2. Математические модели теории нелинейных волн

1. Метод характеристик

Рассмотрим уравнение колебания на бесконечной прямой

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}\ , \quad -\infty < x < \infty\ , t > 0 \qquad (1)$$

решение которого имеет вид:

$$u(x,t) = f_1(x - at) + f_2(x + at), \qquad (2)$$

и рассмотрим два уравнения в частных производных первого порядка, решения которых имеют вид (3) и (4):

$$u_t^{(1)} + a u_x^{(1)} = 0\ , \quad u^{(1)}(x,t) = f_1(x - at) \qquad (3)$$

$$u_t^{(2)} - a u_x^{(2)} = 0\ , \quad u^{(2)}(x,t) = f_2(x + at) \qquad (4)$$

Уравнения (3) и (4) называются линейными уравнениями переноса. Их решения (функции $f_1(x-at)$ и $f_2(x+at)$) переносят начальные профили $f_1(x)$ и $f_2(x)$ вдоль оси χ с постоянной скоростью a в положительном и отрицательном направлениях.

Если решение уравнений переноса является дважды непрерывно дифференцируемой функцией своего аргумента, то оно удовлетворяет и уравнению колебаний (1).

При распространении волны не происходит искажения ее профиля по времени, то есть отсутствует эффект дисперсии волны. Это связано с постоянством скорости распространения волны, которое определяется постоянством параметров среды.

Однако во многих физических задачах приходится учитывать изменение свойств среды под действием распространяющихся в ней волн, что приводит к зависимости скорости распространения волн от решения. В этом случае необходимо рассматривать квазилинейное уравнение переноса:

$$u_t + F(u)u_x = 0. \qquad (5)$$

Рассмотрим задачу Коши на бесконечной прямой

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0\,, \quad -\infty < x < \infty\,, t > 0, & (6) \\ u(x,0) = u_0(x),\ -\infty < x < \infty\,, & (7) \end{cases}$$

Решение ищем в виде $u(x,t) = f(x - u(x,t)t)$.

Тогда

$$u_x = (1 - u_x t) f'(\xi)\,, \qquad \xi = x - ut.$$

$$u_t = (-u - u_t t) f'(\xi)$$

и получаем

$$-t(u_t + uu_x) f'(\xi) = 0,$$

где $f(\xi)$ **- любая дифференцируемая функция.**

Решение задачи (6), (7) определяется из неявного уравнения

$$u(x,t) = u_0(x - u(x,t)t) \tag{8}$$

Рассмотрим на плоскости (*x*,*t*) кривую, определяемую уравнением (9) – характеристику уравнения (6):

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u(x,t)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = u(x,t) \tag{9}$$

Если $x = x(t)$ **- решение уравнения (9), то**

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = u_t + u_x \frac{dx}{dt} = u_t + u\,u_x\Big|_{x=x(t)} = 0$$

и $u(x(t),t)$ **является константой на кривой** $x = x(t)$ **и, следовательно,** $x = x(t) -$ **прямая линия на плоскости** (x,t) **с наклоном**

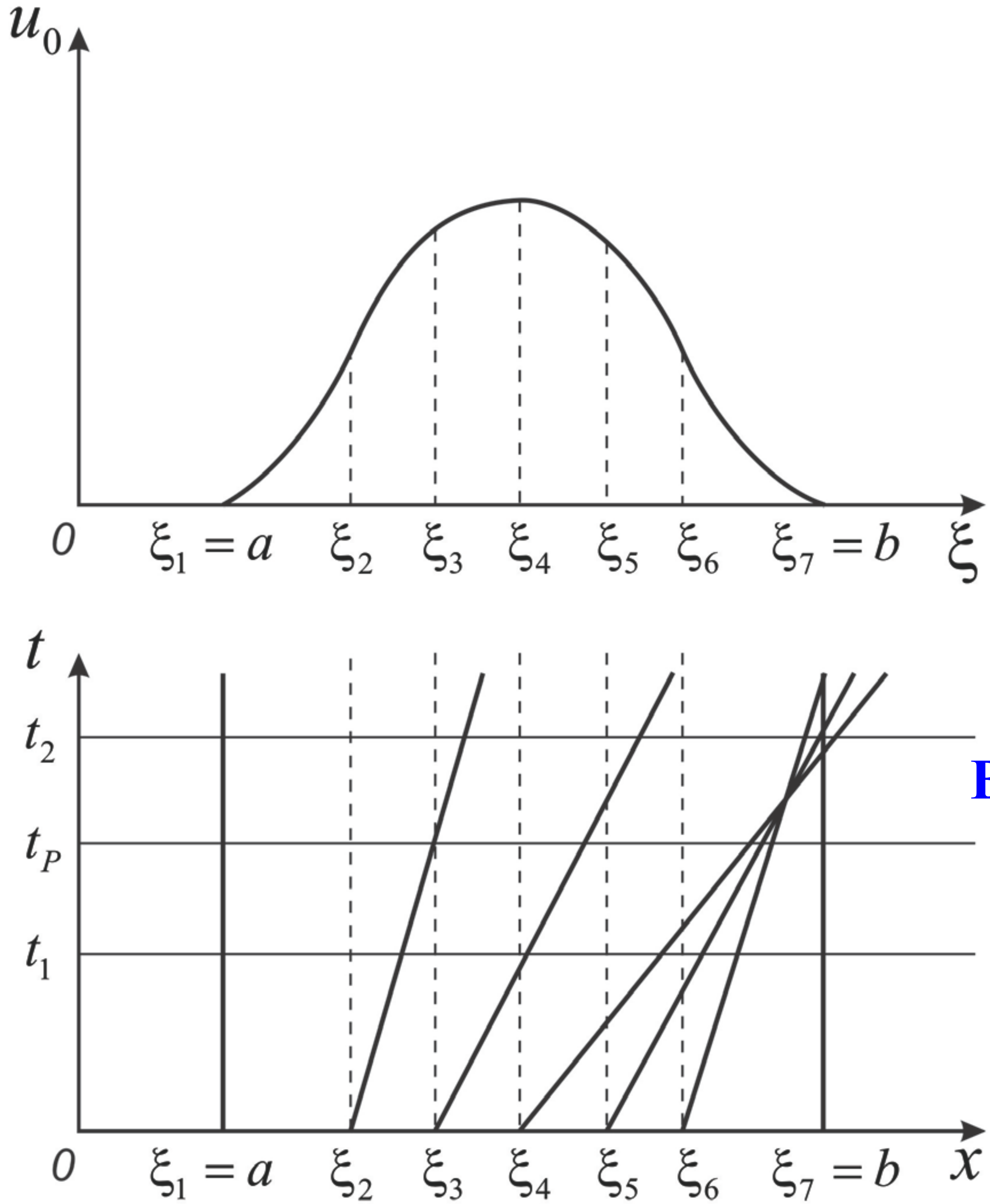
$$u(x(t),t) = u(x(0),0) = u_0(x(0)),$$

определяемым начальной функцией $u_0(\xi)$ **,** $\xi = x(0)$**.**

Уравнение для этой прямой имеет вид:

$$\frac{t}{1} = \frac{x-\xi}{u_0(\xi)} \quad \Rightarrow \quad x = \xi + u_0(\xi)\cdot t$$

Мы получили однопараметрическое семейство прямых, зависящих от параметра ξ , на которых решение *u(x,t)* уравнения (6) оказывается постоянным. Это позволяет по начальной функции $u_0(\xi)$ определить функцию *u(x,t)* в любой момент времени *t*. Покажем, как это можно сделать практически.



Выберем точку

$$\xi_k \in [a,b]$$

и построим соответствующую ей характеристику Γ_{ξ_κ} :

$$t = \frac{1}{u_0(\xi_k)} x - \frac{\xi_k}{u_0(\xi_k)}$$

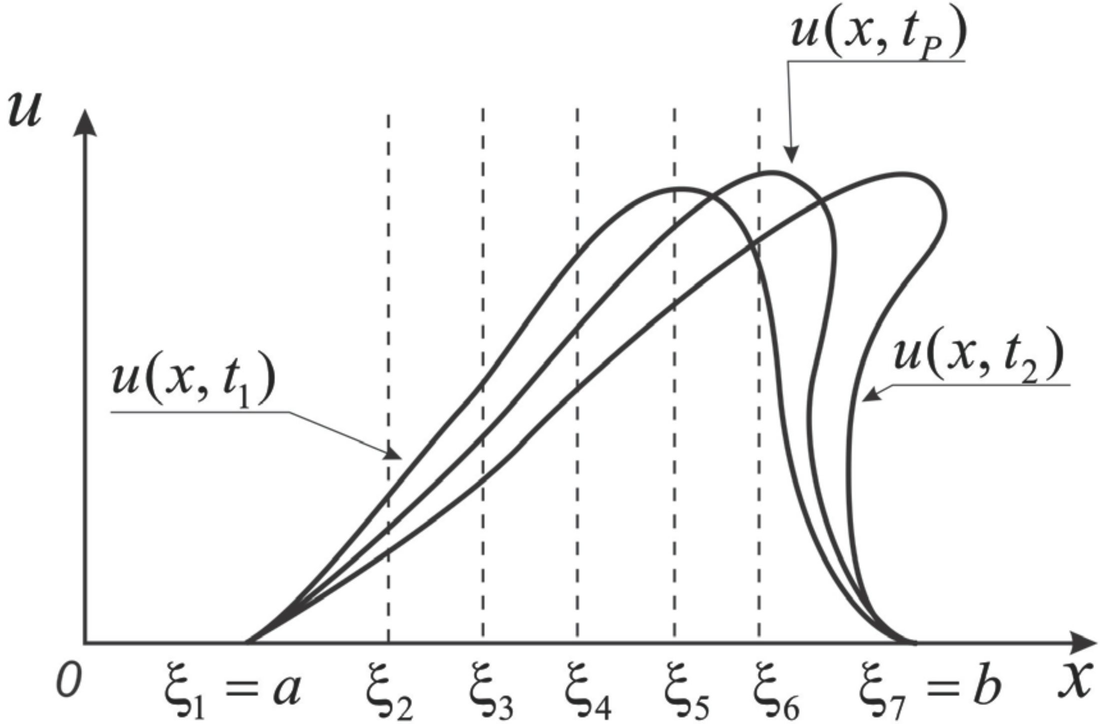
с углом наклона

$$tg\varphi = 1/u_0(\xi_k).$$

Всюду на характеристике

$$u_{\Gamma_{\xi_k}} = u_0(\xi_k).$$

Точка (x_k, t_1) – точка пересечения прямой $t=t_1$ с характеристикой $\Gamma_{\xi\kappa}$.



Скорость переноса начального значения $u_0(\xi_k)$ **вдоль характеристики** Γ_{ξ_k} **зависит от решения, профиль *$u_0(x)$* искажается – дисперсия бегущей волны. При** $t \geq t_p$ **характеристики пересекаются, профиль неоднозначный – опрокидывание волн.**

Причина явления опрокидывания волны заключается в том, что, согласно формуле (8)

$$u(x,t) = u_0\left(x - u(x,t)\cdot t\right) \qquad (8)$$

чем выше амплитуда точки, тем с большей скоростью волна распространяется. Поэтому точки вершины волны обгоняют в своем движении точки ее подошвы.

Замечание. Возникновение неоднозначного профиля решения достаточно часто оказывается противоречащим сути физической модели, описываемой уравнением (6)

$$u_t + uu_x = 0, \qquad (6)$$

согласно которой функция $u(x,t)$ является однозначной функцией.

Например, при рассмотрении волн в сплошных средах в одной точке физические параметры не могут иметь различные значения.

Для того. чтобы исключить неоднозначные решения необходимо расширить понятие решения уравнения (6)

$$u_t + uu_x = 0 \qquad (6)$$

и вместо непрерывно дифференцируемых решения рассматривать разрывные.

При этом нужно придать новый смысл выражению «функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (6)».

Естественным является введение обобщенных решений так, как они вводятся в теории обобщенных функций.

2. Обобщенное решение. Условие на разрыве

Определение. Функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (6) **в обобщенном смысле**, если для любого прямоугольника

$$\Pi_{xt} = \left\{(x,t): x_1 < x < x_2,\, 0 < t_1 < t < t_2\right\}$$

и любой бесконечно дифференцированной и финитной в Π_{xt} функции $\psi(x,t)$ справедливо интегральной тождество:

$$\iint_{\Pi_{xt}} \left\{ u\psi_t + \frac{1}{2}u^2\psi_x \right\} dxdt = 0. \qquad (10)$$

Замечание. Если $u \in C^{(1)}$, то **обобщенное решение** (10) удовлетворяет уравнению (6) **в обычном смысле**: проинтегрируем (10) по частям

$$\iint_{\Pi_{xt}} \left\{ u_t + uu_x \right\} \psi\, dxdt = 0. \qquad (11)$$

В силу произвольности Π_{xt} и ψ из (11) получим (6).

Замечание. **Для получения формулы (10) запишем уравнение (6) в следующем виде:**

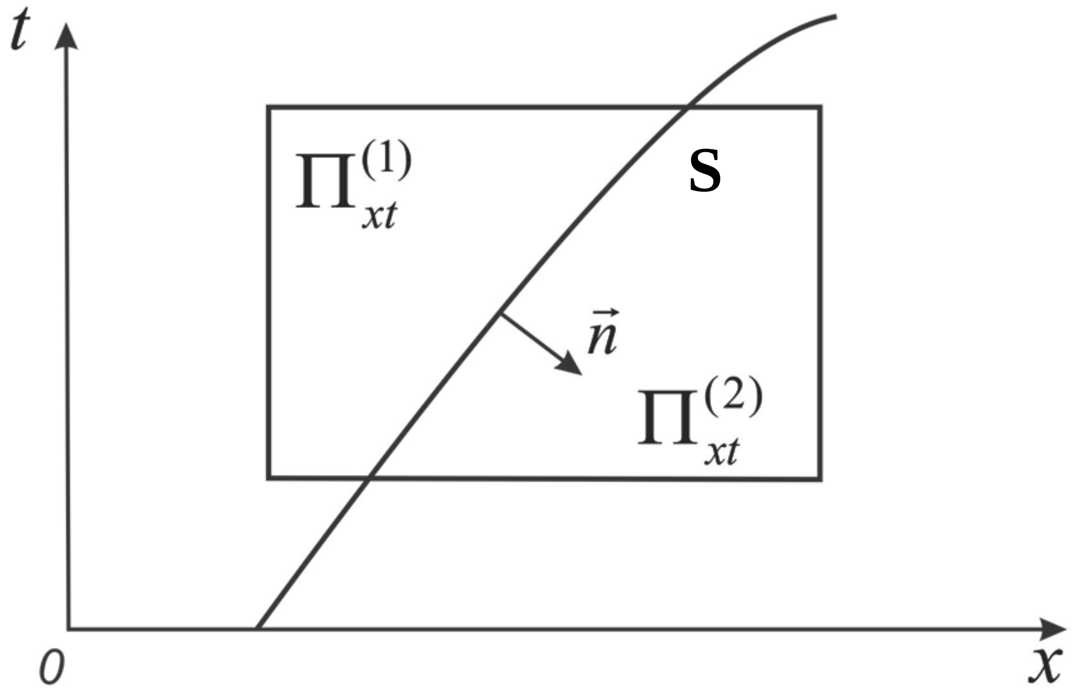
$$u_t + uu_x = u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0.$$

Умножим это уравнение на функцию ψ **и проинтегрируем по прямоугольнику** $\Pi_{x,t}$ **по частям, учитывая финитность функции** ψ **:**

$$\int\limits_{\Pi_{x,t}} \left\{ u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x \right\} \psi\, dxdt = \int\limits_{\Pi_{x,t}} \left\{ u\psi_t + \frac{1}{2}u^2\psi_x \right\} dxdt = 0.$$

Пусть *u(x,t)* – разрывное решение, имеющее единственный разрыв на кривой $\mathbf{S}=\{(x,t): x=s(t)\}$**:**

Пусть $u(x,t)\in C^{(1)}$ **при** $(x,t)\in \Pi_{x,t}^{(\ell)}$, $\ell=1,2$



.

Функция *u(x,t)* в областях $\Pi_{x,t}^{(\ell)}$, $\ell=1,2$ **удовлетворяет уравнению (6) в классическом смысле.**

Проинтегрируем (10) по частям в области $\prod_{x,t}^{(1)}$:

$$\int\limits_{\Pi_{xt}^{(1)}} \left\{ u\psi_t + (1/2)u^2\psi_x \right\} dxdt = \tag{12}$$

$$= \int\limits_{S} \left\{ \psi \cos(\hat{nt})u^- + (1/2)\psi \cos(\hat{nx})(u^-)^2 \right\} ds$$

и в области $\prod_{x,t}^{(2)}$:

$$\int\limits_{\Pi_{xt}^{(2)}} \left\{ u\psi_t + (1/2)u^2\psi_x \right\} dxdt = \tag{13}$$

$$= -\int\limits_{S} \left\{ \psi \cos(\hat{nt})u^+ + (1/2)\psi \cos(\hat{nx})(u^+)^2 \right\} ds,$$

где $\vec{n} = \left\{ \cos(\hat{nx}), \cos(\hat{nt}) \right\}$, u^+, u^- **- предельные значения** $\boldsymbol{u(x,t)}$ **на кривой** $\boldsymbol{S}$ **при стремлении к ней справа и слева.**

Замечание. **При получении формул (12) и (13) была использована формула интегрирования по частям:**

$$\int_D u \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = \oint_\Gamma uv \cos\varphi_k ds - \int_D v \frac{\partial u}{\partial x_k} dx,$$

где $D \in R^m$**- область с гладкой (или хотя бы кусочно-гладкой границей) Г,** $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $\varphi_k -$ **угол между осью** Ox_k **и внешней нормалью к поверхности Г.**

Формула справедлива для функций $u, \ v \in C^{(1)}(\bar{D})$.

Сложим (12) и (13):

$$\int_S \psi \left\{ \cos(\widehat{nt})[u] + \cos(\widehat{nx}) \left[\frac{u^2}{2} \right] \right\} ds = 0, \tag{14}$$

где $[u] = u^+ - u^-$ **. В силу произвольности** $\psi(x, y)$ **из (14) =>**

$$\cos(\widehat{nt})[u] + \cos(\widehat{nx}) \left[\frac{u^2}{2} \right] \Bigg|_S = 0. \tag{15}$$

Так как

$$\cos(\widehat{nt}) = \frac{-\dot{s}(t)}{\sqrt{1 + \dot{s}^2(t)}}, \quad \cos(\widehat{nx}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{s}^2(t)}}, \tag{16}$$

то (15), (16) =>

$$\dot{s}(t) = \frac{u^{+} + u^{-}}{2}, \qquad (17)$$

где $V_p = \dot{s}(t)$ - скорость распространения разрыва.

Формула (17) называется формулой Гюгонио – Ренкина или формулой условий на разрыве.

Формула (17) позволяет определить скорость распространения разрыва по значениям $u^{\pm}$, но не дает ответа на вопрос о положении разрыва *x=s(t)*.

Уравнение (6), записанное в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0 \qquad \Rightarrow$$

одномерного уравнения неразрывности или или закона сохранения. Интегрируя по *x*, получим:

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} u dx = 0\,, \qquad I = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x)dx,$$

предполагая, что $u \to 0$ **при** $x \to \pm\infty$**.**

Площадь *I* под кривой *u=u(x,t)* оказывается инвариантной во времени, то есть является интегралом движения.

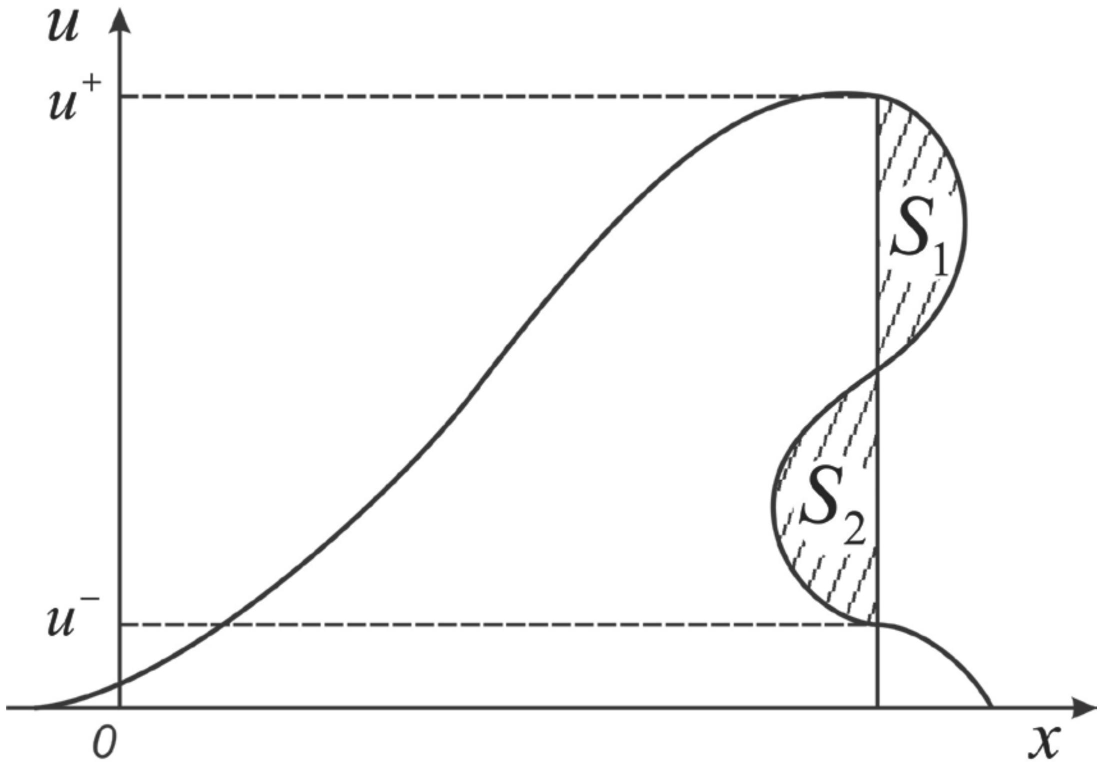
Основная идея при проведении разрыва состоит в том, чтобы при построении разрыва сохранить этот итеграл движения для разрывного решения.

Разрыв $x = s(t)$ нужно провести так, чтобы интеграл $I(u)$, отвечающий разрывному решению, был равен интегралу $I(u_0)$ для начальной функции.

Разрыв $x = s(t)$ проводится таким образом, чтобы площади S_1 и S_2 заштрихованных на рисунке областей совпадали.

В результате из непрерывного неоднозначного решения получается разрывное, но уже однозначное решение, являющееся обобщенным решением уравнения (6).

Условие на разрыве (17) выполняется при этом автоматически.



Разрыв ***x=s(t)*** **нужно построить так, чтобы** ***I(u)*****, отвечающий разрывному решению, был равен** ***I(u_0)*** **для начальной функции** ***u_0*** **.**

3. Уравнение Кортевега – де Фриза и законы сохранения

Функция $\eta(x,t)$ **, описывающая процесс распространения длинных волн на поверхности воды, приближенно удовлетворяет уравнению**

$$\eta_t + c_0\left(1+\frac{3}{2h_0}\eta\right)\eta_x + \frac{h_0^2}{6}c_0\eta_{xxx} = 0\,, \qquad (18а)$$

где h_0 **- глубина жидкости,** $c_0 = \sqrt{gh_0}$ **- скорость длинных волн на мелкой воде.**

Уравнение (18а) называется уравнением Кортевега - де Фриза.

Из (18а) с помощью линейной замены переменных получим:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0\,, \qquad (18б)$$

(18б) – канонический вид уравнениея Кортевега - де Фриза.

Уравнение (18б) **обладает бесконечным числом интегралов движения (законов сохранения):**

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,t)dx,$$

и т.д. Это означает, что данное уравнение обладает **глубокой внутренней симметрией**, которая выделяет его среди других нелинейных уравнений и позволяет построить чрезвычайно изящный метод построения точного решения, основанный на обратной задаче рассеяния для одномерного стационарного уравнения Шредингера.

4. Схема метода обратной задачи

1) Прямая и обратная задачи рассеяния

Определение. **Функция** ***f(x,t)*** **называется** **быстроубывающей,** **если**

$$\max_{0\le t\le T}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+|x|\right)\left|f(x,t)\right|dx<\infty. \qquad (19)$$

С уравнением Кортевега–де Фриза тесно связано **стационарное уравнение Шредингера (20):**

$$\psi_{xx}+(\lambda-u(x,t))\psi=0 \qquad (20)$$

с потенциалом ***u(x,t)*****, зависящим от** ***t*** **как от параметра.**

Рассмотрим для уравнения (20) две задачи:

а) Нахождение квантовомеханических уровней энергии связанных состояний.

Найти такие значения λ, при которых уравнение (20) имеет нетривиальные решения $\psi(x,t) \in L_2(\mathbb{R}^1)$. Здесь $\psi(x,t)$ – -нормированные на единицу волновые функции.

Эта задача имеет решение только при $\lambda < 0$.

При $x \to \infty$ решения имеют асимптотику:

$$\psi_m(x,t) \sim C_m(t) e^{-æ_m x},$$

где $\psi_m(x,t)$ - собственная функция, нормированная на 1, $\lambda_m = -æ_m^2$ – собственное значение,

$$C_m(t) = \lim_{x\to\infty} \psi_m(x,t) e^{æ_m x} \qquad (21)$$

б) Задача рассеяния плоской волны единичной амплитуды на потенциале *u(x,t)*.

Найти при $\lambda \geq 0$ ограниченные решения уравнения (20) с заданным характером асимптотического поведения при $x \to \pm\infty$ (временная зависимость $e^{-i\omega t}$ волна движется справа налево):

$$\psi(x,t) \sim e^{-ikx} + b(k,t)e^{ikx}, \quad x \to +\infty,$$
$$\psi(x,t) \sim a(k,t)e^{-ikx}, \quad x \to -\infty,$$

где $k^2 = \lambda$, а подлежащие определению функции $a(k,t)$ и $b(k,t)$ - коэффициенты прохождения и отражения, причем

$$|a(k,t)|^2 + |b(k,t)|^2 = 1.$$

Совокупность решений задач а) и б) $\{æ_m, C_m\}$, $\{a(k,t), b(k,t)\}$ называются данными рассеяния.

Прямая задача рассеяния: определение для заданного потенциала данных рассеяния.

Обратная задача рассеяния: определение по заданным данным рассеяния соответствующего потенциала.

Данных рассеяния достаточно для однозначного определения потенциала.

Схема решения обратной задачи рассеяния.

а) По данным рассеяния строится функция *B(x;t)* – ядро уравнения Гельфанда – Левитана:

$$B(x;t)=\sum_{m=1}^{n} C_m^2(t)e^{-æ_m x}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} b(k,t)e^{ikx}dk \qquad (22)$$

б) Ищется решение линейного интегрального уравнения Гельфанда – Левитана:

$$K(x,y;t)+B(x+y;t)+\int_x^{\infty} B(y+z;t)K(x,z;t)dz=0 \quad (23)$$

в) Решив уравнение (23) и найдя *K(x,y;t)*, по формуле (24)

$$u(x,t)=-2\frac{d}{dx}K(x,x;t) \quad (24)$$

определяем функцию *u(x,t)*, которая и является искомым потенциалом, то есть решением обратной задачи рассеяния.

2) Решение задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{25}$$

Решение *u(x,t)* задачи Коши (25) назовём быстроубывающим, если функция *u(x,t)* и все её производные по *x* до третьего порядка являются быстроубывающими функциями.

Теорема1

Если потенциал *u(x,t)* в (20) является быстроубывающим решением уравнения Кортевега – де Фриза, то собственные значения $\lambda_m = -æ_m^2$ **не зависят от времени *t*.**

Теорема 2

Если потенциал *u(x,t)* в (20) является быстроубывающим решением уравнения Кортевега – де Фриза, то данные рассеяния $C_m(t), b(k,t)$ и $a(k,t)$ зависят от времени следующим образом:

$$C_m(t) = C_m(0)\ \exp\ (4\ æ_m^3\ t)\ , \quad æ_m^2 = -\lambda_m\ ,$$

$$b\ (k,t) = b\ (k,0)\ \exp\ (i\ 8\ k^3\ t)\ , \quad k^2 = \lambda > 0\ , \qquad (26)$$

$$a\ (k,t) = a\ (k,0)$$

Зная данные рассеяния для $u_0(x) \equiv u(x,0)$, можно по формулам (26) найти данные рассеяния для *u(x,t)* и затем, построив и решив уравнение Гельфанда – Левитана, определить функцию *u(x,t)*.

Схема построения быстроубывающих решений задачи Коши:

а) Рассматриваем стационарное уравнение Шредингера с потенциалом $u_0(x)$:

$$\psi_{xx} + (\lambda - u_0(x))\psi = 0 \tag{27}$$

и определяем данные рассеяния $\{æ_m, C_m(0)\}$ **и** $\{a(k,0), b(k,0)\}$**.**

б) По формулам (26) определяем $C_m(t)$ **и** $b(k,t)$ **и строим ядро уравнения Гельфанда - Левитана (23):**

$$B(x;t) = \sum_{m=1}^{n} C_m^2(0)\exp(8æ_m^3 t - æ_m x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} b(k,0)\exp(i8k^3 t + ikx)\,dk \tag{28}$$

в) Решив уравнение Гельфанда – Левитана (23) с ядром (28), по формуле (24) определяем решение *u(x,t)* задачи Коши (25) для уравнения Кортевега – де Фриза.

5. Солитонные решения

Рассмотрим решение задачи Коши (25) при

$$u_0(x) = -\frac{2}{ch^2 x} \tag{29}$$

Данные рассеяния для уравнения (20) с потенциалом (29)

$$\psi_{xx} + \left(\lambda + \frac{2}{ch^2 x}\right)\psi = 0 \tag{30}$$

имеют вид: *b(k,0)=0*, существует только одно собственное значение $\lambda_1 = -1 = -æ_1^2,\ C_1(0) = \sqrt{2}$**.**

Ядро уравнения Гельфанда – Левитана имеет вид

$$B(x;t) = 2e^{8t-x} \tag{31}$$

Рассмотрим уравнение Гельфанда – Левитана с ядром (31):

$$K(x,y;t)+2e^{8t-x-y}+2e^{8t-y}\int_x^{\infty}K(x,z;t)e^{-z}dz=0 \qquad (32)$$

и будем искать его решение в виде

$$K(x,y;t)=L(x;t)e^{-y}. \qquad (33)$$

Получим

$$L(x;t)=-\frac{2e^{x}}{1+e^{2x-8t}} \qquad (34)$$

Следовательно,

$$K(x,y;t)=-\frac{2e^{x-y}}{1+e^{2x-8t}} \qquad (35)$$

и по формуле (24) получим решение задачи Коши (25) с начальной функцией (29):

$$u(x,t)=-2\frac{d}{dx}\left\{-\frac{2}{1+e^{2x-8t}}\right\}=-\frac{2}{ch^{2}(x-4t)}. \qquad (36)$$

Решение (36) является частным случаем более общего решения уравнения Кортевега – де Фриза

$$u(x,t) = -\frac{1}{2}\alpha^2 \frac{1}{ch^2\left\{\frac{1}{2}\alpha(x-x_0)-\frac{\alpha^3}{2}t\right\}}, \tag{37}$$

соответствующее значение параметров $\alpha = 2,\ x_0 = 0$.

Решения уравнения Кортевега – де Фриза вида (37) получили название солитонов. Они описывают бегущие волны неизменной формы, имеющие скорость, прямо пропорциональную амплитуде решения.

Пусть имеется два решения $u_j\left(x,t,\alpha_j,x_{0j}\right),\quad j=1,2,$ **вида (37), находящиеся на большом расстоянии друг от друга (то есть разность** $x_{02}-x_{01}$ **велика) и пусть** $\alpha_1>\alpha_2.$ **Тогда эти решения практически не взаимодействуют и распространяются независимо друг от друга. Однако со временем солитон** u_1 **, имеющий большую скорость** α_1 **распространения, догонит солитон** u_2 **и произойдет их нелинейное взаимодействие.**

Замечательным оказывается то, что после этого взаимодействия солитоны u_1 **и** u_2 **разойдутся («пройдя через друг друга»), не изменив своей формы, причем теперь солитон** u_1 **будет двигаться впереди солитона** u_2**. Единственным результатом взаимодействия будет то, что солитоны приобретают «скачки фаз»: величины** x_{0j} **получают приращение** Δx_{0j}**, причем** $\Delta x_1>0$ **, а** $\Delta x_2<0.$

Тем самым солитон u_1 «прыгает» вперед (вправо) на Δx_{01}, а солитон u_2 получает «отдачу» назад (влево) на величину Δx_{02}.

Эти частицеподобные свойства, проявляющиеся во взаимодействии, обусловили название солитонов и тот огромный интерес, который проявляется к их изучению.

Можно дать следующее определение солитонов, как решений нелинейных уравнений:

Определение. Будем называть солитонами такие решения нелинейных уравнений , которые имеют вид бегущих уединенных волн, взаимодействующих таким образом, что после взаимодействия они сохраняют неизменной свою форму, получая лишь приращения в фазах.

8. Уравнение Буссинеска. Задача о наводнении

Предположим, что рядом с населенным пунктом расположен водоем, под которыми находится гидроупорный слой (глина). Введем декартову систему координат (x,z), ось x которой направим вдоль поверхности водоема, а ось z перпендикулярно этой поверхности. Предположим, что населенный пункт находится в области $0<x$, в которой уровень грунтовой воды над гидроупором описывается функцией $u(x,t)$. Водоем занимает область $x<0$. Пусть к моменту $t=0$ вода в водоеме поднялась до отметки $z=0$ и продолжает пребывать по закону $u(0,t)=kt$. Вопрос: насколько быстро вода дойдет до населенного пункта, имеющего координату $x=L$, если населенный пункт расположен над гидроупором на высоте h?

Получим уравнение, описывающее изменение уровня грунтовых вод над гидроупором $u(x,t)$.

Плотность горизонтального потока воды q равна

$$q = -D\frac{\partial P}{\partial x} \qquad (1)$$

где *P* – давление, а *D* – коэффициент проводимости среды.

Давление на высоте *z*, где 0<*z*<*u* равно

$$P(z) = \rho g(u - z), \qquad (2)$$

где ρ - плотность воды.

Следовательно, плотность горизонтального потока q воды равна

$$q = -D\rho g \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (3)$$

и не зависит от z. Коэффициент D определяется свойствами грунта.

Полный поток, идущий через сечение, будет равен

$$Q = -D\rho g u \frac{\partial u}{\partial x}. \qquad (4)$$

Интегральное уравнение баланса воды в слое, заключенном между сечениями x и $x + \Delta x$ за промежуток времени от момента *t* до $t + \Delta t$, будет иметь следующий вид:

$$\int\limits_{x}^{x+\Delta x} \varepsilon\left(u\left(\xi, t+\Delta t\right)-u\left(\xi, t\right)\right) d\xi = \qquad (5)$$

$$= \int\limits_{t}^{t+\Delta t} D\rho g\left(u\left(x+\Delta x, \tau\right)\frac{\partial u\left(x+\Delta x, \tau\right)}{\partial x}-u\left(x, \tau\right)\frac{\partial u\left(x, \tau\right)}{\partial x}\right)d\tau,$$

где ε - коэффициент пористости (порозность) среды. Из уравнения (5) при $\Delta x \to 0,\ \Delta t \to 0$ получаем уравнение Буссинеска:

$$u_t = \frac{D\rho g}{\varepsilon}\left(u u_x\right)_x . \qquad (6)$$

Уравнение Буссинеска (6) описывает высоту уровня грунтовых вод над гидроупором.

Сделаем замену переменных: $t = \dfrac{\varepsilon}{D\rho g}\tau$ **и** $K = \dfrac{k\varepsilon}{D\rho g}$.

В новых переменных задача имеет следующий вид:

$$
\begin{cases}
u_\tau = \left(uu_x\right)_x, \quad x > 0, \tau > 0, & (7)\\
u\left(x, 0\right) = 0, \quad x \geq 0, & (8)\\
u\left(0, \tau\right) = K\tau, \quad \tau \geq 0. & (9)
\end{cases}
$$

Построим автомодельное решение задачи (7)-(9) в виде бегущей волны:

$$\begin{cases} u = f\left(\nu\tau - x\right), & \nu\tau - x > 0, \\ u = 0, & \nu\tau - x \le 0, \end{cases} \tag{10}$$

где ν - постоянная скорость, которую нужно определить.

Подставив (10) в (7), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $f\left(\alpha\right), \quad \alpha = \nu\tau - x$:

$$\nu f' = (ff')'. \tag{11}$$

Интегрируем уравнение (11) от 0 до $\alpha > 0$:

откуда

$$\nu f = ff', \tag{12}$$

$$f' = \nu. \tag{13}$$

Вид функции f находим из граничного условия (9):

$$u(0,\tau) = K\tau = f(\nu\tau - 0). \qquad (14)$$

Отсюда

$$f(\alpha) = \frac{K\alpha}{\nu}. \qquad (15)$$

Поскольку $f' = \nu$, **то** $\frac{K}{\nu} = \nu$ **и** $\nu = \sqrt{K}$ **, а** $f(\alpha) = \alpha\sqrt{K}.$

Решение задачи (7)-(9) имеет вид:

$$\begin{cases} u(x,\tau) = K\tau - \sqrt{K}x, & x < \sqrt{K}\tau, \\ u(x,\tau) = 0, & x \ge \sqrt{K}\tau. \end{cases} \qquad (16)$$

Наводнение дойдет до населенного пункта в момент τ, который определяется равенством

$$h = K\tau - \sqrt{K}L. \tag{17}$$

τ