j$ и $\{B\}_k^j$ равны.*

Определение 8. *Суммой двух матриц $A = (a_k^j)_n^m$ и $B = (b_k^j)_n^m$ называется матрица*

$$C = (c_k^j)_n^m, \quad c_k^j = a_k^j + b_k^j, \quad j = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Произведением матрицы $A = (a_k^j)_n^m$ на число $\alpha \in \mathbb{K}$ называется матрица

$$C = (c_k^j)_n^m, \quad c_k^j = \alpha a_k^j, \quad j = \overline{1,m}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Замечание 1. $\{A+B\}_k^j = \{A\}_k^j + \{B\}_k^j, \quad \{\alpha A\}_k^j = \alpha\{A\}_k^j.$

Лемма 1. $n \cdot A = A + \cdots + A$.

Определение 9. *Операции «+» и «·» называются линейными.*

Теорема 1. *Линейные операции над матрицами из $\mathbb{K}^{m\times n}$ обладают следующими свойствами*:

1. *коммутативность сложения*:

$$A + B = B + A, \quad \forall\, A, B \in \mathbb{K}^{m\times n};$$

2. *ассоциативность сложения*:
$$(A+B)+C = A+(B+C), \quad \forall\, A, B, C \in \mathbb{K}^{m\times n};$$
3. *свойство нулевой матрицы:*
$$A + O = A, \quad \forall\, A \in \mathbb{K}^{m\times n},$$
где $O \in \mathbb{K}^{m\times n}$ — это нулевая матрица;
4. *существование противоположной матрицы*:
$$\forall\, A \in \mathbb{K}^{m\times n} \quad \exists\, A' \in \mathbb{K}^{m\times n} \quad A + A' = O;$$
5. *свойство единицы*:
$$1 \cdot A = A \quad \forall\, A \in \mathbb{K}^{m\times n};$$
6. *ассоциативность умножения на число*:
$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A \quad \forall\, A \in \mathbb{K}^{m\times n}, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K};$$
7. *дистрибутивность относительно сложения матриц*:
$$\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B \quad \forall\, A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K};$$
8. *дистрибутивность относительно сложения чисел*:
$$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A \quad \forall\, A \in \mathbb{K}^{m\times n}, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

§ 5. Произведение матриц

Определение 10. *Произведением двух матриц $A = (a_l^j)_p^m$ и $B = (b_k^l)_n^p$ называется матрица $C = (c_k^j)_n^m$, элементы которой равны*
$$c_k^j = a_1^j b_k^1 + a_2^j b_k^2 + \dots + a_p^j b_k^p = \sum_{l=1}^{p} a_l^j b_k^l. \tag{5.1}$$

Наблюдение 1. Произведение $A \cdot B$ определено только для таких матриц A и B, что <u>число столбцов</u> матрицы A равно <u>числу строк</u> матрицы B.

Наблюдение 2. $A \cdot B \neq B \cdot A$. Например,
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наблюдение 3. Существуют нетривиальные делители нуля. Например,
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_p^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_p^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_1^j} & \boxed{a_2^j} & \boxed{\cdots} & \boxed{a_p^j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_p^m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_2^1 & \cdots & \boxed{b_k^1} & \cdots & b_n^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & \cdots & \boxed{b_k^2} & \cdots & b_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \boxed{\vdots} & \cdots & \vdots \\ b_1^p & b_2^p & \cdots & \boxed{b_k^p} & \cdots & b_n^p \end{pmatrix},$$

$$\boxed{c_k^j} = \boxed{\begin{matrix} a_1^j & a_2^j & \cdots & a_p^j \end{matrix}} \times \boxed{\begin{matrix} b_k^1 \\ b_k^2 \\ \vdots \\ b_k^p \end{matrix}},$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \cdots & c_k^1 & \cdots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \cdots & c_k^2 & \cdots & c_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^j & c_2^j & \cdots & \boxed{c_k^j} & \cdots & c_n^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^m & c_2^m & \cdots & c_k^m & \cdots & c_n^m \end{pmatrix}.$$

Рис. 1. Произведение C матриц A и B.

Определение 11. *Единичной матрицей* $\mathbb{I}_p$ *называется диагональная квадратная порядка* $p \in \mathbb{N}$ *матрица, на главной диагонали которой находятся* $1 \in \mathbb{R}$.

$$\mathbb{I}_p \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. *Операция умножения матриц обладает следующими свойствами*:

1. *ассоциативность*:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad \forall\, A \in \mathbb{K}^{m \times s}, \quad \forall\, B \in \mathbb{K}^{s \times p}, \quad C \in \mathbb{K}^{p \times n};$$

2. *дистрибутивность*: $\forall\, A \in \mathbb{K}^{m\times s}$, $\forall\, B, C \in \mathbb{K}^{s\times n}$
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C;$$
3. *дистрибутивность*: $\forall\, A, B \in \mathbb{K}^{m\times s}$, $\forall\, C \in \mathbb{K}^{s\times n}$
$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C;$$
4. *свойство единичной матрицы*:
$$\mathbb{I}_m \cdot A = A \cdot \mathbb{I}_n = A \quad \forall\, A \in \mathbb{K}^{m\times n},$$
где $\mathbb{I}_n$ *и* $\mathbb{I}_m$ *— единичные матрицы порядков* m *и* n *соответственно;*
5. *Свойство следа*:
$$\operatorname{tr}(A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot A) \quad \forall\, A \in \mathbb{K}^{m\times n}, \quad B \in \mathbb{K}^{n\times m}.$$

Доказательство.
Докажем свойство 1.
□ Пусть
$$A = (a_l^j)_s^m, \quad B = (b_r^l)_p^s, \quad C = (c_k^r)_n^p.$$
$A \cdot B$ — это матрица размера $m \times p$, $(A \cdot B) \cdot C$ — матрица размера $m \times n$. $B \cdot C$ — матрица размера $s \times n$, $A \cdot (B \cdot C)$ — матрица размера $m \times n$.

Вывод. Матрицы $A \cdot (B \cdot C)$ и $(A \cdot B) \cdot C$ размера $m \times n$.

$$\{(A \cdot B) \cdot C\}_k^j = \sum_{r=1}^{p} \{A \cdot B\}_r^j \, c_k^r = \sum_{r=1}^{p} \left(\sum_{l=1}^{s} a_l^j b_r^l \right) c_k^r =$$
$$= \sum_{l=1}^{s} a_l^j \left(\sum_{r=1}^{p} b_r^l c_k^r \right) = \sum_{l=1}^{s} a_l^j \, \{B \cdot C\}_k^l = \{A \cdot (B \cdot C)\}_k^j. \quad \boxtimes$$

Теорема доказана.

§ 6. Структура произведения матриц

Пусть $A = (a_l^j)_p^m \in \mathbb{K}^{m\times p}$ и $B = (b_k^l)_n^p \in \mathbb{K}^{p\times n}$. Пусть
$$C = A \cdot B = (c_k^j)_n^m \in \mathbb{K}^{m\times n},$$
$$c_k^j = \sum_{l=1}^{p} a_l^j b_k^l.$$
$$A = \|A_1, A_2, \cdots, A_p\|, \quad B = \|B_1, B_2, \cdots, B_n\|, \quad C = \|C_1, C_2, \cdots, C_n\|,$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{pmatrix}, \cdots, A_p = \begin{pmatrix} a_p^1 \\ a_p^2 \\ \vdots \\ a_p^m \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_1^2 \\ \vdots \\ b_1^p \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} b_2^1 \\ b_2^2 \\ \vdots \\ b_2^p \end{pmatrix}, \cdots, B_n = \begin{pmatrix} b_n^1 \\ b_n^2 \\ \vdots \\ b_n^p \end{pmatrix},$$

Выражение для столбцов C_k.

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_1^1 \\ c_1^2 \\ \vdots \\ c_1^m \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} c_2^1 \\ c_2^2 \\ \vdots \\ c_2^m \end{pmatrix}, \cdots, C_n = \begin{pmatrix} c_n^1 \\ c_n^2 \\ \vdots \\ c_n^m \end{pmatrix}.$$

$$C_k = \begin{pmatrix} c_k^1 \\ c_k^2 \\ \vdots \\ c_k^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{l=1}^{p} a_l^1 b_k^l \\ \sum\limits_{l=1}^{p} a_l^2 b_k^l \\ \vdots \\ \sum\limits_{l=1}^{p} a_l^m b_k^l \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{p} \begin{pmatrix} a_l^1 b_k^l \\ a_l^2 b_k^l \\ \vdots \\ a_l^m b_k^l \end{pmatrix} = \sum_{l=1}^{p} \begin{pmatrix} a_l^1 \\ a_l^2 \\ \vdots \\ a_l^m \end{pmatrix} b_k^l =$$

$$= \sum_{l=1}^{p} A_l b_k^l = \|A_1, A_2, \cdots, A_p\| \cdot \begin{pmatrix} b_k^1 \\ b_k^2 \\ \vdots \\ b_k^p \end{pmatrix} = \|A_1, A_2, \cdots, A_p\| \cdot B_k =$$

$$= A \cdot B_k \quad \text{при} \quad k = \overline{1, n}. \qquad (6.1)$$

Выражение для строк C^j.

$$A = \begin{Vmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} B^1 \\ B^2 \\ \vdots \\ B^p \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} C^1 \\ C^2 \\ \vdots \\ C^m \end{Vmatrix},$$

$$A^1 = \left(a_1^1, a_2^1, \ldots, a_p^1\right), \quad A^2 = \left(a_1^2, a_2^2, \ldots, a_p^2\right), \ldots, A^m = \left(a_1^m, a_2^m, ..., a_p^m\right),$$

$$B^1 = \left(b_1^1, b_2^1, \ldots, b_n^1\right), \quad B^2 = \left(b_1^2, b_2^2, \ldots, b_n^2\right), \ldots, B^p = \left(b_1^p, b_2^p, ..., b_n^p\right),$$

$$C^1 = \left(c_1^1, c_2^1, \ldots, c_n^1\right), \quad C^2 = \left(c_1^2, c_2^2, \ldots, c_n^2\right), \ldots, C^m = \left(c_1^m, c_2^m, ..., c_n^m\right).$$

$$C^j = \left(\sum_{l=1}^{p} a_l^j b_1^l, \sum_{l=1}^{p} a_l^j b_2^l, \ldots, \sum_{l=1}^{p} a_l^j b_n^l \right) = \sum_{l=1}^{p} \left(a_l^j b_1^l, a_l^j b_2^l, \ldots, a_l^j b_n^l \right) =$$
$$= \sum_{l=1}^{p} a_l^j \left(b_1^l, b_2^l, \ldots, b_n^l \right) = \sum_{l=1}^{p} a_l^j B^l =$$
$$= \left(a_1^j, a_2^j, ..., a_p^j \right) \cdot \left\| \begin{matrix} B^1 \\ B^2 \\ \vdots \\ B^p \end{matrix} \right\| = A^j \cdot \left\| \begin{matrix} B^1 \\ B^2 \\ \vdots \\ B^p \end{matrix} \right\| = A^j \cdot B \quad \text{при} \quad j = \overline{1, m}. \tag{6.2}$$

§ 7. Обратная матрица

Определение 12. *Квадратная матрица* A^{-1} *порядка* $n \in \mathbb{N}$ *называется обратной к матрице* A *порядка* n, *если*

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}_n.$$

Свойство 1. Единичная матрица $\mathbb{I}_n$ обратима и $\mathbb{I}_n^{-1} = \mathbb{I}_n$.

Свойство 2. Если матрица A обратима, то обратная матрица A^{-1} единственна.

Свойство 3. Если матрицы A и B обратимы, то обратимо и их произведение $A \cdot B$, причем

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Свойство 4. Если матрица A обратима, то обратима и матрица A^{-1}, причем $(A^{-1})^{-1} = A$.

Обратная матрица для матриц второго порядка.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

Определение 13. *Определителем* $\det A$ *матрицы* $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ *вида* (7.1) *называется число*

$$\det A := ad - bc.$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *Матрица* A *вида* (7.1) *обратима тогда и только тогда*, *когда* $\det A \neq 0$.

Доказательство.

Достаточность. Пусть $\det A \neq 0$, тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

поскольку

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \boxtimes$$

Теорема доказана.

§ 8. Транспонированная матрица

Определение 14. *Матрицей транспонированной к матрице* $A = (a_k^j)_n^m \in \mathbb{K}^{m\times n}$ *называется матрица* $A^T \in \mathbb{K}^{n\times m}$ *с элементами*

$$\left\{A^T\right\}_j^k \overset{\text{def}}{=} \{A\}_k^j .$$

Пример 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Свойство 1. Линейность.

$$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T \quad \forall\, A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K};$$

Свойство 2. Инволютивность.

$$\left(A^T\right)^T = A \quad \forall\, A \in \mathbb{K}^{m\times n};$$

Свойство 3. Транспонирование произведения матриц.

$$(AB)^T = B^T A^T \quad \forall\, A \in \mathbb{K}^{m\times p}, \quad \forall\, B \in \mathbb{K}^{p\times n};$$

Доказательство.

$$\left\{(AB)^T\right\}_k^j = \{AB\}_j^k = \sum_{l=1}^p a_l^k b_j^l = \sum_{l=1}^p \left\{A^T\right\}_k^l \left\{B^T\right\}_l^j = \sum_{l=1}^p \left\{B^T\right\}_l^j \left\{A^T\right\}_k^l = \left\{B^T A^T\right\}_k^j .$$

Свойство доказано.

Свойство 4. Транспонирование обратной матрицы. Если матрица $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ обратима, то

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

§ 9. Симметричные и кососимметричные матрицы

Определение 15. *Квадратная матрица называется симметричной, если $A^T = A$. Квадратная матрица A называется кососимметричной, если $A^T = -A$.*

Пример 2. Симметричная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}: \quad A^T = A;$$

кососимметричная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}: \quad A^T = -A;$$

Теорема 4. *Любая квадратная матрица A может быть единственным образом представлена в виде суммы симметричной и кососимметричной матриц.*

§ 10. Матричная модель поля комплексных чисел

$$Z := \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Наблюдение 1.

$$Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -y \\ y & 0 \end{pmatrix} = x\mathbb{I}_2 + y\mathbb{J}_2,$$

где

$$\mathbb{I}_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вывод 1. Определены операции «+» и «·».

Наблюдение 2.

$$\mathbb{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbb{J}_2 \cdot \mathbb{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{I}_2.$$

Вывод 2. $\mathbb{J}_2$ — «мнимая единица».

Наблюдение 3. Пусть $Z_1 := x_1\mathbb{I}_2 + y_1\mathbb{J}_2, \quad Z_2 := x_2\mathbb{I}_2 + y_2\mathbb{J}_2$.

$$Z_1 + Z_2 = (x_1 + y_1)\mathbb{I}_2 + (y_1 + y_2)\mathbb{J}_2;$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (x_1\mathbb{I}_2 + y_1\mathbb{J}_2) \cdot (x_2\mathbb{I}_2 + y_2\mathbb{J}_2) =$$
$$= x_1x_2\mathbb{I}_2\mathbb{I}_2 + x_1y_2\mathbb{I}_2\mathbb{J}_2 + y_1x_2\mathbb{J}_2\mathbb{I}_2 + y_1y_2\mathbb{J}_2\mathbb{J}_2 =$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2)\,\mathbb{I}_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)\,\mathbb{J}_2.$$

В ы в о д 3. Операции «+» и «·» — внутренние на Z.

Н а б л ю д е н и е 4. «Вычитание» и «деление» на множестве Z.

$$Z_1 = x_1\mathbb{I}_2 + y_1\mathbb{J}_2, \quad Z_2 = x_2\mathbb{I}_2 + y_2\mathbb{J}_2.$$

$$Z_1 + Z_3 = Z_2$$

$\exists!$ решение $Z_3 = (x_2 - x_1)\mathbb{I}_2 + (y_2 - y_1)\mathbb{J}_2 \in Z$.

Пусть $Z_1 \neq O$.

$$Z_1 \cdot Z_4 = Z_2$$

$\exists!$ решение

$$Z_4 = Z_1^{-1}Z_2, \quad Z_1^{-1} = \frac{1}{x_1^2 + y_1^2}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} \in Z \Rightarrow Z_4 \in Z.$$

В ы в о д 4. Z — поле.

Н а б л ю д е н и е 5. Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ можно отождествить со множеством

$$Z_{\mathbb{R}} := \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = x\mathbb{I}_2 + 0\mathbb{J}_2,\ x \in \mathbb{R} \right\} \subset Z.$$

В ы в о д 5. Поле $\mathbb{R}$ подполе поля Z.

Л е м м а 2. *Множество матриц вида Z является полем комплексных чисел.*