Конспект лекции 8

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ II

§ 0. План лекции

Лекция Определители II.

4. Существование и единственность определителя. Продолжение.

4.4. Теорема о равенстве $\det A = \det A^T$.

. Определители специального вида.

5.1. Лемма об определителе треугольной матрицы;

5.2. Определитель блочной матрицы.

6. Разложение определителя по столбцам и строкам.

6.1. $\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} a_k^j \mathcal{A}_k^j$. Алгебраическое дополнение;

6.2. $\det A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^j \mathcal{A}_k^j$;

6.3. $\mathcal{A}_k^j = (-1)^{k+j} \overline{M}_k^j$;

6.4. Фальшивое разложение определителя.

7. Определитель третьего порядка.

7.1. Разложение по первой строчке.

7.2. Формула полного разложения.

7.3. Правило вычисления Саррюса.

8. Четыре результата об определителях.

8.1 Теорема о необходимом и достаточном условии $\det A = 0$;

8.2. Теорема о нетривиальном решении квадратной однородной системы уравнений;

8.3. Теорема о $\det(AB) = \det A \det B$.

8.4. Теорема об обратной матрице.

§ 1. Свойства определителя.

Теорема 1. $\det A^T = \det A$.

Доказательство.

Пусть

$$A^T = \left(\widetilde{a}_k^j\right)_n^n, \quad A = \left(a_k^j\right)_n^n, \quad \widetilde{a}_k^j = a_j^k.$$

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \widetilde{a}_1^{\sigma_1} \widetilde{a}_2^{\sigma_2} \cdot \widetilde{a}_n^{\sigma_n} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{\sigma_1}^1 a_{\sigma_2}^2 \cdots a_{\sigma_n}^n. \tag{1.1}$$

Теперь нам нужно переставить множители

$$a_{\sigma(1)}^1 a_{\sigma(2)}^2 \cdot a_{\sigma(n)}^n, \quad \sigma(k) = \sigma_k,$$

таким образом, чтобы нижние индексы упорядочить по возрастанию. Рассмотрим соответствующую перестановку:

$$\tau = \begin{bmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix} \Rightarrow \tau = \sigma^{-1}.$$

Но тогда

$$\tau = \sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma^{-1}(1) & \sigma^{-1}(2) & \cdots & \sigma^{-1}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma_1^{-1} & \sigma_2^{-1} & \cdots & \sigma_n^{-1} \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$a_{\sigma_1}^1 a_{\sigma_2}^2 \cdots a_{\sigma_n}^n = a_1^{\sigma_1^{-1}} a_2^{\sigma_2^{-1}} \cdots a_n^{\sigma_n^{-1}}. \tag{1.2}$$

Поскольку $\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma^{-1})$, то

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) a_1^{\sigma_1^{-1}} a_2^{\sigma_2^{-1}} \cdots a_n^{\sigma_n^{-1}} =$$
$$= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) a_1^{\sigma_1^{-1}} a_2^{\sigma_2^{-1}} \cdots a_n^{\sigma_n^{-1}} =$$
$$= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign}(\tau) a_1^{\tau_1} a^{\tau_2} \cdots a_n^{\tau_n} = \det A. \tag{1.3}$$

Теорема доказана.

Следствие. *Определитель* $\det A$ *матрицы* $A = \|A^1, A^2, \ldots, A^n\|^T$ *является полилинейной и кососимметрической функцией своих строк.*

§ 2. Определители специального вида

Лемма 1. *Определитель квадратной треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.*

Доказательство.

Рассмотрим, например, нижнетреугольную матрицу $A = (a)^j_k$, которая определяется условием, что

$$a^j_k = 0 \quad \text{при} \quad j < k,$$

т. е. имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^{n-1}_1 & a^{n-1}_2 & \cdots & a^{n-1}_{n-1} & 0 \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_{n-1} & a^n_n \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma a^{\sigma_1}_1 a^{\sigma_2}_2 \cdots a^{\sigma_n}_n. \tag{2.1}$$

Заметим, что в этой сумме остается только одно слагаемое

$$\operatorname{sign}(1, 2, \ldots, n) a^1_1 a^2_2 \cdots a^n_n = a^1_1 a^2_2 \cdots a^n_n.$$

□ Действительно, в силу определения нижнетреугольной матрицы имеем

$$a^{\sigma_k}_k = 0 \quad \text{при} \quad \sigma_k < k \quad \text{при} \quad k = \overline{1, n}. \tag{2.2}$$

Отсюда в сумму (2.1) ненулевой вклад могут дать только слагаемые, для которых

$$\sigma_k \geqslant k \quad \text{при} \quad k = \overline{1, n}. \tag{2.3}$$

С другой стороны, имеем

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n = 1 + 2 + \cdots + n. \tag{2.4}$$

Из сравнения (2.3) с (2.4) приходим к выводу, что

$$\sigma_k = k \Leftrightarrow \sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2, \cdots, \sigma_n = n. \quad \boxtimes$$

Лемма доказана.

Справедлива следующая важная теорема об определители блочной матрицы.

Теорема 2. *Пусть квадратная матрица $A \in \mathbb{K}^{(m+n)\times(m+n)}$ имеет блочную структуру*

$$A = \begin{Vmatrix} B & D \\ O & C \end{Vmatrix},$$

где B и C — это квадратные блоки размеров $m \times m$ и $n \times n$ соответственно. Тогда

$$\begin{vmatrix} B & D \\ O & C \end{vmatrix} = |B| \cdot |C|. \tag{2.5}$$

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего заметим, что $\det A$ является полилинейной кососимметрической функцией первых m столбцов ($m \times m$ — это размер квадратной матрицы B) при фиксированных оставшихся столбцах матрицы A.

□ Действительно, пусть

$$F(A_1, \dots, A_n) = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c} A_1 & A_2 & \dots & A_m & C \\ \hline O & O & \dots & O & B \end{array}\right|.$$

Тогда имеем

$$F(A_1, \cdots, \alpha A_k^{'} + \beta A_k^{''}, \cdots, A_m) = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A_1 & \dots & \alpha A_k^{'} + \beta A_k^{''} & \dots & A_m & C \\ \hline O & \dots & O & \dots & O & B \end{array}\right| =$$

$$= \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A_1 & \dots & \alpha A_k^{'} + \beta A_k^{''} & \dots & A_m & C \\ \hline O & \dots & \alpha O + \beta O & \dots & O & B \end{array}\right| =$$

$$= \alpha \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A_1 & \dots & A_k^{'} & \dots & A_m & C \\ \hline O & \dots & O & \dots & O & B \end{array}\right| + \beta \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A_1 & \dots & A_k^{''} & \dots & A_m & C \\ \hline O & \dots & O & \dots & O & B \end{array}\right| =$$

$$= \alpha F(A_1, \cdots, A_k^{'}, \cdots, A_m) + \beta F(A_1, \cdots, A_k^{''}, \cdots, A_m).$$

Полилинейность доказана. Докажем кососимметричность.

$$F(A_1, \cdots, A_k, \cdots, A_l, \cdots, A_n) =$$

$$= \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} A_1 & \dots & A_k & \dots & A_l & \dots & A_m & C \\ \hline O & \dots & O & \dots & O & \dots & O & B \end{array}\right| = -\left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} A_1 & \dots & A_l & \dots & A_k & \dots & A_m & C \\ \hline O & \dots & O & \dots & O & \dots & O & B \end{array}\right| =$$

$$= -F(A_1, \cdots, A_l, \cdots, A_k, \cdots, A_n). \quad \boxtimes$$

Тогда согласно получим формулу

$$\det A = F(B), \tag{2.6}$$

где

$$F(B) = F(\mathbb{I}_m)|B|, \quad F(\mathbb{I}_m) = \begin{vmatrix} \mathbb{I}_m & D \\ O & C \end{vmatrix} \tag{2.7}$$

Шаг 2. В силу следствия из теоремы 1 числовая функция $F(\mathbb{I}_m)$ (как определитель соответствующей матрицы) является полилинейной и кососимметрической функцией своих последних n строк ($n \times n$ — это размер матрицы C) при фиксированной матрице D. Поэтому

$$F(\mathbb{I}_m) = G(C) = G(\mathbb{I}_n) \cdot |C|, \tag{2.8}$$

где

$$G(\mathbb{I}_n) = \begin{vmatrix} \mathbb{I}_m & D \\ O & \mathbb{I}_n \end{vmatrix}. \tag{2.9}$$

Теперь заметим, что (2.9) — это определитель верхнетреугольной матрицы, у которой на главной диагонали расположены единицы, т. е.

$$G(\mathbb{I}_n) = 1. \tag{2.10}$$

Собирая формулы (2.6)–(2.10), получим формулу

$$\det A = |B| \cdot |C|.$$

Теорема доказана.

§ 3. Разложение определителя по столбцам и строкам

Пусть $A = \|A_1, ..., A_n\|$, $A_k \in \mathbb{R}^n$. Введём естественный базис арифметического пространства вектор–столбцов $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем k–й столбец в следующем виде разложения по арифметическому базису:

$$A_k = \sum_{j=1}^{n} a_k^j \mathbf{e}_j. \tag{3.1}$$

Тогда имеет место следующая цепочка равенств:

$$\det A = |A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n| = \left| A_1, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_k^j \mathbf{e}_j, \ldots, A_n \right| =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_k^j \, |A_1, \ldots, \mathbf{e}_j, \ldots, A_n| = \sum_{j=1}^{n} a_k^j \mathcal{A}_k^j. \tag{3.2}$$

Определение 5. *Определитель $\mathcal{A}_k^j$ при $j, k \in \overline{1, n}$ называется алгебраическим дополнением элемента a_k^j k–го столбца и j–ой строки.*

Лемма 2. *Имеет место следующее равенство*:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_k^j \mathcal{A}_k^j. \tag{3.3}$$

Доказательство.

Это равенство следствие равенства $\det A^T = \det A$.

Лемма доказана.

Формулы для вычисления алгебраических дополнений.

Сначала вычислим алгебраическое дополнение $\mathcal{A}_1^1$ элемента a_1^1 матрицы A.

□ Итак, справедливы следующие равенства:

$$\mathcal{A}_1^1 = |\mathbf{e}_1, A_2, \ldots, A_n| = \begin{vmatrix} 1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ 0 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix} = |1| \cdot \begin{vmatrix} a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix},$$

где мы воспользовались формулой (2.5) для вычисления определителя блочной матрицы. ⊠

Теперь вычислим алгебраическое дополнение $\mathcal{A}_k^j$ элемента a_k^j матрицы A.

□ Действительно,

$$\mathcal{A}_k^j = |A_1, \ldots, A_{k-1}, \mathbf{e}_j, A_{k+1}, \ldots, A_n| = \begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_{k-1}^1 & 0 & a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{j-1} & \cdots & a_{k-1}^{j-1} & 0 & a_{k+1}^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\ a_1^j & \cdots & a_{k-1}^j & 1 & a_{k+1}^j & \cdots & a_n^j \\ a_1^{j+1} & \cdots & a_{k-1}^{j+1} & 0 & a_{k+1}^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_{k-1}^n & 0 & a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Теперь многократно переставляя k–й столбец мы получим следующий определитель

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k^j &= |A_1, \ldots, A_{k-1}, \mathbf{e}_j, A_{k+1}, \ldots, A_n| = \\ &= (-1)^{k-1} |\mathbf{e}_j, A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_n| = \\ &= (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} 0 & a_1^1 & \cdots & a_{k-1}^1 & a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1^{j-1} & \cdots & a_{k-1}^{j-1} & a_{k+1}^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\ 1 & a_1^j & \cdots & a_{k-1}^j & a_{k+1}^j & \cdots & a_n^j \\ 0 & a_1^{j+1} & \cdots & a_{k-1}^{j+1} & a_{k+1}^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1^n & \cdots & a_{k-1}^n & a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь многократно мы должны переставить j–ую строчку. В результате получим равенство

$$\mathcal{A}_k^j = (-1)^{k-1}(-1)^{j-1}\begin{vmatrix} 1 & a_1^j & \cdots & a_{k-1}^j & a_{k+1}^j & \cdots & a_n^j \\ 0 & a_1^1 & \cdots & a_{k-1}^1 & a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1^{j-1} & \cdots & a_{k-1}^{j-1} & a_{k+1}^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\ 0 & a_1^{j+1} & \cdots & a_{k-1}^{j+1} & a_{k+1}^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1^n & \cdots & a_{k-1}^n & a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Теперь мы можем воспользоваться формулой (2.5) для вычисления блочной матрицы и получить следующую формулу:

$$\mathcal{A}_k^j = (-1)^{k+j}\overline{M}_k^j, \tag{3.4}$$

где символом $\overline{M}_k^j$ мы обозначили *дополнительный минор* к элементу a_k^j. Черта сверху означает, что мы из определителя $\det A$ вычеркнули j–ю строчку и k–й столбец:

$$\overline{M}_k^j = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_1^1 & \cdots & a_{k-1}^1 & a_{k+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{j-1} & \cdots & a_{k-1}^{j-1} & a_{k+1}^{j-1} & \cdots & a_n^{j-1} \\ \hline a_1^{j+1} & \cdots & a_{k-1}^{j+1} & a_{k+1}^{j+1} & \cdots & a_n^{j+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_{k-1}^n & a_{k+1}^n & \cdots & a_n^n \end{array}\right|.$$

Минор $\overline{M}_k^j$ — это определитель $(n-1)$–го порядка.
Теорема 3. *Справедливы следующие формулы*:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}\overline{M}_k^j a_k^j = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}\overline{M}_k^j a_k^j. \tag{3.5}$$

Фальшивое разложение определителя. Рассмотрим определитель

$$|A_1, \ldots, A_{k-1}, B_p, A_{k+1}, \ldots, A_n|, \tag{3.6}$$

у которого вместо столбца A_k находится столбец B_p, который зададим его разложением по арифметическому базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ следующим образом:

$$B_p = \sum_{j=1}^{n} b_p^j \mathbf{e}_j. \tag{3.7}$$

После подстановки (3.7) в (3.6) получим равенство

$$|A_1, \dots, A_{k-1}, B_p, A_{k+1}, \dots, A_n| = \\ = \sum_{j=1}^{n} b_p^j \, |A_1, \dots, A_{k-1}, \mathbf{e}_j, A_{k+1}, \dots, A_n| = \sum_{j=1}^{n} b_p^j \mathcal{A}_k^j, \quad (3.8)$$

где $\mathcal{A}_k^j$ — это алгебраическое дополнение элемента a_k^j матрицы A.

Теперь возьмём в качестве $B_p = A_p$. Тогда если $p \neq k$ мы получим равенство

$$0 = |A_1, \dots, A_{k-1}, A_p, A_{k+1}, \dots, A_n| = \sum_{j=1}^{n} a_p^j \mathcal{A}_k^j,$$

поскольку в определителе два столбца равны в этом случае.

Таким образом, справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *Справедливы следующие формулы*:

$$\sum_{j=1}^{n} a_p^j \mathcal{A}_k^j = \begin{cases} \det A, & \textit{если} \quad p = k; \\ 0, & \textit{если} \quad p \neq k. \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^q \mathcal{A}_k^j = \begin{cases} \det A, & \textit{если} \quad q = j; \\ 0, & \textit{если} \quad q \neq j. \end{cases} \quad (3.10)$$

§ 4. Определитель третьего порядка.

Рассмотрим определитель третьего порядка общего вида:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix}.$$

Сначала разложим этот определитель по первой строчке и получим следующее равенство:

$$\Delta_3 = (-1)^{1+1} a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_2^1 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_3^3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_3^1 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix} = \\ = a_1^1 \cdot \left(a_2^2 \cdot a_3^3 - a_3^2 \cdot a_2^3\right) - a_2^1 \cdot \left(a_1^2 \cdot a_3^3 - a_3^2 \cdot a_1^3\right) + a_3^1 \cdot \left(a_1^2 \cdot a_2^3 - a_2^2 \cdot a_1^3\right) = \\ = a_1^1 \cdot a_2^2 \cdot a_3^3 - a_1^1 \cdot a_3^2 \cdot a_2^3 - a_2^1 \cdot a_1^2 \cdot a_3^3 + a_2^1 \cdot a_3^2 \cdot a_1^3 + a_3^1 \cdot a_1^2 \cdot a_2^3 - a_3^1 \cdot a_2^2 \cdot a_1^3.$$

В этой сумме всего $3! = 6$ слагаемых. Полученное итоговое равенство совпадает с формулой полного развертывания определителя Δ_3 :

$$\Delta_3 = \sum_{\sigma \in S_3} \operatorname{sign} \sigma \, a_1^{\sigma_1} a_2^{\sigma_2} a_3^{\sigma_3}.$$

□ Действительно, шесть слагаемых в итоговом равенстве соответствует шести возможным перестановкам и знак перед слагаемым отвечает количеству инверсий в перестановке. Например, слагаемое

$$a_1^1 \cdot a_3^2 \cdot a_2^3$$

входит в сумму со знаком минус потому, что в перестановке

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

имеется одна инверсия $\{3, 2\}$, наблюдаемая в нижнем ряде двухрядной таблицы. А слагаемое

$$a_3^1 \cdot a_1^2 \cdot a_2^3$$

входит в сумму со знаком $+$, потому что в перестановке

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

имеется две инверсии $\{3, 1\}$ и $\{3, 2\}$. Следовательно, перестановка четная.

Существует полезное правило Саррюса вычисления определителей третьего порядка:

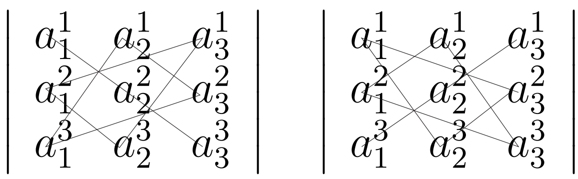

Рис. 1. Правило Саррюса вычисления определителей третьего порядка.

На первом рисунке изображены множители, которые входят в сумму со положительным знаком — это

$$a_1^1 \cdot a_2^2 \cdot a_3^3 \quad a_2^1 \cdot a_3^2 \cdot a_1^3 \quad a_3^1 \cdot a_1^2 \cdot a_2^3,$$

а на втором рисунке изображены множители, которые входят в сумму с отрицательным знаком — это

$$a_3^1 \cdot a_2^2 \cdot a_1^3 \quad a_2^1 \cdot a_1^2 \cdot a_3^3 \quad a_1^1 \cdot a_3^2 \cdot a_2^3.$$

§ 5. Важные теоремы об определителях

Теорема 5. *Определитель матрицы A равен нулю тогда и только тогда, когда её столбцы (строки) линейно зависимы.*

Доказательство. Пусть $A = (a)_k^j$ — это квадратная матрица порядка n :

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \vdots & a_n^n \end{pmatrix}, \quad A = \|A_1, A_2, \ldots, A_n\|, \quad A = \begin{Vmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^n \end{Vmatrix}.$$

Шаг 1. Достаточность. Пусть столбцы $A_1, \ldots, A_n$ матрицы A линейно зависимы. Например,

$$A_1 = c^2 A_2 + \cdots + c^n A_n.$$

$$\det A = |A_1, A_2, \ldots, A_n| = \left| c^2 A_2 + \cdots + c^n A_n, A_2, \ldots, A_n \right| =$$
$$= c^2 |A_2, A_2, \ldots, A_n| + \cdots + c_n |A_n, A_2, \ldots, A_n| = 0.$$

Шаг 2. Необходимость. Пусть $\det A = 0$. Проведём доказательство утверждения по индукции. Для случая $n = 2$ утверждение проверяется непосредственно. Предположим, что утверждение имеет место для квадратных матриц порядка $n - 1$. Докажем утверждение для случая квадратных матриц порядка n.

□ Без ограничения общности можно считать, что $a_1^1 \neq 0$. Вычтем из всех остальных строчек первую умноженную соответственно на числа

$$-\frac{a_1^2}{a_1^1}, \ldots, -\frac{a_1^n}{a_1^1},$$

тогда получим

$$0 = \det \begin{Vmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^n \end{Vmatrix} = \begin{vmatrix} A^1 \\ A^2 - \dfrac{a_1^2}{a_1^1} A^1 \\ \vdots \\ A^n - \dfrac{a_1^n}{a_1^1} A^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ 0 & a_2^2 - \dfrac{a_1^2}{a_1^1} a_2^1 & \cdots & a_n^2 - \dfrac{a_1^2}{a_1^1} a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^n - \dfrac{a_1^n}{a_1^1} a_2^1 & \cdots & a_n^n - \dfrac{a_1^n}{a_1^1} a_n^1 \end{vmatrix}. \tag{5.1}$$

Разлагая этот определитель по первому столбцу, с учётом неравенства $a_1^1 \neq 0$ получим равенство

$$0 = \begin{vmatrix} a_2^2 - \dfrac{a_1^2}{a_1^1} a_2^1 & \cdots & a_n^2 - \dfrac{a_1^2}{a_1^1} a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^n - \dfrac{a_1^n}{a_1^1} a_n^1 & \cdots & a_n^n - \dfrac{a_1^n}{a_1^1} a_n^1 \end{vmatrix}$$

Это определитель матрицы порядка $n-1$, поэтому по предположению индукции строки этого определителя зависимы, но тогда, очевидно, линейно зависимы и строки, начиная со второй, в определителе (5.1)

$$B^2 = \left(0, a_2^2 - \frac{a_1^2}{a_1^1}a_2^1, \dots, a_n^2 - \frac{a_1^2}{a_1^1}a_n^1\right) = A^2 - \frac{a_1^2}{a_1^1}A^1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$B^n = \left(0, a_2^n - \frac{a_1^n}{a_1^1}a_2^1, \dots, a_n^n - \frac{a_1^n}{a_1^1}a_n^1\right) = A^n - \frac{a_1^n}{a_1^1}A^1.$$

Таким образом, найдётся такой нетривиальный набор коэффициентов $\alpha_2, ..., \alpha_n$, что

$$\alpha_2 B^2 + \dots + \alpha_n B^n = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\left(\alpha_2\frac{a_1^2}{a_1^1} + \dots + \alpha_n\frac{a_1^n}{a_1^1}\right)A^1 + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_n A^n = O.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Однородная система n уравнений $AX = O$ относительно n переменных имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда* $\det A = 0$.

$\square$ $\det A = 0 \Leftrightarrow \exists\, X_0 = (x_0^1, ..., x_0^n)^T \neq O, \quad A_1x_0^1 + \dots + A_nx_0^n = O.$ $\boxtimes$

Теорема 6. *Если A и B матрицы из $\mathbb{K}^{n\times n}$, то*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Доказательство.

Пусть $C := AB$, где

$$A = \|A_1, \dots, A_n\|, \quad C = \|C_1, \dots, C_n\|, \quad C_k = A \cdot B_k = \sum_{j=1}^n A_j b_k^j.$$

$$\det C = |C_1, \dots, C_n| = \left|\sum_{j_1=1}^n A_{j_1}b_1^{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^n A_{j_n}b_n^{j_n}\right| =$$
$$= \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_n=1}^n b_1^{j_1}\cdots b_n^{j_n} \det\|A_{j_1}, ..., A_{j_n}\|. \quad (5.2)$$

Очевидно, что ненулевой вклад дают лишь те слагаемые, в которых числа

$$\{j_1, \cdots, j_n\}$$

различны, т. е. образуют перестановку из чисел $1, ..., n$:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{bmatrix}, \quad \sigma^{-1} = \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix}.$$

Проведем перестановку столбцов в выражении

$$\det \|A_{j_1}, ..., A_{j_n}\| \mapsto \det \|A_1, ..., A_n\| :$$

$$\det \|A_{j_1}, ..., A_{j_n}\| = \mathrm{sign}(\sigma) \det A.$$

$$\det C = \det A \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) b_1^{\sigma_1} \cdots b_n^{\sigma_n} = \det A \cdot \det B.$$

Теорема доказана.

§ 6. Обратная матрица

Определение 1. *Квадратная матрица A называется невырожденной или не особой, если* $\det A \neq 0$.

Теорема 7. *Квадратная матрица A обратима тогда и только тогда, когда* $\det A \neq 0$.

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Пусть квадратная матрица A обратима и A^{-1} — это обратная.

$$A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}_n \Rightarrow \left|A \cdot A^{-1}\right| = 1 \Rightarrow |A| \cdot \left|A^{-1}\right| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0.$$

Шаг 2. Достаточность. Пусть $\det A \neq 0$.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Сопоставим матрице A^T матрицу $A^\vee$, составленную из алгебраических дополнений к элементам матрицы A^T:

$$A^\vee = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1^1 & \mathcal{A}_1^2 & \cdots & \mathcal{A}_1^n \\ \mathcal{A}_2^1 & \mathcal{A}_2^2 & \cdots & \mathcal{A}_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{A}_n^1 & \mathcal{A}_n^2 & \cdots & \mathcal{A}_n^n \end{pmatrix}.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\{A \cdot A^\vee\}_k^j = \sum_{p=1}^n \{A\}_p^j \{A^\vee\}_k^p = \sum_{p=1}^n a_p^j \mathcal{A}_p^k = \det A \cdot \delta_{kj} \Rightarrow A^{-1} = \frac{A^\vee}{\det A}.$$

Теорема доказана.