Конспект лекции 6

ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА II

§ 0. План лекции

Лекция Векторные пространства II

1. Определение линейно зависимости и независимости.

2. Теорема о 7 свойствах линейной зависимости и независимости.

3. Пример линейного пространства. Система линейных однородных уравнений.

4. Теорема о НИДУ существования нетривиального решения системы линейных уравнений.

5. Важное следствие. Пример.

6. Линейная оболочка.

7. Лемма $L(y_1, ..., y_s) \subset L(x_1, ..., x_r)$.

8. Линейное подпространство.

9. Лемма $L(x_1, ..., x_r)$ — подпространство.

10. Основная теорема $\{y_1, ..., y_s\} \subset L(x_1, ..., x_r)$.

11. Следствие.

12. Конечномерное линейное пространство. Базис.

13. Лемма: $L(\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_n) = L$.

14. Лемма: Разложение по базису единственно.

15. Основная теорема о базисе конечномерного пространства.

16. Примеры.

§ 1. Линейные оболочки и подпространства

Пусть дано семейство векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r \in \mathcal{L}$ и семейство чисел $\alpha_1, \alpha, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$.

Определение 9. *Линейной комбинацией векторов называется сумма*

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_r \mathbf{x}_r.$$

Определение 10. *Линейная комбинация векторов называется тривиальной, если* $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$.

Определение 11. *Линейной оболочкой векторов* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r \in \mathcal{L}$ *называется следующее множество*:

$$L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_r) \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_r \mathbf{x}_r : \ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}\}.$$

Лемма 1. *Пусть векторы* $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p$ *принадлежат линейной оболочке векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$. *Тогда*

$$L(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p) \subset L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r).$$

Определение 12. *Подмножество* $P \subset \mathcal{L}$ *векторного пространства* $\mathcal{L}$ *называется подпространством, если*

$$\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \in P$$

для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *и для всех* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in P$.

Пример 4. Очевидно, $\mathbb{V}_1$ подпространство плоскости $\mathbb{V}_2 \supset \mathbb{V}_1$, а $\mathbb{V}_2$ подпространство пространства $\mathbb{V}_3 \supset \mathbb{V}_2$.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 2. *Линейная оболочка* $L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r)$ *семейства элементов* $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r\}$ *векторного пространства* $\mathcal{L}$ *является его подпространством.*

Доказательство.

Действительно, пусть $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r)$, тогда

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \mathbf{x}_k, \quad \mathbf{z} = \sum_{k=1}^{r} \beta_k \mathbf{x}_k.$$

$$\alpha \mathbf{y} + \beta \mathbf{z} = \sum_{k=1}^{r} (\alpha \alpha_k + \beta \beta_k)\, \mathbf{x}_k \in L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r).$$

Лемма доказана.

§ 2. Линейная зависимость и независимость

Определение 13. *Семейство векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *называется линейно зависимым, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору*:

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_r \mathbf{x}_r = \mathbf{0}, \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \neq (0, \ldots, 0).$$

В случае, когда

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_r \mathbf{x}_r = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = (0, \ldots, 0).$$

семейство векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *называется линейно независимым.*

Пример 5. В векторном пространстве $\{\mathbf{0}\}$ нет линейно независимых векторов.

Пример 6. В векторном пространстве $\mathbb{V}_1$ любой ненулевой вектор образует линейно независимое семейство векторов. В векторном пространстве $\mathbb{V}_2$ любые два неколлинеарных вектора образуют линейно независимое семейство. В векторном пространстве $\mathbb{V}_3$ любые три некомпланарных вектора образуют линейно независимое семейство векторов.

Лемма 3. *Однородная линейная система уравнений*

$$AX = A_1 x^1 + \cdots + A_n x^n = O \tag{2.1}$$

имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда столбцы $A_1, \ldots, A_n$ *её основной матрицы* A *линейно зависимы.*

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Пусть система уравнений (2.1) имеет нетривиальное решение

$$X_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right)^T \neq O,$$

тогда имеет место равенство

$$A_1 x_0^1 + \cdots + A_n x_0^n = O.$$

Откуда вытекает, что столбцы основной матрицы линейно зависимы.

Шаг 2. Достаточность. Пусть столбцы линейно зависимы, т. е.

$$A_1 x_0^1 + \cdots + A_n x_0^n = O$$

при некотором семействе $(x_0^1, \cdots, x_0^n) \neq (0, \cdots, 0)$. Следовательно,

$$X_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right)^T$$

— это нетривиальное решение системы уравнений (2.1).

Лемма доказана.

Теорема 1. *Справедливы следующие свойства*:

1. *Любое семейство векторов с повторениями линейно зависимо.*

2. *Если в семействе векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *имеется нулевой вектор* $\mathbf{0}$, *то это семейство линейно зависимо.*
3. *Семейство векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *линейно зависимо тогда и только тогда, когда хотя бы один из этих векторов можно представить в виде линейной комбинации остальных.*
4. *Если в семействе векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_{r+1}, \ldots, \mathbf{x}_s$ *имеется линейно зависимое подсемейство* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$, *то и все семейство линейно зависимо.*
5. *Любая часть линейно независимого семейства является линейно независимо.*
6. *Если семейство векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *линейно независимо, а семейство* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}$ *линейно зависимо, то вектор* $\mathbf{x}$ *является линейной комбинацией семейства* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$.
7. *Если семейство векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ *линейно независимо, а вектор* $\mathbf{x}$ *нельзя через них выразить, то семейство векторов* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}$ *также линейно независимо.*

Доказательство.

1. □ Действительно, пусть, например, в семействе $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ первый и второй векторы совпадают $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$. Тогда справедливо равенство

$$1 \cdot \mathbf{x}_1 + (-1) \cdot \mathbf{x}_2 + 0 \cdot \mathbf{x}_3 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{x}_r = \mathbf{0},$$

хотя набор коэффициентов нетривиален. ⊠

2. □ Действительно, пусть например первый вектор $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ в семействе $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$. Тогда

$$1 \cdot \mathbf{x}_1 + 0 \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{x}_r = \mathbf{0},$$

хотя набор коэффициентов нетривиален. ⊠

3. □ Действительно, пусть семейство векторов $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ линейно зависимо. Тогда существует нетривиальный набор коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, что

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_r \mathbf{x}_r = \mathbf{0}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_1 \neq 0$, тогда

$$\mathbf{x}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{x}_2 - \cdots - \frac{\alpha_r}{\alpha_1}\mathbf{x}_r.$$

Наоборот пусть

$$\mathbf{x}_1 = \beta_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \beta_r \mathbf{x}_r \Leftrightarrow (-1) \cdot \mathbf{x}_1 + \beta_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \beta_r \mathbf{x}_r = \mathbf{0}. \quad ⊠$$

4. □ Действительно, пусть семейство $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ линейно зависимые, тогда существует нетривиальный набор коэффициентов $\alpha_1, ..., \alpha_r$, что

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_r \mathbf{x}_r = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_r \mathbf{x}_r + 0 \cdot \mathbf{x}_{r+1} + \cdots + 0 \cdot \mathbf{x}_s = \mathbf{0}. \quad ⊠$$

5. □ Действительно, это следствие утверждения 4. ⊠

6. □ Действительно, поскольку семейство векторов $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}$ линейно зависимо, то найдется нетривиальный набор коэффициентов $\alpha_1, ..., \alpha_r, \alpha$, что

$$\alpha\mathbf{x} + \alpha_1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_r\mathbf{x}_r = \mathbf{0}.$$

Предположим, что $\alpha = 0$, но тогда в силу линейной независимости семейства $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$ отсюда получаем, что

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0.$$

Пришли к противоречию с условием нетривиальности набора $\alpha_1, ..., \alpha_r, \alpha$. Следовательно, $\alpha \neq 0$. ⊠

7. □ Действительно, это следствие утверждения 6. ⊠

Теорема доказана.

§ 3. Линейная зависимость и независимость. Продолжение

Теорема 2. *Если векторы $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s \in L(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r)$, причём $s > r$, то векторы $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s$ линейно зависимы.*

Доказательство.

Введём обозначения.

$$\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r), \quad \mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s). \tag{3.1}$$

Итак, $\mathbf{X}$ — это строчка длины r, а $\mathbf{Y}$ — это строчка длины $s > r$. По условию

$$\begin{gathered} \mathbf{y}_1 = a_1^1\mathbf{x}_1 + a_1^2\mathbf{x}_2 + \dots + a_1^r\mathbf{x}_r, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{y}_s = a_s^1\mathbf{x}_1 + a_s^2\mathbf{x}_2 + \dots + a_s^r\mathbf{x}_r. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Ещё введём обозначение.

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_s^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & a_2^r & \cdots & a_s^r \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Ясно, что это матрица размера $r \times s$. С учетом обозначений (3.1) и (3.3) выражение (3.2) можно переписать в следующем виде:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \cdot A. \tag{3.4}$$

Введём столбец переменных

$$Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \\ \vdots \\ z^s \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

и рассмотрим однородную систему r–уравнений относительно s–неизвестных

$$A \cdot Z = O \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^1 z^1 + a_2^1 z^2 + \dots + a_s^1 z^s = 0, \\ a_1^2 z^1 + a_2^2 z^2 + \dots + a_s^2 z^s = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^r z^1 + a_2^r z^2 + \dots + a_s^r z^s = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Поскольку в однородной системе линейных уравнений (3.6) число переменных s больше числа уравнений r существует нетривиальное решение

$$Z_0 = \begin{pmatrix} z_0^1 \\ z_0^2 \\ \vdots \\ z_0^s \end{pmatrix} \neq O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Рассмотрим следующую линейную комбинацию векторов $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s$:

$$z_0^1 \mathbf{y}_1 + \dots + z_0^s \mathbf{y}_s = \mathbf{Y} Z_0 = \mathbf{X} A Z_0 = \mathbf{X} O = O. \tag{3.8}$$

Следовательно, векторы $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s$ линейно зависимы.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Если векторы $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s$, принадлежащие линейной оболочке $L(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r)$, линейно независимы, то $s \leqslant r$.*

Теорема 4. *Пусть матрица A' получена из матрицы A элементарными преобразованиями строк типов $1-3$. Тогда*

1. *Если столбцы матрицы A линейно независимы, то столбцы матрицы A' также линейно независимы.*
2. *Если между столбцами матрицы A имеется линейная зависимость*
$$c^1 A_1 + c^2 A_2 + \dots + c^n A_n = O,$$
то для соответствующих столбцов матрицы A' имеет место такая же зависимость
$$c^1 A_1' + c^2 A_2' + \dots + c^n A_n' = O.$$

Доказательство.

1. Пусть столбцы матрицы $A = \|A_1, \dots, A_n\|$ являются линейно независимыми. Пусть
$$A' = PA,$$
где P — это матрица последовательности элементарных преобразований. Рассмотрим линейную комбинацию столбцов матрицы A'

$$c^1 A_1' + c^2 A_2' + \dots + c^n A_n' = O \Leftrightarrow c^1 P A_1 + c^2 P A_2 + \dots + c^n P A_n = O \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P\left(c^1 A_1 + c^2 A_2 + \dots + c^n A_n\right) = O \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P^{-1} P\left(c^1 A_1 + c^2 A_2 + \dots + c^n A_n\right) = P^{-1} O = O \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^1A_1 + c^2A_2 + \cdots + c^nA_n = O \Leftrightarrow c^1 = c^2 = \cdots = c^n = 0.$$

2. Умножим обе части равенства

$$c^1A_1 + c^2A_2 + \cdots + c^nA_n = O$$

на P слева и получим

$$P\left(c^1A_1 + c^2A_2 + \cdots + c^nA_n\right) = O \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c^1PA_1 + c^2PA_2 + \cdots + c^nPA_n = O \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c^1A_1^{'} + c^2A_2^{'} + \cdots + c^nA_n^{'} = O.$$

Теорема доказана.

§ 4. Размерность и базис векторного пространства

Определение 14. *Если для каждого $n \in \mathbb{N}$ в векторном пространстве $\mathfrak{L}$ найдется линейно независимое семейство векторов, состоящее из n векторов, то пространство $\mathfrak{L}$ называется бесконечномерным.*

Определение 15. *Векторное пространство $\mathfrak{L}$ называется конечномерным, если выполнены следующие два условия:*
1. *в $\mathfrak{L}$ существует линейно независимое семейство векторов, состоящее из $n \in \mathbb{N}$ векторов;*
2. *любое семейство векторов из $\mathfrak{L}$, состоящее из $n+1$ вектора линейно зависимо.*

Число n называется размерностью векторного пространства $\mathfrak{L}$ и обозначается $\dim \mathfrak{L}$. Векторное пространство $\{\mathbf{0}\}$ называется нульмерным.

Пример 7. Векторное пространство $\{\mathbf{0}\}$ имеет размерность 0. В рамках аксиоматики Гильберта имеем $\dim \mathbb{V}_1 = 1$, $\dim \mathbb{V}_2 = 2$ и $\dim \mathbb{V}_3 = 3$. Однако, в аксиоматике Вейля это нужно положить в основу аксиоматики, которые называются *аксиомами размерности*:

P1: Размерность прямой равна 1: $\dim \mathbb{V}_1 = 1$.
P2: Размерность плоскости равна 2: $\dim \mathbb{V}_2 = 2$.
P3: Размерность пространства равна 3: $\dim \mathbb{V}_3 = 3$.

Определение 16. *Базисом векторного пространства $\mathfrak{L}$ называется линейно независимое семейство векторов $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ этого пространства, через которое может быть линейно выражен произвольный элемент $\mathbf{x} \in \mathfrak{L}$:*

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i\mathbf{e}_i = \mathbf{E} \cdot X, \quad X^T = (x^1, \dots, x^n).$$

Набор коэффициентов $X^T = (x^1, \dots, x^n)$ называется координатами вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

Лемма 4. *Если* $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{L}$ — *это базис, то* $L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \mathcal{L}$.

Доказательство.

Ясно, что

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathcal{L} \Rightarrow L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \subset \mathcal{L};$$

$$x \in \mathcal{L} \Rightarrow x = \sum_{k=1}^{n} c^k \mathbf{e}_k \in L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \Rightarrow \mathcal{L} \subset L(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n).$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Разложение по базису векторного пространства единственно.*

Доказательство.

Действительно, пусть $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ — это базис в $\mathcal{L}$. Тогда

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x^k \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n} y^k \mathbf{e}_k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^1 - y^1)\mathbf{e}_1 + (x^2 - y^2)\mathbf{e}_2 + \dots + (x^n - y^n)\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

Отсюда в силу линейной независимости базиса имеем

$$x^1 = y^1, \dots, x^n = y^n.$$

Лемма доказана.

Правило суммирования Эйнштейна. Для компактности записи различных выражений, содержащих знаки суммирования используется *правило Эйнштейна*, состоящее в следующем:

1. если в выражении индекс встречается ровно два раза один раз снизу и один раз сверху, то предполагается суммирование по нему. Например,
$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \mathbf{e}_i = x^i \mathbf{e}_i.$$
2. если индекс встречается большее число раз, то по нему не предполагается суммирование. Например,
$$a_k b^k c^k,$$
хотя
$$(a_k + b_k)c^k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)c^k.$$

Символ Кронекера.

$$\delta^j_k = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad j = k; \\ 0, & \text{если} \quad j \neq k. \end{cases}$$

Заметим, что
$$a_j\delta^j_k = \sum_{j=1}^{n} a_j\delta^j_k = a_k.$$

Теорема 5. *Все базисы конечномерного векторного пространства $\mathcal{L}$ состоят из одинакового числа векторов. Это число равно размерности* $\dim\mathcal{L}$ *векторного пространства* $\mathcal{L}$.

Доказательство.

Пусть $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ и $\mathbf{F} = \{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m\}$ — это два базиса векторного пространства $\mathcal{L}$. Тогда
$$\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n \in \mathcal{L} = L(\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m), \quad \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m \in \mathcal{L} = L(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n).$$

Следовательно, в силу теоремы 3 имеют место два неравенства
$$n \leqslant m \quad \text{и} \quad m \leqslant n \Rightarrow m = n.$$

С другой стороны, любое семейство из $n+1$ векторов
$$\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n, \mathbf{g}_{n+1} \in \mathcal{L} = L(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n),$$

поэтому в силу теоремы 2 семейство $\mathbf{G} = \{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n, \mathbf{g}_{n+1}\}$ линейно зависимо. Таким образом,
$$n = \dim\mathcal{L}.$$

Теорема доказана.

Свойство координат вектора. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — это два вектора из векторного пространства $\mathcal{L}$. Пусть $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ — это базис в $\mathcal{L}$. Тогда
$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x^k\mathbf{e}_k, \quad \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} y^k\mathbf{e}_k,$$
$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n}(x^k+y^k)\mathbf{e}_k, \quad \alpha\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n}\alpha x^k\mathbf{e}_k.$$

Следовательно, при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Монотонность размерности.

Лемма 6. *Пусть* $\mathcal{P}$ *и* $\mathcal{Q}$ *— это два подпространства в* $\mathcal{L}$, *причём* $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$. *Тогда*

1. $\dim\mathcal{Q} \leqslant \dim\mathcal{P}$;
2. *если* $\dim\mathcal{Q} = \dim\mathcal{P}$, *то* $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$.

Доказательство.

1. □ Действительно, пусть $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ — это базис в $\mathcal{P}$, а $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s$ — это базис в $\mathcal{Q}$. Тогда в силу условия леммы имеем $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$ и поэтому
$$\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s \in L(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r).$$

В силу теоремы 3 имеем $\dim\mathcal{Q} = s \leqslant r = \dim\mathcal{P}$. ⊠

2. $\square$ Действительно, пусть $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s$ — это базис в $\mathcal{Q}$, т. е. $s = \dim \mathcal{Q}$. Предположим, что $\mathcal{Q} \neq \mathcal{P}$. Тогда найдется такой элемент $\mathbf{z} \in \mathcal{P}$, что $\mathbf{z} \notin \mathcal{Q}$. Этот элемент нельзя представить через базис $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s$. Следовательно, семейство

$$\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_s, \mathbf{z}$$

линейно независимое в $\mathcal{P}$. Таким образом, $\dim \mathcal{P} \geqslant s + 1$. Пришли к противоречию. $\boxtimes$

Лемма доказана.

Пример 8. Базис пространства столбцов $\mathbb{K}^n$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \dim \mathbb{K}^n = n.$$

Пример 9. Базис пространства $\mathbb{K}^{3\times 2}$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\dim \mathbb{K}^{m\times n} = mn.$$

§ 5. Изоморфизм

Пусть $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — это два векторных пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$.

Определение 17. *Взаимно однозначное отображение*

$$g : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$$

называется изоморфизмом, если

$$g(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha g(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{y})$$

для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}$ *и всех* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Координатный изоморфизм. Пусть $\mathcal{L}$ — это векторное пространство с базисом $\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $\dim \mathcal{L} = n$. Тогда

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x^k \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{x} = \mathbf{E} \cdot X, \quad X = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Определим следующее отображение:

$$g_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) : \mathcal{L} \to \mathbb{K}^n, \quad g_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) = X. \tag{5.2}$$

$$g_{\mathbf{E}}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \alpha x^1 + \beta y^1 \\ \alpha x^2 + \beta y^2 \\ \vdots \\ \alpha x^n + \beta y^n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = \\ = \alpha g_{\mathbf{E}}(\mathbf{x}) + \beta g_{\mathbf{E}}(\mathbf{y}),$$

поскольку

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} x^k \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} y^k \mathbf{e}_k,$$

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = \alpha \sum_{k=1}^{n} x^k \mathbf{e}_k + \beta \sum_{k=1}^{n} y^k \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha x^k + \beta y^k\right) \mathbf{e}_k.$$