Конспект лекции 7

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ I

§ 0. План лекции

Лекция Определители.

1. Определители второго порядка.

1.1. Система линейных уравнений;

1.2. Определение определителя второго порядка;

1.3. Запись через определители;

1.4. Свойства определителя второго порядка. Основные и производные.

2. Определитель порядка $n > 1$.

2.1. Определение как числовой функции столбцов;

2.2. Теорема об основных свойствах определителя;

2.3. Формулы Крамера.

3. Перестановки.

3.1. Определение. Запись через двухрядную таблицу;

3.2. Теорема о количестве всех перестановок S_n;

3.3. S_n — группа;

3.4. Определение инверсии;

3.5. Чётные и нечётные перестановки;

3.6. Лемма о знаке перестановки;

3.7. Теорема о $\operatorname{sign}(\sigma\tau) = \operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\tau)$;

3.8. Взаимно обратные перестановки.

4. Существование и единственность определителя.

4.1. Общий вид полилинейной и кососимметричной функции n–столбцов размера $n \times 1$. Вывод;

4.2. Теорема о формуле полного развёртывания;

4.3. Следствие. $F(A) = F(\mathbb{I}_n) \det A$;

4.4. Теорема о равенстве $\det A = \det A^T$.

5. Определители специального вида.

5.1. Лемма об определителе треугольной матрицы;

5.2. Определитель блочной матрицы.

6. Разложение определителя по столбцам и строкам.

6.1. $\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} a_k^j \mathcal{A}_k^j$. Алгебраическое дополнение;

6.2. $\det A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^j \mathcal{A}_k^j$;

6.3. $\mathcal{A}_k^j = (-1)^{k+j} \overline{M}_k^j$;

6.4. Фальшивое разложение определителя.

§ 1. Определители второго порядка

Система уравнений.

$$\begin{cases} ax + by = p, \\ cx + dy = q, \end{cases} \tag{1.1}$$

где a, b, c, d, p, q — это заданные числа, x, y — это неизвестные.

Матричная форма записи.

$$AX = B, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Введём определитель матрицы 2×2:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |A| = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} ad - bc. \tag{1.3}$$

Решение системы при условии $\det A \neq 0$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\det A_x}{\det A}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\det A_y}{\det A}, \tag{1.4}$$

где

$$A_x = \begin{pmatrix} p & b \\ q & d \end{pmatrix}, \quad A_y = \begin{pmatrix} a & p \\ c & q \end{pmatrix}.$$

Свойства определителя второго порядка как функции двух столбцов.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$

$$\det\|\mathbf{a}, \mathbf{b}\| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Теорема 1. *Определитель второго порядка обладает следующими основными свойствами*:

(1) *линейность по первому столбцу*:

$$\det\|\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \mathbf{b}\| = \alpha_1 \det\|\mathbf{a}_1, \mathbf{b}\| + \alpha_2 \det\|\mathbf{a}_2, \mathbf{b}\|$$

или в развернутом виде,

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 & b \\ \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 & d \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} a_2 & b \\ c_2 & d \end{vmatrix};$$

также имеет место линейность по второму столбцу

$$\det\|\mathbf{a}, \beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2\| = \beta_1 \det\|\mathbf{a}, \mathbf{b}_1\| + \beta_2 \det\|\mathbf{a}, \mathbf{b}_2\|;$$

(2) *кососимметричность*:

$$\det\|\mathbf{a}, \mathbf{b}\| = -\det\|\mathbf{b}, \mathbf{a}\|;$$

в развернутом виде

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix};$$

(3) *нормировка*:

$$\det\|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\| = 1,$$

где

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

— это стандартный базис в пространстве $\mathbb{K}^2$; *или*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

§ 2. Определители порядка $n > 1$

Пусть $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} = \|A_1, A_2, \ldots, A_n\|,$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^n \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^n \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^n \end{pmatrix}.$$

Определение 1. *Определителем, или детерминантом квадратной числовой матрицы A называется числовая функция столбцов этой матрицы*

$$\det : \underbrace{\mathbb{K}^n \times \cdots \times \mathbb{K}^n}_{n} \to \mathbb{K},$$

обозначаемая

$$\det A = |A| = \det\|A_1, A_2, \ldots, A_n\| = |A_1, A_2, \ldots, A_n|$$

и обладающая следующими свойствами:

(1) *полилинейность, т. е.*

$$|\alpha' A_1' + \alpha'' A_1'', A_2, \ldots, A_n| = \alpha' |A_1', A_2, \ldots, A_n| + \alpha'' |A_1'', A_2, \ldots, A_n|;$$

(2) *кососимметричность, т. е. при перестановке двух* <u>*соседних*</u> *столбцов определитель меняет знак на противоположный*

$$|A_1, \dots, A_k, A_{k+1}, \dots, A_n| = -|A_1, \dots, A_{k+1}, A_k, \dots, A_n|;$$

(3) *нормировка: определитель единичной матрицы* $\mathbb{I}_n \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *равен единице*

$$\det \mathbb{I}_n = 1.$$

Замечание. Можно доказать, что при перестановке двух произвольных столбцов определитель меняет свой знак на противоположный.

Формулы Крамера для квадратных систем уравнений.

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_n^1 x^n = b^1, \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \dots + a_n^2 x^n = b^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1^n x^1 + a_2^n x^2 + \dots + a_n^n x^n = b^n, \end{cases} \tag{2.1}$$

или в матричной форме

$$x^1 A_1 + x^2 A_2 + \dots + x^n A^n = B, \tag{2.2}$$

где $B = (b^1, b^2, \dots, b^n)^T$. Пусть

$$\triangle \overset{\text{def}}{=} |A_1, A_2, \dots, A_n| \neq 0, \quad \triangle_1 \overset{\text{def}}{=} |B, A_2, \dots, A_n|.$$

$$\triangle_1 = |B, A_2, \dots, A_n| = |x^1 A_1 + x^2 A_2 + \dots + x^n A_n, A_2, \dots, A_n| = \\ = x^1 \underbrace{|A_1, A_2, \dots, A_n|}_{=\triangle} + x^2 \underbrace{|A_2, A_2, \dots, A_n|}_{=0} + \dots + \\ + x^n \underbrace{|A_n, A_2, \dots A_n|}_{=0} = x^1 \triangle \Rightarrow x^1 = \frac{\triangle_1}{\triangle}.$$

$$\triangle_k \overset{\text{def}}{=} |A_1, \dots, A_{k-1}, B, A_{k+1}, \dots, A_n|.$$

$$x^k = \frac{\triangle_k}{\triangle}. \tag{2.3}$$

Теорема 2. *Если* $\triangle \neq 0$, *то при условии* <u>*существовании*</u> *решения системы* (2.1) *оно дается формулой* (2.3) *при* $k = \overline{1, n}$.

§ 3. Перестановки

Пусть $N = \{1, 2, ..., n\}$.

Определение 2. *Перестановкой множества* N *называется взаимно однозначное отображение (инъективное и сюръективное)*

$$\sigma : N \to N.$$

Множество всех перестановок множества N обозначается как S_n.
Замечание 1. Перестановку σ удобно записывать в виде следующей таблицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}, \quad \sigma(i) \neq \sigma(j) \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Справедливо следующее утверждение:
Теорема 3. *Количество всех перестановок n–элементного множества N равно $n!$.*

Наблюдение 1. Определена ассоциативная операция произведения перестановок:

$$(\tau\sigma)(i) = \tau(\sigma(i)) \quad \forall\, i \in N.$$

Наблюдение 2. Определена тождественная перестановка.

Наблюдение 3. Для каждой перестановки определена обратная перестановка.
Лемма 1. *S_N — группа.*

Определение 3. *Будем говорить, что два различных элемента $i, j \in N = \{1, 2..., n\}$ образуют инверсию в перестановке $\sigma \in S_n$, если числа*

$$i - j \quad \textit{и} \quad \sigma(i) - \sigma(j)$$

имеют разные знаки.

Например, рассмотрим такую перестановку

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Справедливы следующие выражения:

$$1 - 3 < 0 \quad \text{и} \quad \sigma(1) - \sigma(3) = 2 - 1 > 0.$$

Следовательно, числа 1 и 3 образуют инверсию в указанной перестановке σ.
Замечание 2. Если перестановка σ задана упорядоченной по верхнему ряду таблицей

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{bmatrix},$$

то инверсия в перестановке σ обнаруживается в виде наличия в нижнем ряде чисел $\sigma(i)$ и $\sigma(j)$ таких, что большее число находится левее меньшего. Например, в перестановке

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

имеется 6 инверсий. А именно, следующие пары чисел нижнего ряда предыдущей таблицы:

$$(3, 1), \quad (3, 2), \quad (5, 2), \quad (5, 1), \quad (5, 4), \quad (2, 1).$$

О п р е д е л е н и е 4. *Перестановка* $\sigma \in S_n$ *называется чётной* (*нечётной*), *если она содержит чётное* (*нечётное*) *число инверсий. Знаком перестановки* σ *называется число*

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad \sigma - \textit{чётная перестановка}, \\ -1, & \textit{если} \quad \sigma - \textit{нечётная перестановка}. \end{cases}$$

Л е м м а 2. *Справедливо следующее равенство*:

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \prod_{\{i,j\} \subset N,\, i \neq j} \operatorname{sign}\left(\frac{i-j}{\sigma(i) - \sigma(j)} \right). \tag{3.1}$$

Справедлива важная теорема:
Т е о р е м а 4. *Знак произведения двух перестановок* $\sigma \in S_n$ *и* $\tau \in S_n$ *равен произведению знаков этих перестановок*:

$$\operatorname{sign}(\sigma\tau) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \operatorname{sign}(\tau). \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.
Шаг 1. Пусть даны две перестановки

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{bmatrix}, \quad \tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(n) \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Для каждой фиксированной перестановки, например, для σ, помимо записи в виде упорядоченной по верхнему ряду двухрядной таблицы (3.3), существуют способы записи не упорядоченные по верхнему ряду. Например, такой вариант

$$\sigma = \begin{bmatrix} \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(n) \\ \sigma(\tau(1)) & \sigma(\tau(2)) & \cdots & \sigma(\tau(n)) \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

поскольку $\tau \in S_n$ — взаимно однозначное отображение. С учётом (3.4) мы приходим к следующей формуле для знака $\operatorname{sign}(\sigma)$:

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \prod_{\{i,j\} \subset N,\, i \neq j} \operatorname{sign}\left(\frac{\tau(i) - \tau(j)}{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))} \right). \tag{3.5}$$

Шаг 2. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} &\operatorname{sign}(\sigma) \cdot \operatorname{sign}(\tau) = \\ &= \prod_{\{i,j\} \subset N,\, i \neq j} \operatorname{sign}\left(\frac{\tau(i) - \tau(j)}{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))} \right) \cdot \prod_{\{i,j\} \subset N,\, i \neq j} \operatorname{sign}\left(\frac{i-j}{\tau(i) - \tau(j)} \right) = \\ &\qquad = \prod_{\{i,j\} \subset N,\, i \neq j} \operatorname{sign}\left(\frac{\tau(i) - \tau(j)}{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))} \right) \cdot \operatorname{sign}\left(\frac{i-j}{\tau(i) - \tau(j)} \right) = \end{aligned}$$

воспользуемся очевидным равенством $\operatorname{sign}(xy) = \operatorname{sign}(x) \cdot \operatorname{sign}(y)$ для произвольных чисел $x, y \in \mathbb{R}$

$$= \prod_{\{i,j\}\subset N,\, i\neq j} \operatorname{sign}\left(\frac{\tau(i)-\tau(j)}{\sigma(\tau(i))-\sigma(\tau(j))}\frac{i-j}{\tau(i)-\tau(j)}\right) =$$

$$= \prod_{\{i,j\}\subset N,\, i\neq j} \operatorname{sign}\left(\frac{i-j}{\sigma(\tau(i))-\sigma(\tau(j))}\right) = \operatorname{sign}(\sigma\tau).$$

Теорема доказана.

Следствие. *Взаимно обратные перестановки имеют один и тот же знак.*

Доказательство.

$$\sigma\cdot\sigma^{-1} = \varepsilon \Rightarrow 1 = \operatorname{sign}(\varepsilon) = \operatorname{sign}\left(\sigma\cdot\sigma^{-1}\right) = \operatorname{sign}(\sigma)\cdot\operatorname{sign}\left(\sigma^{-1}\right).$$

Следствие доказано.

§ 4. Существование и единственность определителя

Общий вид полилинейной и кососимметричной функции $F(A_1, A_2, \dots, A_n)$ столбцов квадратной матрицы $A = \|A_1, A_2, \dots, A_n\|$ размера $n\times n$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^n \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^n \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A_1 = \sum_{\sigma_1=1}^{n} a_1^{\sigma_1}\mathbf{e}_{\sigma_1}, \quad \cdots, \quad A_n = \sum_{\sigma_n=1}^{n} a_n^{\sigma_n}\mathbf{e}_{\sigma_n}.$$

В силу полилинейности функции $F(A_1, A_2, \dots, A_n)$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$F(A_1, A_2, \dots, A_n) = F\left(\sum_{\sigma_1=1}^{n} a_1^{\sigma_1}\mathbf{e}_{\sigma_1}, \sum_{\sigma_2=1}^{n} a_2^{\sigma_2}\mathbf{e}_{\sigma_2}, \dots, \sum_{\sigma_n=1}^{n} a_n^{\sigma_n}\mathbf{e}_{\sigma_n}\right) =$$

$$= \sum_{\sigma_1=1}^{n}\sum_{\sigma_2=1}^{n}\cdots\sum_{\sigma_n=1}^{n} a_1^{\sigma_1}a_2^{\sigma_2}\cdots a_n^{\sigma_n} F\left(\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma_n}\right). \quad (4.1)$$

Поскольку
$$F\left(\mathbf{e}_{\sigma_1}, \ldots, \mathbf{e}_{\sigma_j}, \ldots, \mathbf{e}_{\sigma_j}, \ldots \mathbf{e}_{\sigma_n}\right) = 0, \tag{4.2}$$
$$F\left(\mathbf{e}_{\sigma_1}, \mathbf{e}_{\sigma_2}, \ldots, \mathbf{e}_{\sigma_n}\right) = \operatorname{sign}(\sigma) F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n), \tag{4.3}$$
то силу формул (4.1)–(4.3) приходим к равенству
$$F\left(A_1, A_2, \ldots, A_n\right) = c \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} \cdots a_n^{\sigma_n}, \quad \sigma_k = \sigma(k), \tag{4.4}$$
где
$$c := F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = F(\mathbb{I}_n). \tag{4.5}$$
Теорема 5. *Справедлива следующая формула полного развертывания определителя*:
$$\det A = |A_1, A_2, \ldots, A_n| \overset{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} \cdots a_n^{\sigma_n}, \quad \sigma_k = \sigma(k), \tag{4.6}$$
где
$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^n \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^n \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^n \end{pmatrix}.$$

Следствие. *Всякая кососимметрическая и полилинейная числовая функция $F(A)$ столбцов квадратной $n \times n$ матрицы A имеет следующий вид*:
$$F(A) = F(\mathbb{I}_n) \det A,$$
где $\mathbb{I}_n$ — это единичная квадратная $n \times n$ матрица.

Теорема 6. $\det A^T = \det A$.

Доказательство.

Пусть
$$A^T = \left(\widetilde{a}_k^j\right)_n^n, \quad A = \left(a_k^j\right)_n^n, \quad \widetilde{a}_k^j = a_j^k.$$
$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \widetilde{a}_1^{\sigma_1} \widetilde{a}_2^{\sigma_2} \cdot \widetilde{a}_n^{\sigma_n} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{\sigma_1}^1 a_{\sigma_2}^2 \cdots a_{\sigma_n}^n. \tag{4.7}$$
Теперь нам нужно переставить множители
$$a_{\sigma(1)}^1 a_{\sigma(2)}^2 \cdot a_{\sigma(n)}^n, \quad \sigma(k) = \sigma_k,$$
таким образом, чтобы нижние индексы упорядочить по возрастанию. Рассмотрим соответствующую перестановку:
$$\tau = \begin{bmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix} \Rightarrow \tau = \sigma^{-1}.$$
Но тогда
$$\tau = \sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma^{-1}(1) & \sigma^{-1}(2) & \cdots & \sigma^{-1}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma_1^{-1} & \sigma_2^{-1} & \cdots & \sigma_n^{-1} \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$a^1_{\sigma_1} a^2_{\sigma_2} \cdots a^n_{\sigma_n} = a_1^{\sigma_1^{-1}} a_2^{\sigma_2^{-1}} \cdots a_n^{\sigma_n^{-1}}. \tag{4.8}$$

Поскольку $\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma^{-1})$, то

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) a_1^{\sigma_1^{-1}} a_2^{\sigma_2^{-1}} \cdots a_n^{\sigma_n^{-1}} =$$

$$= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) a_1^{\sigma_1^{-1}} a_2^{\sigma_2^{-1}} \cdots a_n^{\sigma_n^{-1}} =$$

$$= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign}(\tau) a_1^{\tau_1} a^{\tau_2} \cdots a_n^{\tau_n} = \det A. \tag{4.9}$$

Теорема доказана.

Следствие. *Определитель* $\det A$ *матрицы* $A = \|A^1, A^2, \dots, A^n\|^T$ *является полилинейной и кососимметрической функцией своих строк.*

§ 5. Определители специального вида

Лемма 3. *Определитель квадратной треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.*

Доказательство.

Рассмотрим, например, нижнетреугольную матрицу $A = (a)^j_k$, которая определяется условием, что

$$a^j_k = 0 \quad \text{при} \quad j < k,$$

т. е. имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^{n-1}_1 & a^{n-1}_2 & \cdots & a^{n-1}_{n-1} & 0 \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_{n-1} & a^n_n \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} \cdots a_n^{\sigma_n}. \tag{5.1}$$

Заметим, что в этой сумме остается только одно слагаемое

$$\operatorname{sign}(1, 2, \dots, n) a^1_1 a^2_2 \cdots a^n_n = a^1_1 a^2_2 \cdots a^n_n.$$

□ Действительно, в силу определения нижнетреугольной матрицы имеем

$$a_k^{\sigma_k} = 0 \quad \text{при} \quad \sigma_k < k \quad \text{при} \quad k = \overline{1, n}. \tag{5.2}$$

Отсюда в сумму (5.1) ненулевой вклад могут дать только слагаемые, для которых

$$\sigma_k \geqslant k \quad \text{при} \quad k = \overline{1, n}. \tag{5.3}$$

С другой стороны, имеем

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n = 1 + 2 + \cdots + n. \tag{5.4}$$

Из сравнения (5.3) с (5.4) приходим к выводу, что

$$\sigma_k = k \Leftrightarrow \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2, \cdots, \sigma_n = n. \quad \boxtimes$$

Лемма доказана.

Справедлива следующая важная теорема об определители блочной матрицы.

Теорема 7. *Пусть квадратная матрица* $A \in \mathbb{K}^{(m+n)\times(m+n)}$ *имеет блочную структуру*

$$A = \left\| \begin{matrix} B & D \\ O & C \end{matrix} \right\|,$$

где B *и* C — *это квадратные блоки размеров* $m \times m$ *и* $n \times n$ *соответственно. Тогда*

$$\begin{vmatrix} B & D \\ O & C \end{vmatrix} = |B| \cdot |C|. \tag{5.5}$$

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего заметим, что $\det A$ является полилинейной кососимметрической функцией первых m столбцов ($m \times m$ — это размер квадратной матрицы B) при фиксированных оставшихся столбцах матрицы A. Тогда согласно следствию из теоремы 5 получим формулу

$$\det A = F(B), \tag{5.6}$$

где

$$F(B) = F(\mathbb{I}_m)|B|, \quad F(\mathbb{I}_m) = \begin{vmatrix} \mathbb{I}_m & D \\ O & C \end{vmatrix} \tag{5.7}$$

Шаг 2. В силу следствия из теоремы 6 числовая функция $F(\mathbb{I}_m)$ (как определитель соответствующей матрицы) является полилинейной и кососимметрической функцией своих последних n строк ($n \times n$ — это размер матрицы C) при фиксированной матрице D. Поэтому

$$F(\mathbb{I}_m) = G(C) = G(\mathbb{I}_n) \cdot |C|, \tag{5.8}$$

где

$$G(\mathbb{I}_n) = \begin{vmatrix} \mathbb{I}_m & D \\ O & \mathbb{I}_n \end{vmatrix}. \tag{5.9}$$

Теперь заметим, что (5.9) — это определитель верхнетреугольной матрицы, у которой на главной диагонали расположены единицы, т. е.

$$G(\mathbb{I}_n) = 1. \tag{5.10}$$

Собирая формулы (5.6)–(5.10), получим формулу

$$\det A = |B| \cdot |C|.$$

Теорема доказана.

§ 6. Разложение определителя по столбцам и строкам

Пусть $A = (A_1, ..., A_n)$, $A_k \in \mathbb{K}^n$. Введём естественный базис арифметического пространства вектор–столбцов $\mathbb{K}^n$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем k–й столбец в следующем виде разложения по арифметическому базису:

$$A_k = \sum_{j=1}^{n} a_k^j \mathbf{e}_j. \tag{6.1}$$

Тогда имеет место следующая цепочка равенств:

$$\det A = |A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n| = \left| A_1, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_k^j \mathbf{e}_j, \ldots, A_n \right| = \\ = \sum_{j=1}^{n} a_k^j \, |A_1, \ldots, \mathbf{e}_j, \ldots, A_n| = \sum_{j=1}^{n} a_k^j \mathcal{A}_k^j. \tag{6.2}$$

Определение 5. *Определитель $\mathcal{A}_k^j$ при $j, k \in \overline{1, n}$ называется алгебраическим дополнением элемента a_k^j k–го столбца и j–ой строки.*

Лемма 4. *Имеет место следующее равенство*:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_k^j \mathcal{A}_k^j. \tag{6.3}$$

Доказательство.

Это равенство следствие равенства $\det A^T = \det A$.

Лемма доказана.

Формулы для вычисления алгебраических дополнений.

Сначала вычислим алгебраическое дополнение $\mathcal{A}_1^1$ элемента a_1^1 матрицы A.

□ Итак, справедливы следующие равенства:

$$\mathcal{A}^1_1 = |\mathbf{e}_1, A_2, \dots, A_n| = \begin{vmatrix} 1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ 0 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a^n_2 & \cdots & a^n_n \end{vmatrix} = |1| \cdot \begin{vmatrix} a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_2 & \cdots & a^n_n \end{vmatrix},$$

где мы воспользовались формулой (5.5) для вычисления определителя блочной матрицы. ⊠

Теперь вычислим алгебраическое дополнение $\mathcal{A}^j_k$ элемента a^j_k матрицы A.

□ Действительно,

$$\mathcal{A}^j_k = |A_1, \dots, A_{k-1}, \mathbf{e}_j, A_{k+1}, \dots, A_n| = \begin{vmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_{k-1} & 0 & a^1_{k+1} & \cdots & a^1_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{j-1}_1 & \cdots & a^{j-1}_{k-1} & 0 & a^{j-1}_{k+1} & \cdots & a^{j-1}_n \\ a^j_1 & \cdots & a^j_{k-1} & 1 & a^j_{k+1} & \cdots & a^j_n \\ a^{j+1}_1 & \cdots & a^{j+1}_{k-1} & 0 & a^{j+1}_{k+1} & \cdots & a^{j+1}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n_1 & \cdots & a^n_{k-1} & 0 & a^n_{k+1} & \cdots & a^n_n \end{vmatrix}$$

Теперь многократно переставляя k–й столбец мы получим следующий определитель

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^j_k &= |A_1, \dots, A_{k-1}, \mathbf{e}_j, A_{k+1}, \dots, A_n| = \\ &= (-1)^{k-1} |\mathbf{e}_j, A_1, \dots, A_{k-1}, A_{k+1}, \dots, A_n| = \\ &= (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} 0 & a^1_1 & \cdots & a^1_{k-1} & a^1_{k+1} & \cdots & a^1_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a^{j-1}_1 & \cdots & a^{j-1}_{k-1} & a^{j-1}_{k+1} & \cdots & a^{j-1}_n \\ 1 & a^j_1 & \cdots & a^j_{k-1} & a^j_{k+1} & \cdots & a^j_n \\ 0 & a^{j+1}_1 & \cdots & a^{j+1}_{k-1} & a^{j+1}_{k+1} & \cdots & a^{j+1}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a^n_1 & \cdots & a^n_{k-1} & a^n_{k+1} & \cdots & a^n_n \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь многократно мы должны переставить j–ую строчку. В результате получим равенство

$$\mathcal{A}_k^j = (-1)^{k-1}(-1)^{j-1}\begin{vmatrix} 1 & a_1^j & \cdots & a_{k-1}^j & a_{k+1}^j & \cdots & a_n^j \\ 0 & a_1^1 & \cdots & a_{k-1}^1 & a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1^{j-1} & \cdots & a_{k-1}^{j-1} & a_{k+1}^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\ 0 & a_1^{j+1} & \cdots & a_{k-1}^{j+1} & a_{k+1}^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1^n & \cdots & a_{k-1}^n & a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Теперь мы можем воспользоваться формулой (5.5) для вычисления блочной матрицы и получить следующую формулу:

$$\mathcal{A}_k^j = (-1)^{k+j}\overline{M}_k^j, \tag{6.4}$$

где символом $\overline{M}_k^j$ мы обозначили *дополнительный минор* к элементу a_k^j. Черта сверху означает, что мы из определителя $\det A$ вычеркнули j–ю строчку и k–й столбец:

$$\overline{M}_k^j = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_1^1 & \cdots & a_{k-1}^1 & a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{j-1} & \cdots & a_{k-1}^{j-1} & a_{k+1}^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\ \hline a_1^{j+1} & \cdots & a_{k-1}^{j+1} & a_{k+1}^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_{k-1}^n & a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n \end{array}\right|.$$

Минор $\overline{M}_k^j$ — это определитель $(n-1)$–го порядка.
Теорема 8. *Справедливы следующие формулы*:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}\overline{M}_k^j a_k^j = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}\overline{M}_k^j a_k^j. \tag{6.5}$$

Фальшивое разложение определителя. Рассмотрим определитель

$$|A_1, \ldots, A_{k-1}, B_p, A_{k+1}, \ldots, A_n|, \tag{6.6}$$

у которого вместо столбца A_k находится столбец B_p, который зададим его разложением по арифметическому базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ следующим образом:

$$B_p = \sum_{j=1}^{n} b_p^j \mathbf{e}_j. \tag{6.7}$$

После подстановки (6.7) в (6.6) получим равенство

$$|A_1, \ldots, A_{k-1}, B_p, A_{k+1}, \ldots, A_n| = \\ = \sum_{j=1}^{n} b_p^j \, |A_1, \ldots, A_{k-1}, \mathbf{e}_j, A_{k+1}, \ldots, A_n| = \sum_{j=1}^{n} b_p^j \mathcal{A}_k^j, \quad (6.8)$$

где $\mathcal{A}_k^j$ — это алгебраическое дополнение элемента a_k^j матрицы A.

Теперь возьмём в качестве $B_p = A_p$. Тогда если $p \neq k$ мы получим равенство

$$0 = |A_1, \ldots, A_{k-1}, A_p, A_{k+1}, \ldots, A_n| = \sum_{j=1}^{n} a_p^j \mathcal{A}_k^j,$$

поскольку в определителе два столбца равны в этом случае.

Таким образом, справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а 9. *Справедливы следующие формулы*:

$$\sum_{j=1}^{n} a_p^j \mathcal{A}_k^j = \begin{cases} \det A, & \text{если} \quad p = k; \\ 0, & \text{если} \quad p \neq k. \end{cases} \quad (6.9)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^q \mathcal{A}_k^j = \begin{cases} \det A, & \text{если} \quad q = j; \\ 0, & \text{если} \quad q \neq j. \end{cases} \quad (6.10)$$